应用概率统计　第 32 卷
第 4 期　2016 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Aug., 2016, Vol. 32, No. 4, pp. 433-440
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2016.04.009

无穷维非遍历Jackson网络的极限行为 *

程慧慧

(华北水利水电大学数学与信息科学学院, 郑州, 450045)

毛永华

(北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京, 100875)

摘　要: 假定无穷维Jackson网络的净流入的速率大于服务速率. 通过解非线性的Jackson方程, 并且利用耦合方法得到了无穷维Jackson网络的随机可比性, 进而得到其各排队分支队长的极限行为. 证明了此时尽管整个排队系统是非遍历的, 但仍可找到最大的遍历子网络.

关键词: Jackson网络; 非线性Jackson方程; 随机可比; 非遍历性

中图分类号: O212.62

§1.　引　　言

Jackson网络是一类经典的排队网络, 由J.R. Jackson于1957年在文献[1]中提出. 它也是一种反应扩散过程, 是粒子系统的一类重要模型(参见[2]). 关于有限维的Jackson网络, 其遍历性及收敛速度估计已有很丰富的研究成果. 文献[3–5]研究了有限维Jackson网络的遍历性和非遍历性. 文献[6, 7]研究了有限维Jackson网络遍历时的指数收敛速度率和非遍历时的衰减速率. 对于无穷维Jackson网络, 文献[8–10]研究了过程的存在性和遍历性. 本文是这些结果的继续和推广. 我们将考虑无穷维Jackson网络的非遍历性.

假定排队网络含有可数个服务台, 记为$J=\{1,2,\ldots\}$. 在每一个服务台$i\in J$处, 单位时间内从系统外部进入该服务台的顾客数服从参数为a_i的Poisson分布, 顾客在该服务台处接受服务的时间服从参数为b_i的指数分布, 当顾客在第i个服务台处接受完服务后立刻以p_{ij}的概率进入第j个服务台, 并在那里等候接受服务, 或者以p_{i0}的概率离开系统, 其中$p_{i0}=1-\sum\limits_{j\in J}p_{ij}$. 约定$p_{ii}=0$, 这里称$P=(p_{ij})_{i,j\in J}$为转移矩阵. 方便起见, 记$a=(a_i,i\in J)$, $b=(b_i,i\in J)$. 称上述排队网络为以(a,b,P)为参数的无穷维Jackson网络.

对于上述描述的无穷维Jackson网络, 文献[10, 11]给出了其对应马氏过程的存在性和遍历性条件. 为使读者对背景有全面了解, 我们叙述如下: 记$Z_+=\{0,1,\ldots\}$, $\widetilde{Z}_+=Z_+\cup\{\infty\}$. 排队系统的状态空间为$E=\widetilde{Z}_+^J$. 通过构造适当的度量, E是一个紧的度量空间(参见[2, 11]). 令$\mathscr{B}$为E上乘积拓扑下的开集生成的σ-代数. 令$C(E)$是E上的实值连续函数

* 国家自然科学基金(11201145, 11131003, 11571043)和985项目资助.

本文2015年11月9日收到, 2016年3月11日收到修改稿.

全体构成的集合. 定义一致范数$\|\cdot\|$: $\|f\| = \sup\limits_{x\in E}|f(x)|$. $(C(E), \|\cdot\|)$是一个Banach空间. 令$D(E) = \{f \in C(E) : f$为柱函数$\}$. 所谓柱函数是指函数只依赖于有限个分量: 存在$\Lambda \subset J$使得$f(x) = f(x_\Lambda, y)$, $\forall x \in \overline{Z}_+^J$, $x_\Lambda \in \overline{Z}_+^\Lambda$, $y \in \overline{Z}_+^{J\setminus\Lambda}$. 由Stone-Weierstrass定理知: $D(E)$在$C(E)$中稠. 定义$D(E)$上的算子L如下:

$$\begin{aligned}Lf(x) = &\sum_{i\in J} a_i[f(x+e_i) - f(x)] + \sum_{i\in J} b_i p_{i0} 1_{\{x_i \geqslant 1\}}[f(x-e_i) - f(x)] \\ &+ \sum_{i,k\in J} b_i p_{ik} 1_{\{x_i\geqslant 1\}}[f(x-e_i+e_k) - f(x)].\end{aligned}$$

其中$e_i := (0,\ldots,0,1,0,\ldots) \in \mathbb{Z}_+^J$, 第$i$个分量为1. 并规定$\infty + 1 = \infty - 1 = \infty$.

假设

$$\sup_{j\in J}\Big\{a_j + \sum_{i\in J} b_i p_{ij}\Big\} < \infty, \qquad \sup_{j\in J} b_j < \infty. \tag{1}$$

文献[10]证明存在唯一的一个强连续Feller过程$\eta(t)$, 以$\overline{L}$为生成元. 并且$\overline{D(E)} = \mathscr{D}(\overline{L})$.

更进一步, 假设$c = (c_i, i \in J)$是Jackson方程$c = a + cP$的解, 并且对任意的$i \in J$, $\rho_i := c_i/b_i < 1$. 文献[10]同时证明了如下的遍历性结果. 对于任意初始状态$\eta(0) = x^{(0)}$, $\eta(t)$的分布弱收敛于π_ρ: 对任意有限子集$V \subset J$, 以及任意的$x_V = (x_j, j \in V)$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\eta_V(t) = x_V \,|\, \eta(0) = x^{(0)}\} = \prod_{i\in V}(1-\rho_i)\rho_i^{x_i}. \tag{2}$$

为完整的描述无穷维Jackson网络的长时间行为, 我们继续考虑非遍历的情形, 即存在$i \in J$, 使得$\rho_i \geqslant 1$. 这时我们需要考虑下面的非线性Jackson方程

$$c = (c \wedge b)P + a. \tag{3}$$

就像文献[4]中提到的那样, 我们用(3)式替换原有的线性$c = a + cP$是合理的. 因为在$M/M/1$排队模型中, 流出的速率应该是流入速率与服务速率取最小. 故我们使用(3)式做为新的Jackson方程.

首先, 我们证明非线性Jackson方程存在唯一解, 进而研究非遍历的无穷维Jackson网络的极限行为. 以下是本文的主要结果.

定理 1 考虑具有可数服务台的Jackson网络, 记$J = \{1, 2, \ldots\}$. 令c为非线性Jackson方程$c = (c\wedge b)P + a$的唯一解, 并且$\rho_i := c_i/b_i$, $I = \{i \in J : c_i < b_i\}$. 则对任意的$x_i \geqslant 0$, $i \in U$, 其中U为I的有限子集, 有

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) = x_i : i \in U] = \prod_{i\in U}(1-\rho_i)\rho_i^{x_i},$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) = x_i] = 0, \qquad i \in I^c.$$

本文主要结构如下: 第2部分, 我们主要研究新的Jackson方程(3)式解的存在唯一性. 第3部分, 我们用耦合的方法得到随机可比的两个过程, 进而给出主要结果的证明.

§2.　非线性Jackson方程的解

本节我们主要研究Jackson方程$c=(c\wedge b)P+a$的解.

引理 2　考虑具有可数服务台的Jackson网络, 其主方程$c=(c\wedge b)P+a$有唯一解.

证明:　(a) 首先证明解的存在性. 矩阵形式的Jackson方程(3)可写为

$$c_j=\sum_{i\in J}(c_i\wedge b_i)p_{ij}+a_j,\qquad j\in J. \tag{4}$$

如果我们知道集合$I=\{i\in J:c_i<b_i\}$, 则(4)式可表示为

$$c_j=\sum_{i\in I}c_ip_{ij}+\sum_{i\in I^c}b_ip_{ij}+a_j,\qquad j\in J,$$

其中$I^c=J\backslash I$, 此时把c分割成c_I和c_{I^c}两部分, 改写成$c=(c_I,c_{I^c})$. 相应的向量a记为$a=(a_I,a_{I^c})$. 转移矩阵P分割成$P_{II},P_{II^c},P_{I^cI^c}$和$P_{I^cI}$四个子矩阵. 由于$P_{II}$的谱半径$\sigma(P_{II})<1$, 因此$(I-P_{II})^{-1}$存在且正. 因此(4)有解, 矩阵形式表示如下:

$$\begin{aligned}c_I&=(a_I+b_IP_{I^cI})(I-P_{II})^{-1},\\ c_{I^c}&=a_{I^c}+b_{I^c}P_{I^cI^c}+c_IP_{II^c}.\end{aligned}$$

但显然这里的I我们并不知道, 下面我们用递归算法得到集合I. 首先令

$$c_j^{(0)}=\sum_{i\in J}b_ip_{ij}+a_j<\infty,\qquad j\in J. \tag{5}$$

由于真正的净流出量是$c_i\wedge b_i$, 而不是b_i, 显然$c_j^{(0)}$可能要比真实情况偏大. 令

$$I(1)=\{j\in J:c_j^{(0)}<b_j\}.$$

如果$I(1)=\emptyset$, 则$c_j^{(0)}\geqslant b_j,j\in J$, 因此(5)可写为

$$c_j^{(0)}=\sum_{i\in J}(c_i^{(0)}\wedge b_i)p_{ij}+a_j,\qquad j\in J.$$

故$c^{(0)}$是(4)的解. 否则, 令

$$c_j^{(1)}=\sum_{i\in I(1)}c_i^{(1)}p_{ij}+\sum_{i\in I(1)^c}b_ip_{ij}+a_j,$$

以及

$$I(2)=\{j\in J:c_j^{(1)}<b_j\}.$$

如果$I(1)=I(2)$, 则易知$c^{(1)}$是(4)的解. 否则重复上面的过程. 对一般的$n\geqslant 1$, 令

$$c_j^{(n)}=\sum_{i\in I(n)}c_i^{(n)}p_{ij}+\sum_{i\in I(n)^c}b_ip_{ij}+a_j,\qquad j\in J,$$

以及

$$I(n+1)=\{j\in J: c_j^{(n)}<b_j\}.$$

如果存在n使得$I(n)=I(n+1)$, 则$c^{(n)}$是(4)的解. 否则, 易证$c_j^{(n)}$关于n是单调递减的, 且$I(n)\subsetneqq I(n+1)$, $n\geqslant 0$. 事实上, 对任意的$j\in J$,

$$\begin{aligned}c_j^{(n+1)}-c_j^{(n)}&=\sum_{i\in I(n+1)\setminus I(n)}(c_i^{(n+1)}-b_i)p_{ij}+\sum_{i\in I(n)}(c_i^{(n+1)}-c_i^{(n)})p_{ij}\\&<\sum_{i\in I(n+1)}(c_i^{(n+1)}-c_i^{(n)})p_{ij}.\end{aligned}$$

令$\alpha:=c^{(n+1)}-c^{(n)}$. 则

$$(\alpha_{I(n+1)},\alpha_{I(n+1)^c})<(\alpha_{I(n+1)}P_{I(n+1)I(n+1)},\alpha_{I(n+1)}P_{I(n+1)I(n+1)^c}).$$

由于$(I-P_{I(n+1)I(n+1)})^{-1}>0$, 故$\alpha>0$, 即$c_j^{(n+1)}<c_j^{(n)}$, $j\in I(n+1)$. 记$c:=\lim\limits_{n\to\infty}c^{(n)}$, 以及$I:=\lim\limits_{n\to\infty}I(n)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I(n)=\{j\in J:c_j<b_j\}$. 由于$\sum\limits_{i\in J}b_ip_{ij}<\infty$, 由控制收敛定理, 可得

$$c_j=\sum_{i\in I}c_ip_{ij}+\sum_{i\in I^c}b_ip_{ij}+a_j,\qquad j\in J.$$

因此, $c=(c\wedge b)P+a$有解.

(b) 下证唯一性. 设c和$\widetilde{c}$均为(4)的解, 则

$$c_j-\widetilde{c}_j=\sum_{i\in J}(c_i\wedge b_i-\widetilde{c}_i\wedge b_i)p_{ij},$$

两端取绝对值并关于j求和得

$$\sum_{j\in J}|c_j-\widetilde{c}_j|\leqslant\sum_{i\in J}|c_i\wedge b_i-\widetilde{c}_i\wedge b_i|\leqslant\sum_{i\in J}|c_i-\widetilde{c}_i|,$$

所以上述不等号可改写为等号, 由于上述第一个不等号是逐项成立的, 故对于所有的i,

$$|c_i\wedge b_i-\widetilde{c}_i\wedge b_i|=|c_i-\widetilde{c}_i|,\qquad i\in J,$$

这就意味着$c_i\leqslant b_i$当且仅当$\widetilde{c}_i\leqslant b_i$. 故$I=\widetilde{I}:=\{j\in J:\widetilde{c}_j\leqslant b_j\}$.

$$\widetilde{c}_j=\sum_{i\in I}\widetilde{c}_ip_{ij}+\sum_{i\in I^c}b_ip_{ij}+a_j,\qquad j\in J.$$

所以$c_I=\widetilde{c}_I=(a_I+b_IP_{I^cI})(I-P_{II})^{-1}$, $c_{I^c}=\widetilde{c}_{I^c}=a_{I^c}+b_{I^c}P_{I^cI^c}+c_IP_{II^c}$. 这就证明了$c=\widetilde{c}$. $\square$

§3. 定理证明

回忆E上的偏序: $x \prec y$意味着$x_i \leqslant y_i, \forall i \in J$. 我们说$P_1(t) \prec P_2(t)$, 如果

$$P_1(t)f(x) \leqslant P_2(t)f(y), \qquad \text{任意的}\, x \prec y,\ f \in M,$$

其中$M = \{f \in D(E) : f(x) \leqslant f(y), \text{如果}\, x \prec y\}$. $\eta_i(t) : (\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}) \to (E, \mathscr{B})$是Feller过程, 记$P_i(t)$为对应的马氏半群, $i = 1, 2$. 如果对任意的t, 有$P_1(t) \prec P_2(t)$, $\eta_1(0) \prec \eta_2(0)$, 则$\eta_1(t) \prec \eta_2(t)$ a.s., 对任给的$\varepsilon = (\varepsilon_i \geqslant 0, i \in J : \sum\limits_{i \in J} \varepsilon_i < \infty)$, 构造两个Jackson网络, 使得对应的过程$\eta^+(t)$和$\eta^-(t, \varepsilon)$满足$\eta^-(t, \varepsilon) \prec \eta(t) \prec \eta^+(t)$. $\eta^-(t, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$, i.e. $\varepsilon_i > 0, i \in J$)是遍历的Jackson网络, 且$\eta^-(t, \varepsilon)$有平稳分布$\pi_{\rho(\varepsilon)}$: $\pi_{\rho(\varepsilon)}(x) = \prod\limits_{i \in J} (1 - \rho_i(\varepsilon_i))\rho_i(\varepsilon_i)^{x_i}$, 其中

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \rho_i^-(\varepsilon_i) = \frac{c_i}{b_i^-(0)} = \begin{cases} \rho_i, & i \in I; \\ 1, & i \in I^c. \end{cases}$$

首先, 令Jackson网络$\eta^+(t)$的参数定义如下:

$$a_i^+ = \begin{cases} a_i + \sum\limits_{j \in I^c} b_j P_{ji}, & i \in I; \\ a_i, & i \in I^c, \end{cases}$$

$$p_{ij}^+ = \begin{cases} 0, & (i, j) \in I^c \times I; \\ p_{ij}, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$p_{i0}^+ = p_{i0}, \qquad b_i^+ = b_i.$$

可证$\eta(t) \prec \eta^+(t)$, 因为存在如下保序耦合:

$$(x, y) \to \begin{cases} (x - e_i + e_j, y - e_i + e_j), & b_i p_{ij} \quad (i, j) \notin I^c \times I; \\ (x - e_i + e_j, y + e_j), & b_i p_{ij} \quad (i, j) \in I^c \times I; \\ (x + e_j, y + e_j), & a_j \quad j \in J; \\ (x - e_j, y - e_j), & b_j p_{j0} \quad j \in J. \end{cases} \tag{6}$$

(我们假定$p_{ii}^+ = \sum\limits_{j \in I} p_{ij}$, $i \in I^c$.) 注意到$\eta_I^+(t) = \{\eta_i^+(t)\}_{i \in I}$是以$I$为指标集的Jackson网络. 除了$p_{i0}^+$被替换为$p_{i0}^+ + \sum\limits_{j \in I^c} p_{ij}$外, 它的其它参数与$\eta^+(t)$在$I$上的限制过程是一样的. 由于$I = \{i \in J : c_i < b_i\}$, 故$\eta_I^+(t)$是遍历的且它所对应的平衡方程的解$c_I^+$, 等于$c_I = \{c_i\}_{i \in I}$. 也就是说

$$c_j = \sum_{i \in I} c_i p_{ij} + \Big(\sum_{i \in I^c} b_i p_{ij} + a_i \Big), \qquad j \in I.$$

因此, 对I的任意有限子集U

$$\liminf_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) < x_i : i \in U] \geqslant \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i^+(t) < x_i : i \in U] = \prod_{i\in U}(1-\rho_i^{x_i}). \tag{7}$$

接下来, 对任意的$\varepsilon > 0$, 构造Jackson网络$\eta^-(t,\varepsilon)$, 使得$\eta^-(t,\varepsilon) \prec \eta(t)$. $\eta^-(t,\varepsilon)$的参数如下:

$$a_i^-(\varepsilon) = a_i, \qquad b_i^-(\varepsilon)p_{ij}^-(\varepsilon) = b_i p_{ij},$$

$$b_i^-(\varepsilon)p_{i0}^-(\varepsilon) = \begin{cases} b_i p_{i0}, & i \in I; \\ b_i p_{i0} + c_i - b_i + \varepsilon, & i \notin I. \end{cases}$$

通过构造如下保序耦合, 可证$\eta^-(t,\varepsilon) \prec \eta(t)$:

$$(x,y) \to \begin{cases} (x+e_i, y+e_i), & a_i & i \in J; \\ (x-e_i, y-e_i), & b_i p_{i0} & i \in J; \\ (x-e_i, y), & c_i - b_i + \varepsilon & i \in I^c; \\ (x-e_i+e_j, y-e_i+e_j), & b_i p_{ij} & i \in J,\ j \in J. \end{cases}$$

注意到

$$b_i^-(\varepsilon) = \begin{cases} b_i, & i \in I; \\ c_i + \varepsilon, & i \notin I, \end{cases}$$

以及

$$p_{ij}^-(\varepsilon) = \begin{cases} p_{ij}, & i \in I; \\ \dfrac{b_i}{c_i+\varepsilon} p_{ij}, & i \notin I. \end{cases}$$

因此,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b^-(\varepsilon) = b_i^-(0) = [b_I, c_{I^c}],$$

以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_{ij}^-(\varepsilon) = p_{ij}^-(0) = \begin{cases} p_{ij}, & i \in I; \\ \dfrac{b_i}{c_i} p_{ij}, & i \notin I. \end{cases}$$

由于$c = (c \wedge b)P + a$, 可得$c = cP^-(0) + a = (c \wedge b^-(0))P^-(0) + a$. 因此, 由解得唯一性, 可得

$$c^-(0) = c = a(I - P^-(0))^{-1}.$$

接下来我们来证明对任意的$\varepsilon > 0$, $\eta^-(t,\varepsilon)$是遍历的. 令$c^-(\varepsilon)$是$\eta^-(t,\varepsilon)$对应的平衡方程的解. 可得

$$c^-(\varepsilon) = (c^-(\varepsilon) \wedge b^-(\varepsilon))P^-(\varepsilon) + a \leqslant c^-(\varepsilon)P^-(\varepsilon) + a \leqslant c^-(\varepsilon)P^-(0) + a,$$

所以对任意的$\varepsilon > 0$,

$$c^-(\varepsilon) \leqslant a(I - P^-(0))^{-1} = c^-(0) = c < b^-(0) < b^-(\varepsilon).$$

因此$\eta^-(t,\varepsilon)$是遍历的. 由$c^-(\varepsilon) = c^-(\varepsilon)P^-(\varepsilon) + a$可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c^-(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} a(I - P^-(\varepsilon))^{-1} = a(I - P^-(0))^{-1} = c^-(0) = c.$$

类似的,

$$\limsup_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) < x_i : i \in U] \leqslant \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i^-(t,\varepsilon) < x_i : i \in U] = \prod_{i\in U}(1 - \rho_i^-(\varepsilon)^{x_i}). \tag{8}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_i^-(\varepsilon) = \frac{c_i}{b_i^-(0)} = \begin{cases} \rho_i, & i \in I; \\ 1, & i \in I^c, \end{cases}$$

联合(7)和(8), 令$\varepsilon \to 0$, 可得

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) < x_i : i \in U] = \prod_{i\in U}(1 - \rho_i^{x_i}),$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\eta_i(t) < x_i] = 0, \qquad i \in I^c.$$

至此, 我们完成了定理的证明.

由定理可知, 尽管此时整个排队系统是非遍历的, 但我们依然可以找到遍历的子网络.

参 考 文 献

[1] Jackson J R. Networks of waiting lines [J]. *Oper. Res.*, 1957, **5(4)**: 518–521.

[2] Chen M F. *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems* [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004.

[3] Fayolle G, Malyshev V A, Menshikov M V. *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] Goodman J B, Massey W A. The non-ergodic Jackson network [J]. *J. Appl. Probab.*, 1984, **21(4)**: 860–869.

[5] Jackson J R. Jobshop-like queueing systems [J]. *Manage. Sci.*, 1963, **10(1)**: 131–142.

[6] Cheng H H, Mao Y H. L^2-decay rate for non-ergodic Jackson network [J]. *Front. Math. China*, 2014, **9(5)**: 1033–1049.

[7] Mao Y H, Xia L H. Spectral gap for open Jackson networks [J]. *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*), 2015, **31(12)**: 1879–1894.

[8] Kelbert M Ya, Kontsevich M L, Rybko A N. On Jackson circuits on countable graphs [J]. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 1988, **33(2)**: 379–382.

[9] Khmelev D, Spodarev E. Infinite closed Jackson networks [J]. *J. Math. Sci.*, 2001, **106(2)**: 2820–2829.

[10] 程慧慧, 毛永华. 无穷维Jackson网络过程的存在性和遍历性 [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2011, **47(2)**: 111–114.

[11] Liggett T M. *Interacting Particle Systems* [M]. New York: Springer, 1985.

Long-Time Behavior of Non-Ergodic Infinite Jackosn Network

CHENG Huihui

(*School of Mathematics and Information Science, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou, 450045, China*)

MAO Yonghua

(*School of Mathematical Sciences, Key Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing, 100875, China*)

Abstract: For the infinite Jackson network, assume that the net input rates are greater than the service rates for some nodes. Via solving the new throughput equation, the stochastic comparable processes are obtained by coupling method, and furthermore the limits for the queueing length in all nodes are also obtained. Despite the whole network is non-ergodic, it is possible to get the maximal ergodic subnetwork.

Keywords: Jackson network; nonlinear Jackson equation; stochastic comparison; non-ergodicity

2010 Mathematics Subject Classification: 60J75; 60K25; 90B22