

# 白噪声和泊松随机测度驱动的倒向重随机微分方程\*

杨 叙

(北方民族大学数学与信息科学学院, 750021, 银川)

**摘 要:** 本文研究了一类由白噪声和泊松随机测度驱动的倒向重随机微分方程, 并建立了此类方程解的定义以及Yamada-Watanabe定理.

**关键词:** 倒向重随机微分方程; 白噪声; 泊松随机测度; Yamada-Watanabe定理; 轨道唯一性

**中图分类号:** O211.63

## §1. 引 言

倒向重随机微分方程最初是由Pardoux和Peng在1994年给出并建立了其在一致利普希茨条件下解的存在唯一性. 最近, Xiong<sup>[1]</sup>和He等<sup>[2]</sup>利用一类倒向重随机微分方程证明了一类随机偏微分方程解的轨道唯一性. 本文将考虑一类更一般的倒向重随机微分方程, 并建立其各种解的定义和Yamada-Watanabe定理.

本文的其余部分组织如下: 第二节给出了白噪声和泊松随机测度驱动的倒向重随机微分方程解的定义. 第三节建立了一个Yamada-Watanabe定理, 此定理将有助于证明当这个倒向重随机微分方程具有弱解和轨道唯一性条件时就存在强解.

**记号:** 在本文中约定:

$$\int_x^y = \int_{(x,y]}, \quad \int_{x-}^{y-} = \int_{[x,y)} \quad \text{和} \quad \int_x^\infty = \int_{(x,\infty)}, \quad y \geq x \geq 0.$$

令 $M^n$ 表示 $M$ 的 $n$ 个乘积空间,  $[\mathcal{B}]^\mu$ 是 $\sigma$ -代数 $\mathcal{B}$ 关于概率测度 $\mu$ 的完备化.

## §2. 解的定义

假定 $T > 0$ 是一个固定的常数,  $\lambda$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度. 令 $\mathcal{B}(L)$ 是空间 $L$ 上的 $\sigma$ -代数,  $\mathcal{B}_t(L)$ 是由 $\{\omega(s) : 0 \leq s \leq t\}$ 生成的子 $\sigma$ -代数. 另一方面,  $\mathcal{B}_t(L)$ 也是 $L$ 在映射 $\rho_t : L \mapsto L$  (定义为 $(\rho_t \omega)(s) = \omega(t \wedge s)$ ) 下的逆 $\sigma$ -代数 $\rho_t^{-1}[\mathcal{B}(L)]$ . 用 $\mathcal{B}^t(L)$ 表示 $\{\omega(s) - \omega(t) : s \in [t, T]\}$ 生成的子 $\sigma$ -代数,  $D([0, T], L)$ 表示 $[0, T]$ 上的所有 $L$ -值的左极右连函数组成的空间. 如果 $L$ 是一个Polish空间, 则 $D([0, T], L)$ 在装备了Skorohod拓扑之后也是一个Polish空间.

\*国家自然科学基金项目(11401012)资助.

本文2016年5月25日收到, 2016年7月27日收到修改稿.

令 $D$ 是Polish空间,  $D_0 = \{f \in D([0, T], \mathbb{R}^{d_0}) : f(0) = 0\}$ ,  $D_1$ 是 $(0, \infty) \times E_1$ 上满足对于每个 $t > 0$ 都有 $N((0, t] \times E_1) < \infty$ 的计数测度 $N$ 组成的空间.  $D_1$ 的拓扑空间用其所有子集来装备, 则 $(D_1, \mathcal{B}(D_1))$ 是一个标准的可测空间(见[3; p.13]). 对于 $O \subset \mathbb{R}^{d_2}$ , 令 $U = L^2(O, \mathcal{B}(O), \lambda)$ . 用 $D_2$ 表示所有满足如下条件的函数 $f \in D([0, T], U)$ 组成的空间: 对每个 $t \geq 0$ ,  $f(t)$ 是从 $U$ 到 $\mathbb{R}$ 上的线性映射且 $f(0) = 0$ . 于是 $D_2$ 是 $D([0, T], U)$ 的闭子集. 令 $C = C([0, T]; \mathbb{R})$ 是 $[0, T]$ 上的 $\mathbb{R}$ -值连续组成的空间,  $C^0$ 是 $C$ 中在无穷处为零的函数组成的集合. 假定 $C_2^0$ 是 $[0, T] \times [0, \infty)$ 上使得对于所有 $t \in [0, T]$ 都有 $f(t, 0) = f(0, t) = 0$ 成立的连续函数 $f(t, s)$ 组成的集合. 装备了上确界范数之后,  $C^0$ 和 $C_2^0$ 都是Polish空间. 假定 $E_i$  ( $i = 0, 1, 2$ )和 $E$ 都是Polish空间,  $\mu_i(du)$ 和 $\mu(du)$ 分别是 $E_i$ 和 $E$ 上的Borel  $\sigma$ -有限测度. 设

$$G = \left\{ Z \in \mathcal{B}([0, T]) : \|Z\|_{L^2(T)}^2 := \int_0^T Z(s)^2 ds < \infty \right\}$$

和

$$H = \left\{ \eta \in \mathcal{B}([0, T] \times E_0) : \|\eta\|_{L^2(T, E_0)}^2 := \int_0^T ds \int_{E_0} \eta(s, z)^2 \mu_0(dz) < \infty \right\}.$$

这里如果 $\|Z_1 - Z_2\|_{L^2(T)} = 0$ 和 $\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(T, E_0)} = 0$ , 则分别记为 $Z_1 \stackrel{G}{=} Z_2$ 和 $\eta_1 \stackrel{H}{=} \eta_2$ . 易证 $G$ 是Polish空间, 并且当 $E_0$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的闭子集时,  $H$ 也是Polish空间. 用 $D_{rd}$ 表示 $[0, T]$ 上可以分解成两个左极右连和右极左连函数之和的函数组成的空间,  $D_d$ 表示常值函数零以及具有至多可数多个不连续点并在连续点为零的这样的纯跳函数组成的空间.  $D_d$ 装备了其所有的子集组成的拓扑. 对每个 $f \in D_{rd}$ ,  $f$ 总可以写成 $f(t) = f(t+) - [f(t+) - f(t)]$ , 其中 $t \mapsto f(t+) - f(t) \in D_d$ , 于是可以装备 $D_{rd}$ 的拓扑为 $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ 和 $D_d$ 拓扑之和. 因此 $(D_{rd}, \mathcal{B}(D_{rd}))$ 是标准可测空间(见[3; p.13]).

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 是一个关于流 $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ 和 $\{\mathcal{G}_t : 0 \leq t \leq T\}$ (它们相互独立且满足通常条件)的完备的概率空间. 令 $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ 是一个关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的标准布朗运动,  $\{N_0(dt, du) : 0 \leq t \leq T, u \in E_0\}$ 是一个密度为 $dt\mu_0(du)$ 的关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的泊松随机测度,  $\{W(dt, du) : 0 \leq t \leq T, u \in E\}$ 是一个密度为 $dt\mu(du)$ 的关于 $(\mathcal{G}_t)$ 的高斯白噪声. 对每个 $i = 1, 2$ ,  $\{N_i(dt, du) : 0 \leq t \leq T, u \in E_i\}$ 是一个密度为 $dt\mu_i(du)$ 的关于 $(\mathcal{G}_t)$ 的泊松随机测度. 假定 $\{N_1(dt, du)\}$ 和 $\{N_2(dt, du)\}$ 相互独立. 对每个 $i = 0, 1, 2$ ,  $\{\tilde{N}_i(dt, du)\}$ 表示 $\{N_i(dt, du)\}$ 的补偿测度. 对于 $0 \leq t \leq v \leq T$ , 定义 $\mathcal{G}_v^t = \sigma(\mathcal{F}_v \cup \mathcal{G}_{T-t})$ . 常常称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$ 为一个标准设置.

易证 $\{\mathcal{G}_t^0 : 0 \leq t \leq T\}$ 和 $\{\mathcal{G}_T^{T-t} : 0 \leq t \leq T\}$ 都是满足通常条件的流,  $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$ 是一个关于 $(\mathcal{G}_t^0)$ 的标准布朗运动,  $\{N_0(dt, du) : 0 \leq t \leq T, u \in E_0\}$ 是一个密度为 $dt\mu_0(du)$ 的关于 $(\mathcal{G}_t^0)$ 的泊松随机测度. 定义关于 $(\mathcal{G}_T^{T-t})$ 的密度为 $dt\mu(du)$ 的高斯白噪声 $\{W^T(dt, dx) : 0 \leq t \leq T, u \in E\}$ :

$$W^T([0, t] \times A) = W([T-t, T] \times A), \quad 0 \leq t \leq T, A \in \mathcal{B}(E).$$

对于  $i = 1, 2$ , 定义关于  $(\mathcal{G}_T^{T-t})$  的泊松随机测度  $\{N_i^T(dt, du) : 0 \leq t \leq T, u \in E_i\}$ :

$$N_i^T([0, t] \times B) = N_i([T-t, T] \times B), \quad 0 \leq t \leq T, B \in \mathcal{B}(E_i).$$

实值过程  $\{\xi_s : 0 \leq s \leq T\}$  称为关于  $\sigma$ -代数  $\{\mathcal{G}_v^t : 0 \leq t \leq v \leq T\}$  循序可测的, 如果对于每个  $0 \leq t \leq v \leq T$ ,  $(s, \omega) \mapsto \xi_s(\omega)$  在  $[r, t] \times \Omega$  上的限制关于  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}[r, t] \times \mathcal{G}_v^t$  可测. 两参数的实值过程  $\{\zeta_s(u) : 0 \leq s \leq T, u \in E\}$  称为关于  $\sigma$ -代数  $\{\mathcal{G}_v^t : 0 \leq t \leq v \leq T\}$  循序可测的, 如果对于每个  $0 \leq t \leq v \leq T$ ,  $(s, u, \omega) \mapsto \zeta_s(u, \omega)$  在  $[r, t] \times E \times \Omega$  上的限制关于  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}[r, t] \times \mathcal{B}(E) \times \mathcal{G}_v^t$  可测.

用  $\mathcal{P}$  表示  $\Omega \times [0, T]$  上由所有的左连续且关于  $\sigma$ -代数  $\{\mathcal{G}_t^r : 0 \leq r \leq t \leq T\}$  循序可测的实值函数生成的  $\sigma$ -代数. 过程  $\{\xi_s : 0 \leq s \leq T\}$  称为可料的, 如果映射  $(\omega, s) \mapsto \xi_s(\omega)$  关于  $\mathcal{P}$ -可测. 两参数的过程  $\{\zeta_s(u) : 0 \leq s \leq T, u \in E\}$  称为可料的, 如果  $(\omega, s, x) \mapsto \zeta_s(\omega, x)$  关于  $(\mathcal{P} \times \mathcal{B}(E))$ -可测. 关于点过程和随机测度的积分理论, 读者可参考[3; II.3节]和[4; 7.3节]. 以下介绍两类随机过程空间:

- $\mathcal{M}_T$  表示关于  $(\mathcal{G}_v^t)$  循序可测的过程  $\{\xi_s : 0 \leq s \leq T\}$  组成的空间.
- $\mathcal{M}_T(E)$  表示关于  $(\mathcal{G}_v^t)$  循序可测的两参数过程  $\{\xi_s(u) : 0 \leq s \leq T, u \in E\}$  组成的空间.

这里及以下的关于循序可测过程的随机积分都表示关于其可料版本的. 用  $W^T(\overleftarrow{ds}, du)$ ,  $N_i^T(\overleftarrow{ds}, du)$  及  $\tilde{N}_i^T(\overleftarrow{ds}, du)$  表示相关的倒向随机积分. 例如,

$$\int_{0-}^{T-} \int_{E_0} \gamma(s, u) N_0^T(\overleftarrow{ds}, du) = \int_0^T \int_{E_0} \gamma(T-s, u) N_0(ds, du).$$

对于一个标准的设置  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$ , 考虑以下倒向重随机微分方程

$$\begin{aligned} Y_t = Y_T &+ \int_t^T G(s, Y_s, Z_s, \eta_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s - \int_t^T \int_{E_0} \eta_s(z) \tilde{N}_0(ds, dz) \\ &+ \int_t^T \int_E H(Y_s, u) W(\overleftarrow{ds}, du) + \int_{t-}^{T-} \int_{E_1} H_1(Y_s, u) N_1(\overleftarrow{ds}, du) \\ &+ \int_{t-}^{T-} \int_{E_2} H_2(Y_s, u) \tilde{N}_2(\overleftarrow{ds}, du), \end{aligned} \quad (1)$$

其中这些系数满足以下条件:

- $G : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{B}(E_0) \mapsto \mathbb{R}$  联合可测, 对于每个固定的  $y, z \in \mathbb{R}$  和  $\eta \in \mathcal{B}(E_0)$ ,  $\{G(\omega, s, y, z, \eta) : s \in [0, T]\}$  是一个关于  $(\mathcal{G}_v^t)$  循序可测的过程.
- 过程

$$\{(H(Y_s, z), H_1(Y_s, z_1), H_2(Y_s, z_2)) : 0 \leq s \leq T, z \in E, z_i \in E_i, i = 1, 2\}$$

属于  $\mathcal{M}_T(E) \times \mathcal{M}_T(E_1) \times \mathcal{M}_T(E_2)$ . 以下给出一些定义

**定义 1**  $D_{rd} \times G \times H$ -值的随机变量  $(Y, Z, \eta)$  与标准的设置  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$  ( $(Y, Z, \eta)$  定义在其上) 称为方程(1)的弱解, 如果

(i)  $(Y, Z, \eta)$  属于  $\mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_T(E_0)$ .

(ii)

$$P\left\{\int_0^T \left[|G(s, Y_s, Z_s, \eta_s)| + Z_s^2 + \int_{E_0} \eta_s(z)^2 \mu_0(dz) + \int_E H(Y_s, u)^2 \mu(du) + \int_{E_1} H_1(Y_s, u) \mu_1(du) + \int_{E_2} H_2(Y_s, u)^2 \mu_2(du)\right] ds < \infty\right\} = 1.$$

(iii) 两参数过程  $\{(Y_s, Z_s, \eta_s(z)) : 0 \leq s \leq T, z \in E_0\}$  几乎必然满足(1).

在定义1中为了强调标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$  的作用, 常称  $(Y, Z, \eta)$  是(1)的一个具有标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$  的弱解, 或者简称  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$  是(1)的一个弱解.

**定义 2** 假定  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$  和  $\{(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}), (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}, (\bar{\mathcal{G}}_v^t), \bar{W}, \bar{B}, \bar{N}_0, \bar{N}_1, \bar{N}_2)\}$  是(1)的两个弱解且  $Y_T$  和  $\bar{Y}_T$  的分布相同. 设  $W$  与  $\bar{W}$  以及  $N_i$  与  $\bar{N}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 的密度分别一样. 于是称(1)的解在概率分布意义下唯一 (或者称依分布唯一), 如果  $(Y, Z, \eta)$  和  $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta})$  在空间  $D_{rd} \times G \times H$  上的分布相同.

**定义 3** 称(1)的解具有轨道唯一性, 如果对于任意的定义在同一个标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$  上的两个弱解  $(Y, Z, \eta)$  和  $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta})$ , 当  $Y_T = \bar{Y}_T$  a.s. 时就有

$$P\{\text{对于所有的 } t \in [0, T] \text{ 都有 } Y_t = \bar{Y}_t, Z \stackrel{G}{=} \bar{Z}, \eta \stackrel{H}{=} \bar{\eta}\} = 1.$$

**条件 4** 设存在整数  $d_0, d_2 \geq 1$  使得: (i)  $E_0 = \mathbb{R}^{d_0} \setminus \{0\}$ ,  $\int_{E_0} (z^2 \wedge 1) \mu_0(dz) < \infty$ ; (ii)  $\mu_1(E_1) < \infty$ ; (iii)  $E_2 = \mathbb{R} \times O$  和  $\mu_2(dz, du) = \nu_2(dz) \lambda(du)$ , 其中  $O$  为  $\mathbb{R}^{d_2}$  上的子集且  $\int_{\mathbb{R}} z^2 \nu_2(dz) < \infty$ .

**注记 5** 假定条件4成立. 对于  $t \geq 0$  定义

$$\begin{aligned} \xi_0(t) &= \int_0^t \int_{\{|z|<1\}} z \tilde{N}_0(ds, dz) + \int_0^t \int_{\{|z|>1\}} N_0(ds, dz), \\ \xi_1(t, B) &:= \xi_1((0, t] \times B) := N_1((0, t] \times B), \quad B \in \mathcal{B}(E_1). \end{aligned}$$

有时记  $\xi_1(t, \cdot)$  为  $\xi_1(t)$ . 由[5; 7.2节]和[6; 例3.6], 存在一个  $U$  上的Lévy过程柱  $\{\xi_2(t) : t \geq 0\}$  ( $\pi_2$  为其Lévy测度柱) 定义为

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \phi^{-1}(B) &= \int_O \int_{\mathbb{R}} 1_B(z \phi(u)) \nu_2(dz) \lambda(du), \quad \phi \in U, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ \xi_2(t) f &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_O f(x) \tilde{N}_2(ds, dz, du), \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $f : O \mapsto \mathbb{R}$  具有紧支撑. 很显然, 对每个  $i = 0, 1, 2$ , 都有  $\xi_i \in D_i$ .

**注记 6** 假定  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$  是 (1) 的一个弱解且条件 4 成立.  $\xi_i (i = 0, 1, 2)$  为注记 5 中定义的过程. 设  $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$  与  $(Y, Z, \eta, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2)$  具有相同的有限维分布. 对于  $B_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  定义  $\bar{N}_0((0, t], U) = \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{0 \neq \Delta \bar{\xi}_0 \in U\}}, \bar{N}_0((0, t], du) := \bar{N}_0((0, t], du) - ds\mu_0(du)$ . 对于  $B_1 \in \mathcal{B}(E_1)$  令  $\bar{N}_1((0, t], B) := \bar{\xi}_1((0, t] \times B)$ . 由 Lévy-Itô 分解, 对于每个  $\phi \in U$ , 在  $[0, T] \times \mathbb{R}$  上存在密度为  $ds(\pi_2 \circ \phi^{-1})(du)$  的泊松随机测度  $M_\phi$ . 在  $[0, T] \times \mathbb{R} \times O$  上定义整值的随机测度  $M$ :  $N_2((0, t] \times B_2 \times (a, b]) = M_{1_{(a, b]}}((0, t] \times B_2)$ . 于是  $N_2(ds, dz, du)$  是一个密度为  $ds\nu_2(dz)\lambda(du)$  的泊松随机测度 (见 [7; 定理 II.1.8 和定理 II.4.8]). 令  $\tilde{N}_2(ds, dz, du) = N_2(ds, dz, du) - \nu_2(dz)\lambda(du)$ , 则类似于 [8; 引理 139], 可以说明  $\{(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), \bar{W}, \bar{B}, \bar{N}_0, \bar{N}_1, \bar{N}_2)\}$  也为 (1) 的一个弱解.

在给出方程 (1) 的强解定义之前, 先介绍以下符号.  $\mathbf{P}^B$  表示  $C^0$  上的维纳测度,  $\mathbf{P}^W$  是  $C_2^0$  上由密度为  $dt\mu(dz)$  的高斯白噪声诱导的测度,  $\mathbf{P}^{N_0}$  是  $D_0$  上由 Lévy 测度为  $\mu_0$  的 Lévy 过程诱导的测度,  $\mathbf{P}^{N_1}$  是  $D_1$  上由特征测度为  $\mu_1$  的泊松点过程诱导的测度,  $\mathbf{P}^{N_2}$  是  $D_2$  上由  $U$ -值的 Lévy 过程柱 (Lévy 测度由 (2) 定义) 诱导的测度. 记  $\mathbf{P}^{W, B, N} = \mathbf{P}^W \times \mathbf{P}^B \times \mathbf{P}^{N_0} \times \mathbf{P}^{N_1} \times \mathbf{P}^{N_2}$ ,  $\mathcal{H} = C_2^0 \times C^0 \times D_0 \times D_1 \times D_2$ , 以及  $\mathcal{L} = D_{rd} \times G \times H$ .

函数  $\Phi(x, \omega_1, \dots, \omega_5) : D \times \mathcal{H}$  称为关于  $\hat{\mathcal{E}}(D \times \mathcal{H})$ -可测, 如果对于每个  $D$  上的 Borel 概率测度  $\nu$ , 都存在一个从  $[\mathcal{B}(D \times \mathcal{H})]^{\nu \times \mathbf{P}^{W, B, N}}$  到  $\mathcal{B}(D_{rd}) \times \mathcal{B}(G) \times \mathcal{B}(H)$  上的可测函数  $\tilde{\Phi}_\nu(x, \omega_1, \dots, \omega_5) : D \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{L}$ , 并且对于几乎所有的  $x(\nu)$ , 都有

$$\Phi(x, \omega_1, \dots, \omega_5) = \tilde{\Phi}_\nu(x, \omega_1, \dots, \omega_5), \quad \text{a.a. } (\omega_1, \dots, \omega_5)(\mathbf{P}^{W, B, N}).$$

令  $\nu$  为  $D$ -值随机变量  $\xi$  的分布. 假定  $(W, B, N_0, N_1, N_2)$  与  $\xi$  相互独立,  $\mathcal{L}(K)$  表示  $\sigma$ -代数  $\{K, \emptyset\}$ . 令

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2) &= \tilde{\Phi}_\nu(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2), \\ \mathcal{V}_t &= \mathcal{B}_t(D_{rd}) \times \mathcal{B}_t(G) \times \mathcal{B}_t(H), \quad \mathcal{V}^t = \mathcal{B}^t(D_{rd}) \times \mathcal{B}^t(G) \times \mathcal{B}^t(H), \\ \mathcal{H}_t &= \mathcal{L}(C_2^0) \times \mathcal{B}_t(C^0) \times \mathcal{B}_t(D_0) \times \mathcal{L}(D_1) \times \mathcal{L}(D_2), \\ \mathcal{H}^t &= \mathcal{B}^t(C_2^0) \times \mathcal{L}(C^0) \times \mathcal{L}(D_0) \times \mathcal{B}^t(D_1) \times \mathcal{B}^t(D_2). \end{aligned}$$

于是对于  $0 \leq t \leq v \leq T$ ,

$$\mathcal{H}_v^t := \sigma(\mathcal{H}_v \cup \mathcal{H}^t) = \mathcal{B}^t(C_2^0) \times \mathcal{B}_v(C^0) \times \mathcal{B}_v(D) \times \mathcal{B}^t(D) \times \mathcal{B}^t(D).$$

对于  $0 \leq t \leq v \leq T$ , 令  $\mathcal{V}_v^t = \sigma(\mathcal{V}_v \cup \mathcal{V}^t)$ , 设  $M$  是从  $D \times D_0 \times C^0$  到  $\mathbb{R}$  的可测函数. 现在给出 (1) 强解的定义.

**定义 7** 假定  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$  是 (1) 的一个弱解,  $\xi$  是一个  $D$ -值的关于  $\mathcal{G}_0$  可测的随机变量,  $Y_T = M(\xi, \xi_0, B)$ . 于是称  $(Y, Z, \eta)$  是 (1) 的一个强解, 如果存在一个关于  $\hat{\mathcal{E}}(D \times \mathcal{H})$  可测的函数

$$F(x, \omega_1, \dots, \omega_5) = (F_1, F_2, F_3)(x, \omega_1, \dots, \omega_5) : D \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{L},$$

使得对于每个  $x \in D$  和  $t \in [0, T]$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_5) \mapsto F(x, \omega_1, \dots, \omega_5)$  相对于  $[\mathcal{H}_t^t]^{\mathbf{P}^{W, B, N}}$  和  $\mathcal{V}_t^t$  可测, 并且

$$Y = F_1(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2), \quad Z \stackrel{G}{=} F_2(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2), \quad \eta \stackrel{H}{=} F_3(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2)$$

几乎必然成立.

**注记 8** 称(1)具有唯一的强解, 如果存在函数  $F(x, \omega_1, \dots, \omega_5) = (F_1, F_2, F_3)(x, \omega_1, \dots, \omega_5) : D \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{L}$  具有以上定义中的条件并且:

- (i) 对于任何标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)$  和  $D$ -值的关于  $\mathcal{G}_0$  可测的随机变量  $\xi$ ,  $(Y, Z, \eta) := F(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2)$  是(1)定义在此标准设置上的弱解并且  $Y_T = M(\xi, \xi_0, B)$  a.s.
- (ii) 假定  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$  是(1)的弱解且  $Y_T = M(\xi, \xi_0, B)$ , 其中  $\xi$  是  $D$ -值的关于  $\mathcal{G}_0$  可测的随机变量. 于是

$$Y = F_1(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2), \quad Z \stackrel{G}{=} F_2(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2) \quad \text{和} \quad \eta \stackrel{H}{=} F_3(\xi, W, B, \xi_0, \xi_1, \xi_2)$$

几乎必然成立.

### §3. Yamada-Watanabe定理

类似于[3; 定理IV-1.1]和[8; 定理137], 本节将建立方程(1)的Yamada-Watanabe定理.

**条件 9** 方程(1)中的系数  $G(t, x, y, \eta)$  和  $H_i(x, u)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) 不依赖于  $\omega$ , 并且  $E = [0, \infty)$ ,  $\mu(du) = du$ .

**定理 10** 在条件4和9成立, 且对任意的  $D$  上的Borel概率测度, 有(i) (1)存在弱解  $\{(Y, Z, \eta), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{G}_v^t), W, B, N_0, N_1, N_2)\}$ , 且存在  $D$ -值的关于  $\mathcal{G}_0$  可测的随机变量  $\xi$  使得  $Y_T = M(\xi, \xi_0, B)$  a.s. 且  $\xi$  的分布为  $\nu$ ; (ii) (1)的轨道唯一性成立. 则方程(1)具有唯一的强解.

**证明:** 此证明类似于[3; 定理IV-1.1]和[8; 定理137]中的证明. 令  $x \in D$  固定, 假定  $\{(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}), (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbf{P}}, (\bar{\mathcal{G}}_v^t), \bar{W}, \bar{B}, \bar{N}_0, \bar{N}_1, \bar{N}_2)\}$  和  $\{(\bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Z}}, \bar{\bar{\eta}}), (\bar{\bar{\Omega}}, \bar{\bar{\mathcal{F}}}, \bar{\bar{\mathbf{P}}}, (\bar{\bar{\mathcal{G}}}_v^t), \bar{\bar{W}}, \bar{\bar{B}}, \bar{\bar{N}}_0, \bar{\bar{N}}_1, \bar{\bar{N}}_2)\}$  是(1)的两个弱解并且  $\bar{Y}_T = M(x, \bar{\xi}_0, \bar{B})$  和  $\bar{\bar{Y}}_T = M(x, \bar{\bar{\xi}}_0, \bar{\bar{B}})$  a.s. 还假定  $\{W(ds, du)\}$  和  $\{\bar{W}(ds, du)\}$  的密度为  $ds\mu(du)$ ,  $\{\bar{N}_i(ds, du)\}$  和  $\{\bar{\bar{N}}_i(ds, du)\}$  的密度为  $ds\mu_i(du)$  ( $i = 0, 1, 2$ ). 类似于注记5中  $\xi_i$  的定义, 对于  $i = 0, 1, 2$ , 可以定义  $\bar{\xi}_i$  和  $\bar{\bar{\xi}}_i$ . 令  $\bar{\mathbf{P}}$  和  $\bar{\bar{\mathbf{P}}}$  分别是  $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$  和  $(\bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Z}}, \bar{\bar{\eta}}, \bar{\bar{W}}, \bar{\bar{B}}, \bar{\bar{\xi}}_0, \bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)$  在  $\mathcal{L} \times \mathcal{H}$  上的概率分布. 构造空间  $\Omega = D_{rd}^2 \times G^2 \times H^2 \times \mathcal{H}$ . 于是在概率  $\bar{\mathbf{P}}$  和  $\bar{\bar{\mathbf{P}}}$  之下, 给定任意  $\sigma$ -代数  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  的条件正则分布存在(见[3; p.13]). 定义映射

$$\tilde{\pi} : \mathcal{L} \times \mathcal{H} \ni (\omega_1, \dots, \omega_8) \mapsto (\omega_4, \dots, \omega_8) \in \mathcal{H}.$$

于是边缘分布 $\bar{\pi}(\bar{P})$ 和 $\bar{\pi}(\bar{P})$ 关于 $P^{W,B,N}$ 一致. 令 $Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5)$ 和 $Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_2, d\omega_4, d\omega_6)$ 分别是 $(\omega_1, \omega_3, \omega_5)$ 和 $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$ 在给定 $(\omega_7, \dots, \omega_{11})$ 下的条件正则分布, 即

- (i) 对于固定的 $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \in \mathcal{H}$ ,  $Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5)$ 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathcal{L}))$ 上的概率测度;
- (ii) 固定 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ ,  $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \mapsto Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$ 关于 $[\mathcal{B}(\mathcal{H})]^{P^{W,B,N}}$ 可测;
- (iii) 对于每个 $A_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ 和 $A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ,

$$\bar{P}(A_1 \times A_2) = \int_{A_2} Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_1) P^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}). \quad (3)$$

类似地定义 $Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_2, d\omega_4, d\omega_6)$ . 在空间 $\Omega$ 上定义Borel概率测度 $Q$ :

$$\begin{aligned} & Q(d\omega_1, \dots, d\omega_{11}) \\ &= Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5) Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_2, d\omega_4, d\omega_6) P^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}). \end{aligned}$$

设 $\mathcal{F}$ 是 $\sigma$ -代数 $\mathcal{B}(\Omega)$ 关于 $Q$ 的完备化. 令 $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{B}_{t+\varepsilon} \vee \mathcal{N})$ , 其中

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t(D_{rd})^2 \times \mathcal{B}_t(G)^2 \times \mathcal{B}_t(H)^2 \times \mathcal{Z}(C_2^0) \times \mathcal{B}_t(C^0) \times \mathcal{B}_t(D_0) \times \mathcal{Z}(D_1) \times \mathcal{Z}(D_2)$$

且 $\mathcal{N}$ 是所有的 $Q$ -零集组成的集合. 注意到

$$\mathcal{B}^t(C_2^0) = \sigma(\{\omega(s, t; A) : t \leq s \leq T, A \in \mathcal{B}(E), \mu(A) < \infty\}),$$

其中 $\omega(s, t; A) := \{\omega \in A : \omega(s, u) - \omega(t, u)\}$ . 令 $\mathcal{F}^t = \bigcup_{0 < \varepsilon \leq T-t} (\mathcal{B}^{t+\varepsilon} \vee \mathcal{N})$ , 其中

$$\mathcal{B}^t = \mathcal{B}^t(D_{rd})^2 \times \mathcal{B}^t(G)^2 \times \mathcal{B}^t(H)^2 \times \mathcal{B}^t(C_2^0) \times \mathcal{Z}(C^0) \times \mathcal{Z}(D_0) \times \mathcal{B}^t(D_1) \times \mathcal{B}^t(D_2).$$

对于 $0 \leq t \leq v \leq T$ , 令 $\mathcal{G}_v^t = \sigma(\mathcal{F}_v \cup \mathcal{F}^t)$ .

为了完成证明, 需要先建立以下三个引理.

**引理 11**  $(\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8, \dots, \omega_{11})$ 与 $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ ,  $(\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \dots, \omega_{11})$ 与 $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ 分别具有相同的分布.

**证明:** 令 $A \in \mathcal{H} := \mathcal{B}(\mathcal{L} \times \mathcal{H})$ , 类似于[9]中(5.3)的讨论, 由(3)可以得到

$$\begin{aligned} & Q\{(\omega_1, \dots, \omega_{11}) \in \Omega : (\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8, \dots, \omega_{11}) \in A\} \\ &= \int_A \int_{\mathcal{L}} Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5) Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_2, d\omega_4, d\omega_6) P^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \int_A \left[ \int_{\mathcal{L}} Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_2, d\omega_4, d\omega_6) \right] Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5) P^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \int_A Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(d\omega_1, d\omega_3, d\omega_5) P^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \bar{P}((\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in A). \end{aligned}$$

类似地可以证明 $(\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \dots, \omega_{11})$ 和 $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ 具有同样的分布.  $\square$

**引理 12** 对于  $A \in \mathcal{V}_t^t$ , 映射  $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \mapsto Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$  和  $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \mapsto Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$  关于  $[\mathcal{H}_t^t]^{\mathbf{P}^{W,B,N}}$  可测.

**证明:** 对于固定的  $0 \leq t \leq T$  和  $A \in \mathcal{V}_t^t$ , 存在条件正则概率  $Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$  使得  $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \in \mathcal{H} \mapsto Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$  关于  $[\mathcal{H}_t^t]^{\mathbf{P}^{W,B,N}}$  可测并且对于每个  $C \in \mathcal{H}_t^t$ , 都有

$$\bar{\mathbf{P}}(A \times C) = \int_C Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A) \mathbf{P}^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}). \quad (4)$$

如果对于每个  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , 都可以证明(4)成立, 于是由(3),  $Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A) = Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A)$  a.a.  $(\omega_7, \dots, \omega_{11}) (\mathbf{P}^{W,B,N})$ , 并且此引理成立. 对于  $\omega \in D_i$ , 定义  $\theta_t(w)(s) = w((t+s) \wedge T) - w(t)$ , 对于  $w \in C_2^0$ , 定义  $\theta'_t(w)(s, u) = w((t+s) \wedge T, u) - w(t, u)$  和  $\rho'_t(w)(\omega)(s, u) = \omega(t \wedge s, u)$ . 令

$$C = \{(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \in \mathcal{H} : (\theta'_t(\omega_7), \rho_t(\omega_8), \rho_t(\omega_9), \theta_t(\omega_{10}), \theta_t(\omega_{11})) \in A_1, \\ (\rho'_t(\omega_7), \theta_t(\omega_8), \theta_t(\omega_9), \rho_t(\omega_{10}), \rho_t(\omega_{11})) \in A_2\},$$

其中  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . 注意到当  $\omega \in C^0 \times D_0 \times D_1 \times D_2$ ,  $\theta_t \omega$  与  $\mathcal{B}_t(C^0 \times D_0 \times D_1 \times D_2)$  关于  $\mathbf{P}^B \times \mathbf{P}^{N_0} \times \mathbf{P}^{N_1} \times \mathbf{P}^{N_2}$  独立. 于是由(4)知,

$$\begin{aligned} & \int_C Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A) \mathbf{P}^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \int_{(\theta'_t(\omega_7), \rho_t(\omega_8), \rho_t(\omega_9), \theta_t(\omega_{10}), \theta_t(\omega_{11})) \in A_1} Q_t^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A) \mathbf{P}^{W,B,N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ & \quad \cdot \mathbf{P}^{W,B,N}(\rho'_t(\omega_7), \theta_t(\omega_8), \theta_t(\omega_9), \rho_t(\omega_{10}), \rho_t(\omega_{11})) \in A_2) \\ &= \bar{\mathbf{P}}(A \times \{(\theta'_t(\omega_7), \rho_t(\omega_8), \rho_t(\omega_9), \theta_t(\omega_{10}), \theta_t(\omega_{11})) \in A_1\}) \\ & \quad \cdot \mathbf{P}^{W,B,N}((\rho'_t(\omega_7), \theta_t(\omega_8), \theta_t(\omega_9), \rho_t(\omega_{10}), \rho_t(\omega_{11})) \in A_2) \\ &= \bar{\mathbf{P}}(A \times \{(\theta'_t(\omega_7), \rho_t(\omega_8), \rho_t(\omega_9), \theta_t(\omega_{10}), \theta_t(\omega_{11})) \in A_1\}) \\ & \quad \cdot \bar{\mathbf{P}}(\mathcal{L} \times \{(\rho'_t(\omega_7), \theta_t(\omega_8), \theta_t(\omega_9), \rho_t(\omega_{10}), \rho_t(\omega_{11})) \in A_2\}) \\ &= \bar{\mathbf{P}}((\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}) \in A, (\theta'_t(\bar{W}), \rho_t(\bar{B}), \rho_t(\bar{\xi}_0), \theta_t(\bar{\xi}_1), \theta_t(\bar{\xi}_2)) \in A_1) \\ & \quad \cdot \bar{\mathbf{P}}((\rho'_t(\bar{W}), \theta_t(\bar{B}), \theta_t(\bar{\xi}_0), \rho_t(\bar{\xi}_1), \rho_t(\bar{\xi}_2)) \in A_2) \\ &= \bar{\mathbf{P}}((\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}) \in A, (\theta'_t(\bar{W}), \rho_t(\bar{B}), \rho_t(\bar{\xi}_0), \theta_t(\bar{\xi}_1), \theta_t(\bar{\xi}_2)) \in A_1, \\ & \quad (\rho'_t(\bar{W}), \theta_t(\bar{B}), \theta_t(\bar{\xi}_0), \rho_t(\bar{\xi}_1), \rho_t(\bar{\xi}_2)) \in A_2) \\ &= \bar{\mathbf{P}}((\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}) \in A, (\bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \in C) = \bar{\mathbf{P}}(A \times C), \end{aligned}$$

这里用到了  $\{(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}) \in A, (\theta'_t(\bar{W}), \rho_t(\bar{B}), \rho_t(\bar{\xi}_0), \theta_t(\bar{\xi}_1), \theta_t(\bar{\xi}_2)) \in A_1\} \in \mathcal{G}_t^t$ , 以及  $(\rho'_t(\bar{W}), \theta_t(\bar{B}), \theta_t(\bar{\xi}_0), \rho_t(\bar{\xi}_1), \rho_t(\bar{\xi}_2))$  与  $\mathcal{G}_t^t$  相互独立.  $\square$



**引理 13** 对于  $t \geq 0$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  以及  $O$  的紧子集  $C$ , 定义

$$N_i((0, t] \times B \times C) = \sum_{0 < s \leq t} 1_{\{0 \neq \Delta\omega_{9+i}(t)1_C \in B\}}$$

和  $\tilde{N}_i(ds, dz, du) = N_i(ds, dz, du) - ds\nu_i(dz)du$ . 于是  $(\Omega, \mathcal{F}, Q, (\mathcal{G}_v^t), \omega_7, \omega_8, N_0, N_1, N_2)$  是标准设置.

**证明:** 令  $E^Q$  表示关于概率  $Q$  的期望,  $(A_1, \dots, A_{11}) \in \mathcal{B}_s$ ,  $(B_1, \dots, B_{11}) \in \mathcal{B}^t$ . 定义互不相交的集合  $E_1^k, \dots, E_m^k \in \mathcal{B}(E_k)$ , 且对于  $i = 1, 2, \dots, m$  和  $k = 0, 1, 2$  都有  $\mu_k(E_i^k) < \infty$ . 于是由引理 12, 对于每个  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,  $m \geq 1$  和  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & E^Q\{\exp[i\lambda(\omega_8(t) - \omega_8(s))]1_{A_1 \times \dots \times A_{11}}\} \\ &= \int_{A_7 \times \dots \times A_{11}} \exp[i\lambda(\omega_8(t) - \omega_8(s))]Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_1 \times A_3 \times A_5) \\ & \quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_2 \times A_4 \times A_6)P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \exp\left\{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right\} \int_{A_7 \times \dots \times A_{11}} Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_1 \times A_3 \times A_5) \\ & \quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_2 \times A_4 \times A_6)P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \exp\left\{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right\} Q(A_1 \times \dots \times A_{11}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & E^Q\left\{\exp\left[-\sum_{i=1}^m \lambda_i N_0((s, t], E_i^0)\right]1_{A_1 \times \dots \times A_{11}}\right\} \\ &= \int_{A_7 \times \dots \times A_{11}} \exp\left[-\sum_{i=1}^m \lambda_i N_0((s, t], E_i^0)\right]Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_1 \times A_3 \times A_5) \\ & \quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_2 \times A_4 \times A_6)P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \exp\left\{(t-s) \sum_{i=1}^m (e^{-\lambda_i} - 1)\mu_0(E_i^0)\right\} \int_{A_7 \times A_8 \times A_9} Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_1 \times A_3 \times A_5) \\ & \quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(A_2 \times A_4 \times A_6)P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\ &= \exp\left\{(t-s) \sum_{i=1}^m (e^{-\lambda_i} - 1)\mu_0(E_i^0)\right\} Q(A_1 \times \dots \times A_{11}). \end{aligned}$$

类似地, 对每个满足  $\mu(B) < \infty$  的  $B \in \mathcal{B}(E)$ , 都有

$$\begin{aligned} & E^Q\{\exp[i\lambda\omega_7([s, t] \times B)]1_{B_1 \times \dots \times B_{11}}\} \\ &= \int_{B_7 \times \dots \times B_{11}} \exp[i\lambda\omega_7([s, t] \times B)]Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(B_1 \times B_3 \times B_5) \\ & \quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(B_2 \times B_4 \times B_6)P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2(t-s)\mu(B)}{2} \right\} \int_{B_7 \times \cdots \times B_{11}} Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(B_1 \times B_3 \times B_5) \\
&\quad \cdot Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})}(B_2 \times B_4 \times B_6) P^{W, B, N}(d\omega_7, \dots, d\omega_{11}) \\
&= \exp \left\{ -\frac{\lambda^2(t-s)\mu(B)}{2} \right\} Q(B_1 \times \cdots \times B_{11})
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&E^Q \left\{ \exp \left[ -\sum_{i=1}^m \lambda_i N_k((s, t], E_i^k) \right] 1_{B_1 \times \cdots \times B_{11}} \right\} \\
&= \exp \left\{ (t-s) \sum_{i=1}^m (e^{-\lambda_i} - 1) \mu_k(E_i^k) \right\} Q(B_1 \times \cdots \times B_{11}), \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

于是给出了引理的结论.  $\square$

现在回到定理10的证明, 由引理11和引理13, 类似于[8; 引理139]中的讨论, 可以说明  $(\omega_1, \omega_3, \omega_5)$  和  $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$  是在标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, Q, (\mathcal{G}_v^t), \omega_7, \omega_8, N_0, N_1, N_2)$  上的两个解并且  $\omega_1(T) = \omega_2(T) = M(x, \xi_0, \omega_8)$ . 因此轨道唯一性蕴含着  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_3 \stackrel{G}{=} \omega_4$  和  $\omega_5 \stackrel{H}{=} \omega_6$   $Q$ -a.s. 这意味着

$$Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})} \times Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})} \{ \omega_1 = \omega_2, \omega_3 \stackrel{G}{=} \omega_4 \text{ 和 } \omega_5 \stackrel{H}{=} \omega_6 \} = 1, \quad P^{W, B, N}\text{-a.s.}$$

于是易证存在函数

$$(\omega_7, \dots, \omega_{11}) \in \mathcal{H} \mapsto F(x, \omega_7, \dots, \omega_{11}) = (F_1, F_2, F_3)(x, \omega_7, \dots, \omega_{11}) \in \mathcal{L},$$

使得

$$Q_1^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})} = Q_2^{(\omega_7, \dots, \omega_{11})} = \delta_{\{F(x, \omega_7, \dots, \omega_{11})\}}, \quad P^{W, B, N}\text{-a.s.}$$

由引理12知对于每个  $0 \leq t \leq T$ , 此函数关于  $[\mathcal{H}_t^t]^{P^{W, B, N}}$  和  $\mathcal{V}_t^t$  可测. 显然,  $F(x, \omega_7, \dots, \omega_{11})$  关于  $P^{W, B, N}$ -零测度唯一确定.

令  $\nu$  是  $D$  上的任意 Borel 概率测度,  $\xi$  的分布是  $\nu$ .  $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{\eta})$  是方程(1)在标准设置  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}, (\hat{\mathcal{G}}_v^t), \hat{W}, \hat{B}, \hat{N}_0, \hat{N}_1, \hat{N}_2)$  弱解并且  $\hat{Y}_T = M(\xi, \hat{\xi}_0, \hat{B})$  a.s., 类似于注记8中  $\xi_i$  的定义, 可以定义  $\hat{\xi}_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ). 于是  $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{\eta})$  也是在标准设置  $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{P}(\cdot/\mathcal{G}_0), (\mathcal{G}_v^t), \hat{W}, \hat{B}, \hat{N}_0, \hat{N}_1, \hat{N}_2)$  上的弱解, 并且  $\hat{P}\{F(\xi, \hat{W}, \hat{B}, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = (\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{\eta}) | \mathcal{G}_0\} = 1$ . 因此  $F(x, \omega_1, \dots, \omega_5)$  关于  $\hat{\mathcal{E}}(D \times \mathcal{H})$  可测并且

$$\hat{Y} = F_1(\xi, \hat{W}, \hat{B}, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2), \quad \hat{Z} \stackrel{G}{=} F_2(\xi, \hat{W}, \hat{B}, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2), \quad \hat{\eta} \stackrel{H}{=} F_3(\xi, \hat{W}, \hat{B}, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) \quad \text{a.s.}$$

这就证明了(1)存在唯一的强解.  $\square$

**注记 14** 如果方程(1)的轨道唯一性成立并且其终端值为定义7中的形式, 则定理10成立.

**推论 15** 如果条件4和9都成立且方程(1)的解具有轨道唯一性, 则其解依分布唯一.

**证明:** 由引理11和轨道唯一性假设,  $\bar{\bar{P}} = \bar{\bar{P}}$ , 这蕴含着 $(\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{\eta}, \bar{W}, \bar{B}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ 和 $(\bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Z}}, \bar{\bar{\eta}}, \bar{\bar{W}}, \bar{\bar{B}}, \bar{\bar{\xi}}_0, \bar{\bar{\xi}}_1, \bar{\bar{\xi}}_2)$ 的分布一致, 于是完成了此推论的证明.  $\square$

## 参 考 文 献

- [1] Xiong J. Super-Brownian motion as the unique strong solution to an SPDE [J]. *Ann. Probab.*, 2013, **41(2)**: 1030–1054.
- [2] He H, Li Z H, Yang X. Stochastic equations of super-Lévy processes with general branching mechanism [J]. *Stochastic Process. Appl.*, 2014, **124(4)**: 1519–1565.
- [3] Ikeda N, Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* [M]. 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1989.
- [4] Li Z H. *Measure-Valued Branching Markov Processes* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- [5] Peszat S, Zabczyk J. *Stochastic Partial Differential Equations with Lévy Noise* [M]. Cambridge, Eng.: Cambridge University Press, 2007.
- [6] Applebaum D, Riedle M. Cylindrical Lévy processes in Banach spaces [J]. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2010, **101(3)**: 697–726.
- [7] Jacod J, Shiryaev A N. *Limit Theorems for Stochastic Processes* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [8] Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications* [M]. New York: Springer, 2005.
- [9] Antonelli F, Ma J. Weak solutions of forward-backward SDE's [J]. *Stochastic Anal. Appl.*, 2003, **21(3)**: 493–514.
- [10] Pardoux É, Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs [J]. *Probab. Theory Related Fields*, 1994, **98(2)**: 209–227.

## Backward Doubly Stochastic Differential Equations Driven by White Noises and Poisson Random Measures

YANG Xu

(School of Mathematics and Information Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan,  
750021, China)

**Abstract:** A class of backward doubly stochastic differential equations driven by white noises and Poisson random measures are studied in this paper. The definitions of solutions and Yamada-Watanabe type theorem to this equation are established.

**Keywords:** backward doubly stochastic differential equations; white noises; Poisson random measures; Yamada-Watanabe theorem; pathwise uniqueness

**2010 Mathematics Subject Classification:** 60H20; 60G51