应用概率统计 第 33 卷
第 1 期 2017 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2017, Vol. 33, No. 1, pp. 58-66
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2017.01.005

非平稳ND序列部分和的精确渐近性 *

李春红[1,2]　　刘三星[1]

([1]嘉应学院土木工程学院, 梅州, 514015; [2]广州大学数学与信息科学学院, 广州, 510006)

摘　要: 利用中心极限定理和概率不等式, 本文建立了非平稳ND序列部分和的精确渐近性, 得到了与非平稳NA序列情形下相同的结果.

关键词: 非平稳; ND序列; NA序列; 精确渐近性

中图分类号: O211.4

英文引用格式: Li C H, Liu S X. Precise asymptotics for partial sums of nonstationary ND [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(1): 58–66. (in Chinese)

§1. 引　　言

ND的概念最早由Bozorgnia等在文献[1]给出, ND序列是严格弱于NA序列的. 这些概念在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析等中均有广泛的应用[2–4], 因而ND随机变量序列的概念引起了学者的广泛关注. 一系列代表性的结果如对数律、指数不等式及加权和的完全收敛性等已经被建立起来[5–7]. 因此将NA序列的一些极限性质(比如精确渐近性)进一步推广到ND序列上是十分必要的.

定义 1 (见文献[8]) 称随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$是NA (negatively associated)的, 若对$\{1, 2, \ldots, n\}$的任意两个非空不交子集A_1和A_2, 均有

$$\mathsf{Cov}\left(f_1(X_i; i \in A_1), f_2(X_j; j \in A_2)\right) \leqslant 0,$$

其中f_1和f_2是使上式有意义且对各变量不降的函数. 称随机变量列$\{X_n; n \geqslant 2\}$是NA的, 如果对任意的$n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是NA的.

定义 2 (见文献[1]) 称随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$是ND (negatively dependent)的, 若对所有的实数$x_1, x_2, \ldots, x_n$, 有

$$\mathsf{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}(X_j \leqslant x_j)\Big] \leqslant \prod_{j=1}^{n}\mathsf{P}[X_j \leqslant x_j], \tag{1}$$

$$\mathsf{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n}(X_j > x_j)\Big] \leqslant \prod_{j=1}^{n}\mathsf{P}[X_j > x_j]. \tag{2}$$

*嘉应学院博士科研启动基金和嘉应学院高等教育教学改革项目(批准号: JYJG20150222)资助.

本文2015年5月11日收到, 2015年12月21日收到修改稿.

定义 3 称随机变量序列$\{X_j; j\in\mathbb{N}\}$是强平稳的, 如果对任何自然数m, n及$1\leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_n$, 都有$(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_n}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_{j_{1+m}}, X_{j_{2+m}}, \ldots, X_{j_{n+m}})$, 其中$\stackrel{\mathrm{d}}{=}$表示同分布.

当$\varepsilon\to 0$时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon H(n))$的精确收敛速度有多大, 关于这方面的研究通常被称作部分和的精确渐近性. 关于精确渐近性的研究, 以往的结果都附加有强平稳条件的限制, 赵月旭[9]在解除强平稳条件的束缚下, 研究了非平稳NA序列部分和的精确渐近性, 给出了非平稳NA序列部分和收敛速度的一个结果:

定理 4 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为非平稳同分布NA序列, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}|X_1|^q < \infty$对于某一个$q\geqslant 2$, 且

(i) 存在$\sigma > 0$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n = \sigma^2$;

(ii) 存在正整数列$n_k\uparrow\infty$ $(k\to\infty)$, 对某β $(0<\beta\leqslant 1)$, 有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(m_k/n_k)^{1+\beta/2} < \infty$, 并使得$\lim\limits_{k\to\infty}\mathsf{E}S^2_{n_{k-1},m_k}/m_k = \sigma^2 > 0$, 其中$m_k = n_k - n_{k-1}$;

(iii) $\varphi(x)\uparrow\infty$ $(x\to\infty)$具有一阶非负单调导函数;

(iv) 存在常数$\delta > 0$, 使得$\limsup\limits_{x\to\infty}\varphi(x)/x^{\delta} < \infty$,

则对任意的$v\geqslant 1/q + (2-q)/(2q\delta) > 0$, 都有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^{v}(n)) = \mathsf{E}|N|^{1/v}$$

成立, 或等价的

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}\,\sigma\varphi^{v}(n)) = \mathsf{E}|N|^{1/v}$$

成立, 其中随机变量N服从正态分布$\mathrm{N}(0,1)$.

本文在赵月旭研究的基础上, 建立了ND序列部分和的精确渐近性, 得到了与NA情形下相同的结果.

§2. 主要结果

定理 5 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为非平稳同分布ND序列, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}|X_1|^q < \infty$对于某一个$q\geqslant 2$, 且

(i) 存在$\sigma > 0$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n = \sigma^2$;

(ii) 存在单调上升数列$\{n_k\}$, 其中$m_k = n_k - n_{k-1}$, $k\geqslant 1$, 且存在$M > 0$ $(M\in R)$满足$\sup m_k\leqslant M < \infty$;

(iii) $\varphi(x)\uparrow\infty$ $(x\to\infty)$具有一阶非负单调导函数;

(iv) 存在常数$\delta > (q-2)/2$, 使得$\limsup\limits_{x\to\infty}\varphi(x)/x^{\delta} < \infty$,

则对任意的$v \geqslant 1/q + (2-q)/(2q\delta)$, 都有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))=\mathsf{E}|N|^{1/v}$$

成立, 或等价的

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}\,\sigma\varphi^v(n))=\mathsf{E}|N|^{1/v}.$$

定理 6 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为非平稳同分布ND序列, $\mathsf{E}X_1=0$, 且

(i) 存在$\sigma>0$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n=\sigma^2$;

(ii) 存在单调上升数列$\{n_k\}$, 其中$m_k=n_k-n_{k-1}$, $k\geqslant 1$, 且存在$M>0$ $(M\in R)$满足$\sup m_k\leqslant M<\infty$;

(iii) $\varphi(x)\uparrow\infty$ $(x\to\infty)$具有一阶非负单调导函数, 且$x\varphi'(x)$为慢变函数;

(iv) $\mathsf{E}f(g^{-1}(|X_1|))^2<\infty$,

则对任意的$v>0$, $\delta>0$, 都有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))=\mathsf{E}|N|^{1/v},$$

或等价的

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}\,\sigma\varphi^v(n))=\mathsf{E}|N|^{1/v},$$

其中$f(x)=x^2\varphi'(x)$, $g(x)=x^{1/2}\varphi^v(x)$.

注记 7 慢变函数$l(x)$有如下特性[10]

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}l(tx)/l(x)=1$, $t>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}l(x+u)/l(x)=1$, $\forall\, u>0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\delta}l(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-\delta}l(x)=0$.

注记 8 对于$\{X_n, n\geqslant 1\}$是ND非平稳不同分布序列, 只需引入一个有界限制: 存在一随机变量X和一常数$c>0$, 使得对所有的$x>0$, $k\geqslant 1$有$\mathsf{P}(|X_k|>x)\leqslant c\,\mathsf{P}(|X|>x)$, $\mathsf{E}|X|^2<\infty$, 即可推出与同分布一样的结果.

2.1 引理及其证明

为了证明本文的主要结果, 需先给出下列引理.

引理 9 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是ND随机序列, 有$\mathsf{E}X_j^2<\infty$, 则对任何实数λ_j, $j=1,2,\ldots,n$, 则必有

$$\Big|\mathsf{E}\exp\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_j\Big)-\prod_{j=1}^{n}\mathsf{E}\exp(\lambda_jX_j)\Big|\leqslant -2\sum_{1\leqslant l<j\leqslant n}|\lambda_l\lambda_j|\mathsf{Cov}\,(X_l,X_j).$$

证明: 当$n=2$时

$$
\begin{aligned}
&|\mathsf{E}\exp(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)-\mathsf{E}\exp(\lambda_1X_2)\mathsf{E}\exp(\lambda_2X_2)|\\
=&|\lambda_1\lambda_2\mathsf{Cov}\,(X_1,X_2)|\leqslant -2|\lambda_1\lambda_2|\mathsf{Cov}\,(X_1,X_2).
\end{aligned}
$$

假设当$m\leqslant M$时不等式成立, 那么可以证明当$m=M+1$时不等式仍然成立. 证明如下:

设$\varepsilon=\pm1$, $\delta=\pm1$, $m'\in\{1,2,\ldots,M\}$. 当$m'+1\leqslant l\leqslant M+1$时, $\delta\lambda_l\geqslant 0$, 令$X=\sum\limits_{l=1}^{m'}\varepsilon\lambda_lX_l$, $Y=\sum\limits_{l=m'+1}^{M+1}\delta\lambda_lX_l$, 则有$\sum\limits_{l=1}^{m}\lambda_lX_l=\varepsilon X+\delta Y$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathsf{E}\exp\Big(\sum_{l=1}^{m}\lambda_lX_l\Big)-\prod_{l=1}^{m}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)\Big|\\
\leqslant&|\mathsf{E}\exp(\varepsilon X+\delta Y)-\mathsf{E}\exp(\varepsilon X)\mathsf{E}\exp(\delta Y)|\\
&+\Big|\mathsf{E}\exp(\varepsilon X)\mathsf{E}\exp(\delta Y)-\mathsf{E}\exp(\varepsilon X)\prod_{l=m'+1}^{l=M+1}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)\Big|\\
&+\Big|\mathsf{E}\exp(\varepsilon X)\prod_{l=m'+1}^{l=M+1}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)-\prod_{l=1}^{l=m'}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)\prod_{l=m'+1}^{l=M+1}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)\Big|. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

因为$|\mathsf{E}\exp(\varepsilon X)|\leqslant 1$, $\Big|\prod\limits_{l=m'+1}^{l=M+1}\mathsf{E}\exp(\lambda_lX_l)\Big|\leqslant 1$, 所以

$$
\begin{aligned}
(3)\leqslant&-2\mathsf{Cov}\Big(\sum_{l=1}^{m}\varepsilon\lambda_lX_l,\sum_{m'+1}^{M+1}\delta\lambda_lX_l\Big)-2\sum_{\substack{l\neq n\\ m'+1}}^{M+1}|\lambda_l\lambda_n|\mathsf{Cov}\,(X_l,X_n)-2\sum_{\substack{l\neq n\\ l=1}}^{m'}|\lambda_l\lambda_n|\mathsf{Cov}\,(X_l,X_n)\\
\leqslant&-2\sum_{1\leqslant l<n\leqslant m}|\lambda_l\lambda_n|\mathsf{Cov}\,(X_l,X_n). \qquad \square
\end{aligned}
$$

引理 10　设$\{X_i;i\in\mathbb{N}\}$是同分布ND序列, 满足$\mathsf{E}X_1=0$, $0<\mathsf{E}X_1^2<\infty$, 且

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf(\mathsf{E}S_n^2/n)=\sigma^2>0$;

(ii) 存在严格上升的自然数列, 对于某$0<\alpha\leqslant 1$, 满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(m_k/n_k)^{1+\alpha/2}<\infty$并使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}\mathsf{E}S^2_{n_{k-1},m_k}=\sigma^2,$$

则

$$\frac{S_n}{\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}}\xrightarrow{\rm d}\mathrm{N}(0,1),$$

其中$n_0=0$, $1<n_1<n_2<\cdots$, $S_{m,n}=\sum\limits_{j=1}^{n}X_{j+m}$, $S_n=S_{0,n}$.

证明: 此引理的证明与文献[11]中定理2.2的证明过程类似, 不同之处在于需用本文的引理9置换证明文献[11]中的引理3.2. 限于篇幅原因这里不再给出其详细过程. □

引理 11 (见文献[12]) 设$\{X_n; n\geqslant 1\}$是ND序列, 满足$\mathsf{E}X_n=0$, $\mathsf{E}|X_n|^p<\infty$, $p\geqslant 2$, $B_n=\sum\limits_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2$, 则

$$\mathsf{P}(|S_n|\geqslant x)\leqslant \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(|X_i|\geqslant x/t)+2\mathrm{e}^t\Big(1+\frac{x^2}{tB_n}\Big)^{-t},\qquad \forall\, x,t>0,$$

$$\mathsf{E}|S_n|^p\leqslant c_p\Big\{\sum_{i=1}^n \mathsf{E}|X_i|^p+\Big(\sum_{i=1}^n \mathsf{E}X_i^2\Big)^{p/2}\Big\},$$

其中$c_p>0$只依赖于p.

引理 12 (见文献[13]) 设$\{a_n; n\geqslant 1\}$是一有界数列且$a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, 若正值双下标组列$\{w_{ni};\, 1\leqslant i\leqslant n,\, n\geqslant 1\}$满足$\sum\limits_{i=1}^n w_{ni}=\lambda$ $(0<\lambda<\infty,\, n\geqslant 1)$, 且所有的$1\leqslant i\leqslant n$, $w_{ni}\downarrow 0$ $(n\to\infty)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n w_{ni}a_i=0.$$

引理 13 设随机变量N服从标准正态分布$\mathrm{N}(0,1)$, $\forall\, x\geqslant 0$, 令$\psi(x)=\mathsf{P}(|N|>x)=1-\Phi(x)+\Phi(-x)$, 其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数, 对$\varphi(x)\uparrow\infty$ $(x\to\infty)$, 具有一阶非负单调导函数$\varphi(x)$和任意的$0<\alpha<\infty$, 有

(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\displaystyle\int_\alpha^\infty \varphi'(x)\psi(\varepsilon\varphi^v(x))\mathrm{d}x=\mathsf{E}|N|^{1/v}$;

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\sum\limits_{n=1}^\infty \varphi'(n)\psi(\varepsilon\varphi^v(n))=\mathsf{E}|N|^{1/v}$.

证明: 对于(i), 首先

$$\mathsf{E}|X|^p=\int_0^\infty \mathsf{P}(|X|^p\geqslant x)\mathrm{d}x=p\int_0^\infty x^{p-1}\mathsf{P}(|X|\geqslant x)\mathrm{d}x,$$

又$\forall\,\alpha\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/v}\int_\alpha^\infty \varphi'(x)\psi(\varepsilon\varphi^v(x))\mathrm{d}x&=\frac{1}{v}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\varphi^v(\alpha)}^\infty \mathsf{P}(|N|>y)y^{1/v-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{v}\int_0^\infty y^{1/v-1}\psi(y)\mathrm{d}y=\mathsf{E}|N|^{1/v}.\end{aligned}$$

对于(ii), 由(i)中的函数变换, 我们只要证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=\varepsilon\varphi^v(1)}^\infty n^{1/v-1}\psi(n)=\frac{1}{v}\int_0^\infty y^{1/v-1}\psi(y)\mathrm{d}y=\mathsf{E}|N|^{1/v}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^\infty f(a_n)$和$\int_\alpha^\infty f(x)\mathrm{d}x$同敛散, 当$y^{1/v-1}\uparrow$时, 我们有

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y^{1/v-1}}{(y-1)^{1/v-1}}=1.$$

所以$\forall\,\delta>0$, $\exists\,\varepsilon\varphi^v(M)>0$, 当$y>\varepsilon\varphi^v(M)$时, 有$y^{1/v-1}\leqslant(1+\delta)(y-1)^{1/v-1}$, 由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=\varepsilon\varphi^v(M)+1}^{\infty}\int_n^{\infty}y^{1/v-1}\psi(y)\mathrm{d}y&\leqslant\sum_{n=\varepsilon\varphi^v(M)+1}^{\infty}(n+1)^{1/v-1}\psi(n)\\&\leqslant(1+\delta)\sum_{n=\varepsilon\varphi^v(M)+1}^{\infty}n^{1/v-1}\psi(n)\\&\leqslant(1+\delta)\sum_{n=\varepsilon\varphi^v(M)}^{\infty}\int_n^{n+1}y^{1/v-1}\psi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

先令$\delta\to0$, 然后让$\varepsilon\to0$, 结论(ii)得证. □

2.2 定理的证明

定理5的证明: 对于足够小的$\theta>0$, 可将$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))$分为两部分:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))\\&=\Big(\sum_{\varepsilon^{1/2v}\varphi^{1/2}(n)\leqslant1/\theta}+\sum_{\varepsilon^{1/2v}\varphi^{1/2}(n)>1/\theta}\Big)\varphi'(n)\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))\\&\mathrel{\widehat=}I_1+I_2.\end{aligned}$$

(i) 对于I_1, 令$A\mathrel{\widehat=}[1,\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v})]$, $\Delta_n\mathrel{\widehat=}\sup\limits_x|\mathsf{P}(|S_n|/\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\geqslant x)-\psi(x)|$, 同分布的ND随机变量序列在引理10的条件(i)和(ii)下满足$S_n/\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathrm{N}(0,1)$, 由于$\psi(x)$是$R$上的连续函数, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=0$, 同时

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{1/v}\sum_{n\in A}\varphi'(n)|\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))-\psi(\varepsilon\varphi^v(n))|\\&\leqslant\varepsilon^{1/v}\sum_{n\in A}\varphi'(n)\Delta_n\\&\leqslant C\varepsilon^{1/v}\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v}))\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v}))}\sum_{n\in A}\varphi'(n)\Delta_n\\&\leqslant C\theta^{-2}\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v}))}\sum_{n\in A}\varphi'(n)\Delta_n,\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v}))}\sum_{n\in A}\varphi'(n)&=\Big[\int_1^{\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v})}\varphi'(x)\mathrm{d}x\Big]/(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v})\\&\leqslant c(1-\varphi(1)\theta^2\varepsilon^{1/v})\to c\qquad(\varepsilon\to0).\end{aligned}$$

因此, 由引理12和$\Delta_n \to 0$ $(n\to\infty)$得

$$\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{1/v}))}\sum_{n\in A}\varphi'(n)\Delta_n \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0).$$

(ii) 对于I_2, 令$x=\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n)$, m是待定的常数, 由引理11得

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(|S_n|\geqslant \varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))\\
&\leqslant n\,\mathsf{P}(|X_1|\geqslant \varepsilon\sigma\sqrt{n}\varphi^v(n)/m)+2\mathrm{e}^m\Big(1+\frac{(\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))^2}{nm\mathsf{E}X_1^2}\Big)^{-m}\\
&\mathrel{\widehat{=}} I_{11}+I_{22}.
\end{aligned}\tag{4}$$

由于$\varepsilon^{1/2v}\varphi^{1/2}(n)>1/\theta$, 易得$n>\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v})$. 记$M=[\varphi^{-1}(\theta^{-2}\varepsilon^{-1/v})]$, 其中$[\cdot]$表示取整. 所以

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)I_{11}\\
&=\varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}n\varphi'(n)\mathsf{P}(|X_1|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}\,\sigma\varphi^v(n)/m)\\
&=\varepsilon^{1/v}\sum_{j>M(\theta,\varepsilon,v)}\sum_{M(\theta,\varepsilon,v)<n<j}n\varphi'(n)\mathsf{P}(\varepsilon\sqrt{j}\,\sigma\varphi^v(j)<m|X_1|\leqslant\varepsilon\sqrt{j+1}\sigma\varphi^v(j+1)).
\end{aligned}\tag{5}$$

又

$$\begin{aligned}
\sum_{M(\theta,\varepsilon,v)<n<j}n\varphi'(n)&=\int_{M(\theta,\varepsilon,v)}^{j}x\varphi'(x)\mathrm{d}x\\
&=j\varphi(j)-M(\theta,\varepsilon,v)\varphi(M(\theta,\varepsilon,v))-\int_{M(\theta,\varepsilon,v)}^{j}\varphi(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant j\varphi(j),
\end{aligned}$$

则

$$(5)\leqslant C\varepsilon^{1/v}\sum_{j>M(\theta,\varepsilon,v)}j\varphi(j)\mathsf{P}(\varepsilon\sqrt{j}\sigma\varphi^v(j)<m|X_1|\leqslant\varepsilon\sqrt{j+1}\,\sigma\varphi^v(j+1)).\tag{6}$$

由定理的条件(iv)得

$$\begin{aligned}
(6)=C\varepsilon^{1/v}&\sum_{j>M(\theta,\varepsilon,v)}j^{1-q/2}\varphi^{1-qv}(j)j^{q/2}\varphi^{qv}(j)\\
&\cdot\mathsf{P}(\varepsilon\sqrt{j}\,\sigma\varphi^v(j)<m|X_1|\leqslant\varepsilon\sqrt{j+1}\sigma\varphi^v(j+1))\\
\leqslant C\varepsilon^{1/v}&\sum_{j>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi^{(2-q)/(2\delta)+1-qv}(j)j^{q/2}\varphi^{qv}(j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \mathsf{P}(j^{q/2}\varphi^{qv}(j) < m^q|X_1|^q/(\varepsilon\sigma)^q \leqslant (j+1)^{q/2}\varphi^{qv}(j+1)) \\
\leqslant\ & C\varepsilon^{q+(q-2)/(2v\delta)}\theta^{2qv-2-(2-q)/\delta} \\
&\cdot \mathsf{E}|X_1|^q I(m|X_1| > \varepsilon\sqrt{M(\theta,\varepsilon,v)}\,\sigma\varphi^v(M(\theta,\varepsilon,v))). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

又$v \geqslant 1/q+(2-q)/(2q\delta) > 0$, 得$2qv-2-(2-q)/\delta \geqslant 0$, $q+(q-2)/(2v\delta) > 0$. 先令$\varepsilon \to 0$, 再令$\theta \to 0$, 则

$$(7) \to 0. \qquad (8)$$

对于I_{22}

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)I_{22} &= \varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)\mathrm{e}^m\Big(1+\frac{(\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}S_n^2}\varphi^v(n))^2}{nm\mathsf{E}X_1^2}\Big)^{-m} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)\mathrm{e}^m\Big(1+\frac{(\varepsilon\varphi^v(n))^2}{m}\Big)^{-m} \\
&\leqslant C\varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)\mathrm{e}^m(\varepsilon\varphi^v(n))^{-2m} \\
&\leqslant C\varepsilon^{1/v-2m}\int_{M(\theta,\varepsilon,v)}^{\infty}\varphi'(x)\varphi^{-2mv}(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\varepsilon^{1/v-2m}\varphi^{-2mv+1}(M(\theta,\varepsilon,v)) \\
&\leqslant C\theta^{4mv-2}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

令$mv > 1/2$, 得$(9) \to 0$.

综合(8)和(9)即得$(4) \to 0$, 定理5得证. □

定理6的证明: 定理6的证明与定理5类似, 与其证明不同之处在于第二步:
由条件(iii)可以推断出函数$f(g^{-1}(x))$是单调递增的, 所以

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\varphi'(n)I_{11} &= \varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}n\varphi'(n)\mathsf{P}(|X_1| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}\,\sigma\varphi^v(n)/m) \\
&= \varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}n\varphi'(n)\mathsf{P}(f(g^{-1}(|X_1|)) \geqslant cn^2\varphi'(n)) \\
&= \varepsilon^{1/v}\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\frac{n^2\varphi'(n)}{n}\mathsf{P}(f(g^{-1}(|X_1|)) \geqslant cn^2\varphi'(n)). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

由于$x\varphi'(x)$是慢变函数, $\forall\,\delta > 0$, 有$x\varphi'(x)x^{-\delta} \leqslant c$, $\varphi'(x) \leqslant cx^{\delta-1}$, $\varphi(x) \leqslant cx^{\delta}$,

$$
\begin{aligned}
(10) &\leqslant \varepsilon^{1/v}c\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\frac{n^2\varphi'(n)}{\varphi^{1/\delta}(n)}\mathsf{P}(f(g^{-1}(|X_1|)) \geqslant cn^2\varphi'(n)) \\
&\leqslant \varepsilon^{1/v}c\sum_{n>M(\theta,\varepsilon,v)}\theta^{2/\delta}\varepsilon^{1/(v\delta)}n^2\varphi'(n)\mathsf{P}(f(g^{-1}(|X_1|)) \geqslant cn^2\varphi'(n))
\end{aligned}
$$

$$\leqslant c\varepsilon^{1/v+1/(v\delta)}\theta^{2/\delta}\mathsf{E}(f(g^{-1}(|X_1|))^2 I(m|X_1| > \varepsilon\sqrt{M(\theta,\varepsilon,v)}\,\sigma\varphi^v(M(\theta,\varepsilon,v)))).$$

因此对于$v > 0$, 先令$\varepsilon \to 0$, 再令$\theta \to 0$, 则(10) $\to 0$. $\square$

致谢 本文的一些细节得到了桂林理工大学吴群英教授的悉心指导, 在此深表感谢.

参 考 文 献

[1] Bozorgnia A, Patterson R F, Taylor R L. Limit theorems for negatively dependent random variables [R]. Athens, GA: University of Georgia, 1993.

[2] 王利岩. 模糊证券投资组合模型及带有约束条件的一般线性模型参数估计 [D]. 银川: 宁夏大学, 2004.

[3] Chen Y, Zhang W P. Large deviations for random sums of negatively dependent random variables with consistently varying tails [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2007, **77(5)**: 530–538.

[4] Shen X M, Lin Z Y. Precise large deviations for randomly weighted sums of negatively dependent random variables with consistently varying tails [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2008, **78(18)**: 3222–3229.

[5] Jiang Y Y, Wu Q Y. Logarithm theorems for negatively dependent random sequences [J]. *Math. Appl.* (*Wuhan*), 2009, **22(2)**: 248–254.

[6] 陈晓林, 吴群英, 周德宏. ND随机变量列的指数不等式 [J]. 浙江大学学报: 理学版, 2011, **38(1)**: 31–33.

[7] Lan C F, Wu Q Y. Complete convergence for weighted sums of negatively dependent random variables [J]. *Math. Appl.* (*Wuhan*), 2015, **28(1)**: 57–64.

[8] Joag-Dev K, Proschan F. Negative Associate of Random Variables with Applications [J]. *The Annals of Statistics*, 1983, **11(1)**: 268–295.

[9] 赵月旭. 非平稳NA序列部分和的精确渐近性 [J]. 数学学报, 2007, **50(3)**: 539–546.

[10] Lin Z R, Lu C R. Limit Theory for Mixing Dependent Random Variables [M]. Beijing: Science Press, 1997.

[11] 苏淳, 迟翔. 非平稳NA序列中心极限定理的一些结果 [J]. 应用数学学报, 1998, **21(1)**: 9–21.

[12] 李春红, 吴群英, 付艳莉. ND序列的中心极限定理 [J]. 广西科学, 2010, **17(1)**: 43–47, 51.

[13] Chow Y S. Some convergence theorems for independent random variables [J]. *Ann. Math. Statist.*, 1966, **37(6)**: 1482–1493.

Precise Asymptotics for Partial Sums of Nonstationary ND

LI ChunHong[1,2] LIU SanXing[1]

([1] *School of Civil Engineering, Jiaying University, Meizhou, 514015, China*)

([2] *School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou, 510006, China*)

Abstract: In this paper, by using central limit theorem of ND sequences and probability inequality, the precise asymptotics for partial sums of nonstationary ND sequences is investigated, and the same results with it under that of NA sequences are obtained.

Keywords: nonstationary; ND sequences; NA sequences; precise asymptotics

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15