应用概率统计 第 33 卷
第 2 期 2017 年 4 月
Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2017, Vol. 33, No. 2, pp. 139-150
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2017.02.003

$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列加权和的矩完全收敛性 *

陈 芬

(湖北大学数学与统计学院, 武汉, 430062; 武汉学院信息及传播学院, 武汉, 430212)

摘 要: 本文研究了$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列加权和的矩完全收敛性, 利用$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列的Rosenthal型不等式, 得到了$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列加权和的矩完全收敛性定理, 这些结果推广和改进了已有的结果.

关键词: $\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列; 加权和; 矩完全收敛

中图分类号: O212.4

英文引用格式: Chen F. Complete moment convergence for weighted sums of $\widetilde{\varphi}$-mixing random variable series [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(2): 139–150. (in Chinese)

§1. 引 言

许宝騄先生和Robbins [1]提出了完全收敛的概念, 至今, 众多学者们已经把独立情形的完全收敛性的结果推广到了不同情形, 取得了丰富的成果, 见文献[2–5]等等. 在诸多的成果中, 大家关注了如下两个方面课题的研究. 其一, 李德立等 [6]研究了独立同分布随机变量序列加权和的完全收敛性, 得到完全收敛性的一个充要条件; 梁汉营 [7]不但将文献[6]中的结果推广到NA序列, 还进行了改进, 得到了更一般的结果. 其二, Gut [8]研究了独立同分布随机变量序列的Cesàro和的完全收敛性, 得到完全收敛性的一个充要条件; 王岳宝等 [9]进一步探讨独立同分布情形的Cesàro和完全收敛性, 得到了一系列等价条件; 梁汉营 [7]将文献[8]中的结果推广到NA序列的情形; 荆炳义和梁汉营 [10]改进和推广了文献[7]中相应的结果. 最近, 邱德华等 [11]研究了$\widetilde{\rho}$混合随机变量序列的加权和及Cesàro和的完全收敛性, 所得的结果推广和改进了文献[7]和文献[10]的结论.

自20世纪80年代以来, 矩完全收敛性的问题开始受到人们的关注, Chow [12]首先讨论独立同分布随机变量序列部分和的矩完全收敛性, 得到独立情形时的矩完全收敛定理. 矩完全收敛性不仅是完全收敛性的深化, 还和完全收敛性的积分形式等价.

独立情形的矩完全收敛定理被很多学者进行了推广和改进, 本文目的是: 利用Rosenthal型最大值不等式, 不但把NA序列加权和与Cesàro和的完全收敛性的结果推广到$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列的情形, 还得到了$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列加权和的矩完全收敛定理, 定理的条件

*国家自然科学基金项目(批准号: 10571139)资助.
本文2015年8月18日收到, 2016年1月8日收到修改稿.

和结论都有所改进. 本文所用的方法与以前文献中的方法不同, 以前的一般都是先证明完全收敛, 再利用完全收敛来证明矩完全收敛. 而本文是首先寻找矩完全收敛性的等价条件, 再利用该等价条件直接证明了矩完全收敛性, 这种方法较以前的方法更简便.

设$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$上的随机变量序列, N是自然数集, $\mathscr{F}_s=\sigma(X_i,\, i\in S\subset N)$是$\sigma$-域. 在$\mathscr{F}$中给定$\sigma$-域$\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$, 令

$$\varphi(\mathscr{H},\mathscr{G})=\sup\{|\mathsf{P}(B\,|\,A)-\mathsf{P}(B)|;\, A\in\mathscr{H},\, \mathsf{P}(A)>0,\, B\in\mathscr{G}\},$$

对$k\geqslant 0$, 令

$$\widetilde{\varphi}(k)=\sup\{\varphi(\mathscr{F}_S,\mathscr{F}_T):\text{有限子集}\, S,T\in N,\ \text{且}\, \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}. \tag{1}$$

显然, $0\leqslant\widetilde{\varphi}(k+1)\leqslant\widetilde{\varphi}(k)\leqslant 1$, 且$\widetilde{\varphi}(0)=1$.

定义 1 称随机变量序列$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$为$\widetilde{\varphi}$混合的, 如果存在$k\in N$, 使得$\widetilde{\varphi}(k)<1$.

$\widetilde{\varphi}$混合与通常的φ混合有一定的类似, 但并不相同, 它们互不包含. 事实上, 在通常的φ混合系数$\varphi(k)$中, (1)式中的S,T分别是$[1,n]$和$[n+k,\infty]$中的子集; 另外, $\widetilde{\varphi}$混合只要求存在某$k\in N$, 使$\widetilde{\varphi}(k)<1$, 这一点要比φ混合系数$\varphi(k)\to 0$, $k\to\infty$弱得多. 因此, $\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列是一类较广泛的相依混合序列.

定义 2 称随机变量序列$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是尾概率一致有界的, 若存在随机变量X及正常数C, 使对任意的$x\geqslant 0$及$i\geqslant 1$, 都有$\mathsf{P}(|X_i|>x)\leqslant C\mathsf{P}(|X|>x)$成立, 此时记为$\{X_n\}<X$.

本文约定: c, $c_i\,(i=1,2)$, C表示常数, 在不同的地方表示不同的值. $x_+=\max\{0,x\}$, $x_+^k=(x_+)^k$.

§2. 主要结果和证明

引理 3 (Rosenthal不等式) [14] 设$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是零均值的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列, 对$\forall\, r\geqslant 2$, 有$\mathsf{E}|X_i|^r<\infty$, 则存在依赖于$r,k,\widetilde{\varphi}(k)$的常数$c=c(r,k,\widetilde{\varphi}(k))$, 使得

$$\mathsf{E}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}X_i\Big|^r\Big)\leqslant c\Big[\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|^r+\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2\Big)^{r/2}\Big],\qquad \forall\, n\geqslant 1. \tag{2}$$

引理 4 设$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列, $\{c_{ij},\, 1\leqslant j\leqslant i,\, i\geqslant 1\}$是实常数阵列, 则存在与$i$无关的正常数$C$, 对$\forall\, i\geqslant 1$, 满足

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2}-\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant i}|c_{ij}X_j|>\epsilon\Big)\Big)\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j|>\epsilon)\\ \leqslant\ &\Big(\frac{C}{2}+1\Big)\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant i}|c_{ij}X_j|>\epsilon\Big),\qquad \forall\,\epsilon>0.\end{aligned} \tag{3}$$

证明: 仿照文献[11]中引理2.2的证明, 故略. □

引理 5 设$\{X_{ij},\, i\geqslant 1,\, j\geqslant 1\}$是随机变量阵列, $\{a_i,\, i\geqslant 1\}$和$\{c_i,\, i\geqslant 1\}$均为正实数列, $r>0$. 若对$\forall\,\epsilon>0$, 有

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i t^{1/r}\Big)\mathrm{d}t<\infty, \tag{4}$$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\mathsf{E}\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|-\epsilon c_i\Big\}_+^r<\infty. \tag{5}$$

证明: 对$\forall\,\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\mathsf{E}\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|-\epsilon c_i\Big\}_+^r\\
=&\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\int_0^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|-\epsilon c_i>t^{1/r}\Big)\mathrm{d}t\\
=&\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\int_0^{(\epsilon c_i)^r}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|-\epsilon c_i>t^{1/r}\Big)\mathrm{d}t\\
&+\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\int_{(\epsilon c_i)^r}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|-\epsilon c_i>t^{1/r}\Big)\mathrm{d}t\\
\leqslant&\,\epsilon^r\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i\Big)+\sum_{i=1}^{\infty}a_ic_i^{-r}\int_{(\epsilon c_i)^r}^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i\Big)\mathrm{d}t\\
=&\,\epsilon^r\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i\Big)+\epsilon^r\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_it^{1/r}\Big)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

又对$\forall\,c>1$, 有

$$\begin{aligned}
&(c^r-1)\sum_{i=1}^{\infty}a_i\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i\Big)\\
=&\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_1^{c^r}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>\epsilon c_i\Big)\mathrm{d}t\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_1^{c^r}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>c^{-1}t^{1/r}\epsilon c_i\Big)\mathrm{d}t\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{\infty}a_i\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{k}X_{ij}\Big|>c^{-1}t^{1/r}\epsilon c_i\Big)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由ϵ的任意性和(4)式可知上式小于∞, 从而(5)式成立. □

定理 6 设$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是零均值的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列且$\{X_n\}\prec X$. 设$\kappa>1$, $\gamma>0$, $r>0$, $\alpha>\max\{-1,-1/\gamma\}$, $m>\max\{0,(1-\gamma)/(\kappa-1)\}$, 当$\alpha>-1/2$时, 还假设

$m<(2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$及$\kappa>\max\{1,(3-\gamma+2\alpha)/(2+2\alpha\gamma)\}$, $\{c_{ij}\leqslant\sigma_{ij}i^{-(1+\alpha\gamma)/m}j^{\alpha},\ i\geqslant 1,\ 1\leqslant j\leqslant i\}$是常数阵列, 且$|\sigma_{ij}|\leqslant c_2$, $\forall i\geqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant i$, 其中c_2是正常数. 若下列两条件成立:

(i) r满足: $r<\begin{cases} m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma), & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ \gamma+m\kappa-m, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha), & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m);\end{cases}$

(ii) X满足: $\begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(m\kappa-m)/(1+\alpha\gamma)}<\infty, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}|X|^{(m\kappa-m)+\gamma}\ln(1+|X|)<\infty, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}|X|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}<\infty, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m).\end{cases}$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\mathsf{E}\Big\{\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}c_{ij}X_j\Big|-\epsilon\Big\}_+^r<\infty,\qquad\forall\epsilon>0. \tag{6}$$

证明: 对$\forall i\geqslant 1$, $1\leqslant j\leqslant i$, $x>0$, 记

$$X_{ij}^{(1)}=X_jI(|c_{ij}X_j|>x^{1/r}),\qquad X_{ij}^{(2)}=X_jI(|c_{ij}X_j|\leqslant x^{1/r}).$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}c_{ij}X_j\Big|>\epsilon x^{1/r}\Big)\mathrm{d}x\\ \leqslant&\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}c_{ij}X_{ij}^{(1)}\Big|>\epsilon x^{1/r}/2\Big)\mathrm{d}x\\ &+\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\Big|>\epsilon x^{1/r}/2\Big)\mathrm{d}x\\ \doteq&\ I_1+I_2.\end{aligned}$$

下面分别证明$I_1<\infty$, $I_2<\infty$.

先证$I_1<\infty$. 由于

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{i}(|c_{ij}X_j|>x^{1/r})\Big)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{i}|X_j|>c^{-1}i^{(1+\alpha\gamma)/m}j^{-\alpha}x^{1/r})\Big)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|X_j|>c^{-1}i^{(1+\alpha\gamma)/m}j^{-\alpha}x^{1/r}))\mathrm{d}x\\ &\ll\int_1^{\infty}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}i^{(1+\alpha\gamma)/m}j^{-\alpha}x^{1/r})\Big\}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

令$\xi=u^{(1+\alpha\gamma)/m}v^{-\alpha}$, $\zeta=v$, 则$u=\xi^{m/(1+\alpha\gamma)}\zeta^{m\alpha(1+\alpha\gamma)}$, $v=\zeta$, 且

$$\frac{\partial(u,v)}{(\xi,\zeta)}=\frac{m}{1+\alpha\gamma}\xi^{m/(1+\alpha\gamma)-1}\zeta^{m\alpha/(1+\alpha\gamma)},$$

于是由条件(ii)得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}i^{(1+\alpha\gamma)/m}j^{-\alpha}x^{1/r})\\
\ll&\int_1^{\infty}\int_1^{u}u^{\kappa-2}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}u^{(1+\alpha\gamma)/m}v^{-\alpha}x^{1/r})\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
=&\frac{m}{1+\alpha\gamma}\int_1^{\infty}\mathrm{d}\xi\int_1^{\xi^{m/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}}\xi^{m\kappa-m/(1+\alpha\gamma)-1}\zeta^{m\alpha(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}x^{1/r}\xi)\mathrm{d}\zeta\\
\ll&\begin{cases}\displaystyle\int_1^{\infty}\xi^{m\kappa-m/(1+\alpha\gamma)-1}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}x^{1/r}\xi)\mathrm{d}\xi,\\ \qquad\qquad\max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m)\\ \displaystyle\int_1^{\infty}\xi^{m\kappa-m+\gamma-1}\ln\xi\,\mathsf{P}(|X|>c^{-1}x^{1/r}\xi)\mathrm{d}\xi, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m)\\ \displaystyle\int_1^{\infty}\xi^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)-1}\mathsf{P}(|X|>c^{-1}x^{1/r}\xi)\mathrm{d}\xi, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m)\end{cases}\\
\ll&\begin{cases}\mathsf{E}\Big|\dfrac{X}{x^{1/r}}\Big|^{(m\kappa-m)/(1+\alpha\gamma)}, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}\Big|\dfrac{X}{x^{1/r}}\Big|^{(m\kappa-m)+\gamma}\ln(1+|X|), & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}\Big|\dfrac{X}{x^{1/r}}\Big|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m).\end{cases}
\end{aligned}$$

结合条件(i)可知$I_1<\infty$.

再证$I_2<\infty$. 因为$\forall\, i\geqslant 1$, $\mathsf{E}X_i=0$, 所以由条件(ii)可得

$$\begin{aligned}
&0\leqslant\sup_{x\geqslant1}x^{-1/r}\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}\mathsf{E}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\Big|\\
\leqslant&\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{(m\kappa-m)/(1+\alpha\gamma)}I(|c_{ij}X_j|>1),\\ \qquad\qquad\max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{m\kappa-m+\gamma}I(|c_{ij}X_j|>1), & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m)\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}I(|c_{ij}X_j|>1),\\ \qquad\qquad\alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m)\text{ 且 }m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)\geqslant1\\ \displaystyle\sup_{x\geqslant1}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\Big|\tfrac{c_{ij}X_j}{x^{1/r}}\Big|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}I(|c_{ij}X_j|\leqslant x^{1/r}),\\ \qquad\qquad\alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m)\text{ 且 }m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)<1\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\ll \begin{cases} i^{-(\kappa-1)}, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m), \\ i^{-(\kappa-1)}\ln i, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m), \\ i^{-(\kappa-1)}, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m). \end{cases}$$

当$i\to\infty$时, 上式趋于0. 从而

$$\sup_{x\geqslant 1} x^{-1/r}\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}\mathsf{E}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\Big|\to 0, \qquad i\to\infty.$$

令

$$I_3=\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}\Big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}-\mathsf{E}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\Big)\Big|>\epsilon x^{1/r}/4\Big)\mathrm{d}x<\infty. \tag{7}$$

因此要证$I_2<\infty$, 只须证明(7)式成立即可.

取p, 使$p>\max\{2,\, r,\, m\kappa+\gamma,\, m\kappa/(1+\alpha\gamma),\, m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha),\, 2m\kappa/(2-\gamma)I(0<\gamma<2),\, 2m\kappa/2\alpha\gamma-2m\alpha-m-2\}$, 由Markov不等式、引理3、$\mathrm{C_r}$不等式、Jensen不等式有

$$\begin{aligned} I_3 &\ll \sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big\{\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big|c_{ij}X_{ij}^{(2)}-\mathsf{E}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big|^p+\Big(\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}-\mathsf{E}c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2\Big)^{p/2}\Big\}\mathrm{d}x \\ &\ll \sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big|c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big|^p\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big(\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2\Big)^{p/2}\mathrm{d}x \\ &\doteq I_4+I_5. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} I_4 &= p\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big\{\sum_{j=1}^{i}\int_0^{\infty}t^{p-1}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j|I(|c_{ij}X_j|\leqslant x^{1/r})>t)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}x \\ &= p\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big\{\sum_{j=1}^{i}\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j|>t)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

再由条件(i), (ii), p的取法和$I_1<\infty$的证明有

$$\begin{aligned} & p\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big\{\sum_{j=1}^{i}\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j|>t)\mathrm{d}t\Big\}\mathrm{d}x \\ \ll & \int_1^{\infty}x^{-p/r}\Big\{\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}i^{\kappa-2}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|X|>i^{(1+\alpha\gamma)/m}j^{-\alpha}t/C)\Big)\mathrm{d}t\Big\} \\ \ll & \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\infty}x^{-p/r}\mathrm{d}x\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\mathsf{E}\Big|\frac{X}{t}\Big|^{m\kappa-m/(1+\alpha\gamma)}\mathrm{d}t, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m) \\ \displaystyle\int_1^{\infty}x^{-p/r}\mathrm{d}x\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\mathsf{E}\Big|\frac{X}{t}\Big|^{\gamma+m\kappa-m}\ln\Big(1+\Big|\frac{X}{t}\Big|\Big)\mathrm{d}t, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m) \\ \displaystyle\int_1^{\infty}x^{-p/r}\mathrm{d}x\int_0^{x^{1/r}}t^{p-1}\mathsf{E}\Big|\frac{X}{t}\Big|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)}\mathrm{d}t, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\ll \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\infty} x^{-m(\kappa-1)/(r(1+\alpha\gamma))}\mathrm{d}x, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m) \\ \displaystyle\int_1^{\infty} x^{(\gamma+m\kappa-m)/r}\mathrm{d}x, & \alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m) \\ \displaystyle\int_1^{\infty} x^{-m\kappa/(r(1+\alpha\gamma-q\alpha))}\mathrm{d}x, & \alpha>-1/(\gamma+m\kappa-m) \end{cases}$$
$$<\infty.$$

即$I_4<\infty$.

最后证明$I_5<\infty$, 分三种情况讨论:

(a) 当$\max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 若$m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)\geqslant 2$且$0<\gamma<2$, 显然此时$\mathsf{E}|X|^2<\infty$, 从而有

$$\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2 \ll \sum_{j=1}^{i}(c_{ij})^2 \ll \begin{cases} i^{-2(1+\alpha\gamma)/m}, & \max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/2, \\ i^{-(2-\gamma)/m}\ln i, & \alpha=-1/2, \\ i^{-(-1-2\gamma+2(1+\alpha\gamma)/m)}, & \alpha>-1/2. \end{cases}$$

若$m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)\geqslant 2$且$\gamma\geqslant 2$, 同样有$\mathsf{E}|X|^2<\infty$, $\alpha>-1/2$, 则

$$\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2 \ll \sum_{j=1}^{i}(c_{ij})^2 \ll i^{-(-1-2\gamma+2(1+\alpha\gamma)/m)}.$$

若$m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)<2$, 由$\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m)$有$m\alpha(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)<-1$, 再由条件(ii)得

$$\begin{aligned} x^{-2/r}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2 &\leqslant x^{-m(\kappa-1)/((1+\alpha\gamma)r)}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)} \\ &\ll x^{-m(\kappa-1)/((1+\alpha\gamma)r)}\sum_{j=1}^{i}|c_{ij}|^{m(\kappa-1)/(1+\alpha\gamma)} \\ &\ll i^{-(\kappa-1)}x^{-m(\kappa-1)/((1+\alpha\gamma)r)}. \end{aligned}$$

综上: 当$\max\{-1,-1/\gamma\}<\alpha<-1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 结合$p$的取法有$I_5<\infty$.

(b) 当$\alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 此时在$\gamma+m\kappa-m\geqslant 2$, $0<\gamma<2$和$\gamma+m\kappa-m\geqslant 2$, $\gamma\geqslant 2$时, 分别有(a)中的前两种情况同样的结果, 若$\gamma+m\kappa-m<2$, 由条件(ii)有

$$\begin{aligned} x^{-2/r}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2 &\leqslant x^{-(m(\kappa-1)+\gamma)/r}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{m(\kappa-1)+\gamma} \\ &\ll x^{-(m(\kappa-1)+\gamma)/r}\sum_{j=1}^{i}|c_{ij}|^{m(\kappa-1)+\gamma} \\ &\ll x^{-(m(\kappa-1)+\gamma)/r}i^{-(\kappa-1)}\ln i. \end{aligned}$$

故当$\alpha=-1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 结合$p$的取法也有$I_5<\infty$.

(c) 当$\alpha > -1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 在$m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha) \geqslant 2$, $0 < \gamma < 2$和$m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha) \geqslant 2$, $\gamma \geqslant 2$时, 分别有(a)中的前两种情况同样的结果, 若$m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha) < 2$, 由$\alpha > -1/(\gamma+m\kappa-m)$有$m\alpha\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha) > -1$, 再由条件(ii)有

$$\begin{aligned} x^{-2/r}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}\big(c_{ij}X_{ij}^{(2)}\big)^2 &\leqslant x^{-m\kappa/((1+\alpha\gamma-m\alpha)r)}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{E}|c_{ij}X_j|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)} \\ &\ll x^{-m\kappa/((1+\alpha\gamma-m\alpha)r)}\sum_{j=1}^{i}|c_{ij}|^{m\kappa/(1+\alpha\gamma-m\alpha)} \\ &\ll x^{-m\kappa/((1+\alpha\gamma-m\alpha)r)}i^{-(\kappa-1)}. \end{aligned}$$

所以当$\alpha > -1/(\gamma+m\kappa-m)$时, 结合$p$的取法同样有$I_5 < \infty$.

因此(7)式成立, 也即$I_2 < \infty$.

由引理5可知: (6)式成立. 定理6得证. □

定理 7 设$\{X, X_i, i \geqslant 1\}$是同分布的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列, $\kappa \geqslant 2$, $\gamma > 0$, $\alpha > \max\{-1, -1/\gamma\}$, $m > \max\{0, (1-\gamma)/(\kappa-1)\}$, 当$\alpha > -1/2$时, 还假设$m < (2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$及$\kappa > \max\{1, (3-\gamma+2\alpha)/(2+2\alpha\gamma)\}$, $\{c_{ij} \leqslant \sigma_{ij}i^{-(1+\alpha\gamma)/m}j^{\alpha}, i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant i\}$是常数阵列, 且$|\sigma_{ij}| \geqslant c_1$, $\forall i \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant i$, 其中$c_1$是正常数. 若存在某一$r > 0$和$\epsilon > 0$, 使得(6)成立, 则条件(ii)成立. 若还有条件(i)成立且对$\forall i \geqslant 1$, 有$\sum\limits_{j=1}^{i}c_{ij} = 1$和$c_1 \leqslant |\sigma_{ij}| \leqslant c_2$, 则有$\mathsf{E}X = 0$.

证明: 对$\forall \epsilon > 0$, $r > 0$, 若(6)式成立, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=1}^{l}c_{ij}X_j\Big| > \epsilon\Big) < \infty. \tag{8}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant i}|c_{ij}X_j| > \epsilon\Big) < \infty. \tag{9}$$

又因为$\kappa \geqslant 2$, 故有

$$\lim_{i\to\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant i}|c_{ij}X_j| > \epsilon\Big) = 0. \tag{10}$$

当i充分大时, 由引理4和(10)式有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j| > \epsilon) \ll \mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant i}|c_{ij}X_j| > \epsilon\Big).$$

再由(9)式有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\sum_{j=1}^{i}\mathsf{P}(|c_{ij}X_j| > \epsilon) < \infty.$$

进而有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2} \sum_{j=1}^{i} \mathsf{P}(|X| > c_1^{-1} j^{-\alpha} i^{(1+\alpha\gamma)/m} \epsilon) < \infty.$$

所以条件(ii)成立.

进一步若还有条件(i)成立, 且$\sum\limits_{j=1}^{i} c_{ij} = 1$, $c_1 \leqslant |\sigma_{ij}| \leqslant c_2$, 则由条件(ii)和定理6的证明有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2} \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{i} c_{ij}(X_j - \mathsf{E}X_j)\Big| > \epsilon\Big) < \infty, \qquad \forall\, \epsilon > 0.$$

结合(8)式得$\mathsf{E}X = 0$.　　□

注记 8　(i) 在定理6中, 令$\alpha = 0$, $\kappa = 1$, $\sigma_{ij} \equiv 1$, 即$c_{ij} = i^{-1/m}$, 则由定理6可得文献[12]中的定理.

(ii) 若$\{X_i, i \geqslant 1\}$是零均值的NA随机变量序列, 在定理6和定理7中, 令$m = \gamma = 1$, 则由定理6可得文献[7]中的定理2.1的充分性成立; 由定理7可得文献[7]中的定理2.1的必要性成立.

注记 9　在定理6和定理7中, 我们有

(i) $\max\{-1, -1/\gamma\} < -1/(m(\kappa-1)+\gamma)$.

(ii) $1+\alpha\gamma - m\alpha > 0$. 事实上, 当$-1/(m(\kappa-1)+\gamma) < \alpha \leqslant 0$时, 显然有$1+\alpha\gamma - m\alpha > 0$; 当$\alpha > 0$时, 由$m < (2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$得$1+\alpha\gamma - m\alpha > m/2 > 0$.

(iii) 当$\alpha > -1/2$时, 若$\gamma \geqslant 1$, 则$(3-\gamma+2\alpha)/(2+2\alpha\gamma) \leqslant 1$; 若$0 < \gamma < 1$, 则$(3-\gamma+2\alpha)/(2+2\alpha\gamma) > 1$.

(iv) 当$\alpha > -1/2$时, 有$(1-\gamma)/(\kappa-1) < (2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$. 事实上, 若$\gamma \geqslant 1$, 显然有$(1-\gamma)/(\kappa-1) < (2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$; 若$0 < \gamma < 1$, 由$\kappa > (3-\gamma+2\alpha)/(2+2\alpha\gamma)$得$(1-\gamma)/(\kappa-1) < (2+2\alpha\gamma)/(1+2\alpha)$.

推论 10　定理6和定理7的条件不变, 令$\{c_{ij} = \sigma_{ij}(i-j+1)^{\alpha} i^{-(1+\alpha\gamma)/m}, i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant i\}$, 则定理6和定理7的结论依然成立.

当$\alpha > -1$时, 记

$$A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad A_0^{\alpha} = 1.$$

定理 11　设$\{X_i, i \geqslant 1\}$是零均值的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列且$\{X_n\} \prec X$. 另外假设$r > 0$, $m > 0$, $\kappa > 1$, $-1 < \alpha \leqslant 0$, 当$-1/2 < \alpha \leqslant 0$时, 还假设$m < 2(1+\alpha)/(1+2\alpha)$, 若下列条件成立:

(i) r满足: $r<\begin{cases} m(\kappa-1)/(1+\alpha), & -1<\alpha<-1/(1+m\kappa-m),\\ 1+m\kappa-m, & \alpha=-1/(1+m\kappa-m),\\ m\kappa/(1+\alpha-m\alpha), & -1/(1+m\kappa-m)<\alpha\leqslant 0;\end{cases}$

(ii) X满足: $\begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(m\kappa-m)/(1+\alpha)}<\infty, & -1<\alpha<-1/(1+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}|X|^{1+m\kappa-m}\ln(1+|X|)<\infty, & \alpha=-1/(1+m\kappa-m),\\ \mathsf{E}|X|^{m\kappa/(1+\alpha-m\alpha)}<\infty, & -1/(1+m\kappa-m)<\alpha\leqslant 0.\end{cases}$

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2+r(1+\alpha)(m-1)/m}\mathsf{E}\Big\{\max_{0\leqslant l\leqslant i}\Big|\frac{1}{A_i^{1+\alpha}}\sum_{j=0}^{l}A_{i-j}^{\alpha}X_j\Big|-\epsilon i^{-(1+\alpha)(m-1)/m}\Big\}_+^r<\infty,\qquad \forall\epsilon>0. \tag{11}$$

证明: 对$\forall i\geqslant 1$, $0\leqslant j\leqslant i$, 令$c_{ij}=i^{(1+\alpha)(m-1)/m}A_{i-j}^{\alpha}/A_i^{1+\alpha}$. 又当$\alpha>-1$时, 有

$$\lim_{i\to\infty}A_i^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)/i^{\alpha}=1.$$

于是存在正常数c_1和c_2, 当i充分大时, 有

$$\begin{cases} c_1 i^{-(1+\alpha)/m}(i-j)^{\alpha}\leqslant c_{ij}\leqslant c_2 i^{-(1+\alpha)/m}(i-j)^{\alpha}, & 0\leqslant j\leqslant i-1,\\ c_1 i^{-(1+\alpha)/m}<c_{ii}<c_2 i^{-(1+\alpha)/m}, & j=i.\end{cases}$$

因此, 令

$$\begin{cases} c_{ij}=\sigma_{ij}i^{-(1+\alpha)/m}(i-j)^{\alpha}, & 0\leqslant j\leqslant i-1,\\ c_{ii}=\sigma_{ii}i^{-(1+\alpha)/m}, & j=i,\end{cases}$$

其中$c_1<\sigma_{ij}<c_2$, $\forall 1\leqslant j\leqslant i$, $i\geqslant 1$.

从而对任意固定的$i\geqslant 1$, $\epsilon>0$, 由$\mathrm{C_r}$不等式、条件(i)和条件(ii)可得

$$i^{\kappa-2+r(1+\alpha)(m-1)/m}\mathsf{E}\Big\{\max_{0\leqslant l\leqslant i}\Big|\frac{1}{A_i^{1+\alpha}}\sum_{j=0}^{l}A_{i-j}^{\alpha}X_j\Big|-\epsilon i^{-(1+\alpha)(m-1)/m}\Big\}_+^r<\infty,\qquad \forall\epsilon>0.$$

因此, 要证(11)式, 只须下式成立即可:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{E}\Big\{\max_{0\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=0}^{l}c_{ij}X_j\Big|-\epsilon\Big\}_+^r<\infty. \tag{12}$$

而

$$\mathsf{E}\Big\{\max_{0\leqslant l\leqslant i}\Big|\sum_{j=0}^{l}c_{ij}X_j\Big|-\epsilon\Big\}_+^r\leqslant 2^r\mathsf{E}\Big\{\max_{0\leqslant l\leqslant i-1}\Big|\sum_{j=0}^{l}c_{ij}X_j\Big|-\epsilon/2\Big\}_+^r+2^r\mathsf{E}\{|c_{ii}X_i|-\epsilon/2\}_+^r.$$

又由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty} \mathsf{P}(|c_{ii}X_i|>\epsilon x^{1/r})\mathrm{d}x \\
\leqslant &\int_1^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{P}(|CX|>\epsilon i^{(1+\alpha)/m}x^{1/r})\Big)\mathrm{d}x \\
\ll &\int_1^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X|}{x^{1/r}}\Big)^{m(\kappa-1)/(1+\alpha)}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

当$\alpha=-1/(1+m\kappa-m)$时, $m(\kappa-1)/(1+\alpha)=1+m\kappa-m$; 当$-1/(1+m\kappa-m)<\alpha\leqslant 0$时, $m(\kappa-1)/(1+\alpha)<m\kappa/1+\alpha-m\alpha$. 由条件(i)和条件(ii)可知

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\int_1^{\infty} \mathsf{P}(|c_{ii}X_i|>\epsilon x^{1/r})\mathrm{d}x<\infty.$$

再由引理5有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{E}\{|c_{ii}X_i|-\epsilon/2\}_+^r<\infty.$$

结合推论10可得(12)式成立, 故(11)式成立. □

定理 12 设$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是零均值的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列且$\{X_n\}\prec X$. 设$\kappa>1$, $-1<\alpha\leqslant 0$, $m>0$, $r>0$且r还满足定理11中的条件(i), 当$-1/2<\alpha\leqslant 0$时, 还假设$m<2(1+\alpha)/(1+2\alpha)$. 若存在$\epsilon>0$, 使得(11)式成立, 当$1<\kappa<2$时, 进一步假设$\{X, X_i,\, i\geqslant 1\}$是严平稳的$\widetilde{\varphi}$混合随机变量序列, 则定理11中的条件(ii)成立且当$m\geqslant 1$时$\mathsf{E}X=0$.

证明: 若(11)式成立, 则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^{\kappa-2}\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant l\leqslant i}\Big|\frac{1}{A_i^{1+\alpha}}\sum_{j=0}^{l}A_{i-j}^{\alpha}X_j\Big|>\epsilon i^{-(1+\alpha)(m-1)/m}\Big)<\infty,\qquad \forall\,\epsilon>0.$$

再仿照文献[9]中定理3.2的证明, 故略. □

注记 13 若$\{X_i,\, i\geqslant 1\}$是零均值的NA随机变量序列, 由定理11和定理12可得文献[10]中的相应的结果.

参 考 文 献

[1] Hsu P L, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers [J]. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1947, **33(2)**: 25–31.

[2] Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers [J]. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, **120(1)**: 108–123.

[3] 白志东, 苏淳. 关于独立和的完全收敛性 [J]. 中国科学(A辑), 1985, **15(5)**: 399–412.

[4] 邵启满. 一矩不等式及其应用 [J]. 数学学报, 1988, **31(6)**: 736–747.

[5] Li D L, Spătaru A. Refinement of convergence rates for tail probabilities [J]. *J. Theoret. Probab.*, 2005, **18(4)**: 933–947.

[6] Li D L, Rao M B, Jiang T F, et al. Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of random variables [J]. *J. Theoret. Probab.*, 1995, **8(1)**: 49–76.

[7] Liang H Y. Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2000, **48(4)**: 317–325.

[8] Gut A. Complete convergence and Cesàro summation for i.i.d. random variables [J]. *Probab. Theory Related Fields*, 1993, **97(1-2)**: 169–178.

[9] 王岳宝, 刘许国, 苏淳. 独立加权和的完全收敛的等价条件 [J]. 中国科学(A辑), 1998, **28(3)**: 213–222.

[10] Jing B Y, Liang H Y. Strong limit theorems for weighted sums of negatively associated random variables [J]. *J. Theoret. Probab.*, 2008, **21(4)**: 890–909.

[11] 邱德华, 陈平炎, 段振华. $\widetilde{\rho}$混合随机变量序列加权和的完全收敛性 [J]. 应用数学学报, 2015, **38(1)**: 150–165.

[12] Chow Y S. On the rate of moment convergence of sample sums and extremes [J]. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 1988, **16(3)**: 177–201.

[13] Chen P Y, Wang D C. Convergence rates for probabilities of moderate deviations for moving average processes [J]. *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*), 2008, **24(4)**: 611–622.

[14] Huang H W, Wang D C, Wu Q Y. Strong convergence laws for $\widetilde{\varphi}$-mixing sequences of random variables [J]. *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, 2012, **28(2)**: 181–188.

Complete Moment Convergence for Weighted Sums of $\widetilde{\varphi}$-Mixing Random Variable Series

CHEN Fen

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan, 430062, China*)

(*School of Information and Communication, Wuhan College, Wuhan, 430212, China*)

Abstract: In this paper, the complete moment convergence for weighted sums of $\widetilde{\varphi}$-mixing random variable series are investigated. By using Rosenthal type inequality, we obtain complete moment convergence theorems for weighted sums of $\widetilde{\varphi}$-mixing random variable series, which generalize and improve the corresponding results.

Keywords: $\widetilde{\varphi}$-mixing random variable series; weighted sums; complete moment convergence

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15