

企业信息不完全情况下的首次通过违约概率模型

李秀琼 陈绍刚

(电子科技大学数学科学学院, 成都, 611731)

摘要: 基于Merton的结构化模型, 利用几何布朗运动理论建立了不完全信息条件下的企业首次通过违约概率模型。根据企业的财务报表及信用记录, 提出了一种新的不完全信息假设; 在模型上引入股票的流通性价值, 并改进其基于Merton模型的度量方法, 使其适用于首次通过模型并求得内生违约边界, 利用此边界给出了不完全信息条件下的企业违约概率, 并分析了股票流通价值和股价与企业资产的相关关系对违约概率的影响。

关键词: 结构化模型; 不完全信息; 违约概率; 首次通过模型; 违约边界

中图分类号: O211

英文引用格式: Li X Q, Chen S G. The study of default probability under incomplete information based on structural model [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(3): 247–256. (in Chinese)

§1. 引言

目前, 主流的现代信用风险度量方法分为简约模型和结构化模型两类。简约模型把违约事件外生于企业, 将其看作由强度决定的随机过程, 忽略资本结构、债务结构等的影响。尽管简约模型与利率期限结构理论有兼容, 但因其不用企业资产的运作来决定企业是否违约, 在一定程度上缺乏经济学理论基础。

结构化模型是基于期权定价理论建立违约模型, 可以对企业资产、债券的现金流作出显示假设。目前这种方法在债券定价、违约概率的度量方面占据着重要的地位, 穆迪企业基于结构化模型开发的KMV模型^[1]已成为衡量信用风险的最流行和有效的模型之一。

Merton^[2]提出了第一个结构化模型, 基于Black和Scholes^[3]的期权定价理论, 将股东权益看作看涨期权, 得到了违约债券价格的封闭解。但是由于其在违约规则、企业资本结构方面提出了比较严格的假定, 在实际应用中并不令人满意。Jones等^[4]的实证研究发现, 企业债券的信用价差普遍被Merton低估。Black和Cox^[5]放松了企业只能在到期日才能发生违约的限制, 提出了首次通过模型(first passage time model), 即企业资产一旦低于某一边界则发生违约。违约边界的设定是此类模型的关键, 内生违约边界受股东决策的影响, 主要基于股东权益的最大化。外生的违约边界通常跟债务价值有关, 是企业给出的外生资产临界值。Giesecke^[6]最早建立了内生违约模型, Leland^[7]假定息票连续支付无穷期简化了数学

本文2015年4月20日收到, 2016年2月10日收到修改稿。

表达, 得到了永续债券的内生违约边界, Leland 和 Toft^[8]拓展了 Leland 的模型, 考虑了发行有限期债券时的内生违约边界.

这些模型丰富了结构化模型的理论框架, 但是都是在完全市场信息下进行考量, 认为可以观测到企业资产和债券价值的真实价值, 违约具有可预测性. 违约的可预测性导致理论预测的短期信用价差为 0, 这是与现实不符的. 针对这一问题, 近年来研究人员在企业的资产价值的假定上做了改进, 程功等^[9]在传统的结构化模型中引入噪音信息, 并证实了其能改善银行的违约风险评估. 其外, 崔长峰和刘海龙^[10]认为股票作为一种有流通性能的金融资产, 能够给股东带来额外的增值, 将这种流通性价值纳入股东权益, 使得模型较传统的结构化模型更加稳健, 在一定程度上抵消了噪音信息带来的负面影响.

本文根据国内银行的信息获取机制, 利用企业的财务信息和信用记录进行不完全信息假设, 并研究该信息集下的首次通过违约概率模型. 在企业资产价值的度量上, 考虑股票流通产生的金融属性溢价, 改进崔长峰和刘海龙基于 Merton 模型的股东流通性价值度量方法, 使之适应首次通过模型求得内生违约边界, 满足了股东权益的最大化, 并求得此边界下的违约概率. 此外, 通过引进股票的流通性价值, 本文对股价与企业的资产价值的相关关系对违约概率的影响进行了分析.

§2. 考虑股票流通性价值的最优内生违约边界

本文考虑的是首次通过模型, 即在债券到期日之前, 若企业资产一旦低于某一事先约定的值(即违约边界 V_B), 则发生违约, 债权人有权迫使债务人进行破产清算. 在首次通过模型中, 违约边界的设定是关键部分.

假设企业平价发行面值为 P , 到期日为 T 的债券, 每单位时间的息票收益为 C . 企业资产 V_t 及股票价格 S_t 在风险中性测度 Q 下服从几何布朗运动^[10], r 为无风险利率, W_t^S 和 W_t^V 是相关系数为 ρ 的维纳过程:

$$dV_t = rV_t dt + \sigma V_t dW_t^V, \quad (1)$$

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_s S_t dW_t^S. \quad (2)$$

2.1 股票流通性价值的度量

在 Leland 和 Toft 的结构化模型中, 把企业资产价值归属股东及债权人, 即

$$V = V_s + V_d, \quad (3)$$

其中, V 是企业资产, V_s 和 V_d 分别表示股东价值及债权人价值. 但在度量上市企业的股东价值 f 时, 股票作为一种证券化的金融资产, 除了反映基本资产的价值, 它本身具备流通性. 股票的流通便利性使得金融资产价值高估于基本资产的价值时, 股票的持有者可以将其卖出以获得额外的增值, 即获得股票的“流通性价值”. 因此, 股票的流通性价值作为资产从基本资产到金融资产的转化所带来的增值, 有必要合理地考虑这种流通性价值的影响^[2].

把股票的流通性价值记为MK. 由式(3), 可得股东价值为

$$f = V_s + MK = V - V_d + MK. \quad (4)$$

股东面对流动性需求时, 有将资产变现的要求. 当股票的可变现价值 λS 相对于股权价值 V_s 不存在低估时, 股东将以股票的形式变现资产; 当存在低估时, 股东将以企业资产的形式以获得更高价值. S 表示股票价格, λ 表示股票的可变现率. 企业不发生违约时, 股东 f 可表示为

$$f = \max\{\lambda S, V_s\} = V_s + \max\{\lambda S - V_s, 0\}. \quad (5)$$

由式(4), 股票的流通性价值为 $MK = \max\{\lambda S - V_s, 0\}$. 设时刻 $u < T$, 若在 $[0, u]$ 时间内, 企业一直处于正常运营的状态(不发生违约), 则 u 时刻的股票可流通性价值记为 $MK_u = \max\{\lambda S_u - V_{s,u}, 0\}$. 因为股东不会因为股价略高于股权价值就变卖股票, 通常会等到高估到一定程度才会卖出, 这相当于一个永久美式看跌期权的自由边界, 因此可以将 MK_u 看作永久美式看跌期权. 令 $X_u = V_{s,u}/(\lambda S_u)$, 由Itô公式可知 X_u 服从几何布朗运动, 方差为 $\sigma_X^2 = \sigma^2 + \sigma_s^2 - 2\rho\sigma\sigma_s$.

$$MK_u = \max\{\lambda S_u - V_{s,u}, 0\} = \frac{1}{\lambda S_u} \max\left\{1 - \frac{V_{s,u}}{\lambda S_u}, 0\right\}. \quad (6)$$

根据文献[11]给永久美式看跌期权的定价求解, 用同样的办法可求出 u 时刻 MK_u 的定价.

$$MK_u = \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda S_u)^{k+1}}{(V_u - P)^k} \right], \quad (7)$$

其中 $k = 2r/\sigma_X^2$, 若企业在 u 时刻发生违约, 则相应的 $MK_u = 0$. 由于我们考虑的是首次通过模型, 则在 $[0, T]$ 时间总的股票流通性价值为

$$MK = \int_0^T \mathbb{E}^Q \left[\frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda S_u)^{k+1}}{(V_u - P)^k} \right] \times I_{(V_t > V_B)} \right] dt. \quad (8)$$

2.2 股东价值的度量及最优违约边界的生成

根据文献[8], 在考虑了债券的利息收入、本金归还及破产回收之后, 可得到 $[0, T]$ 时间内全部债券的现金流

$$V_d(V; V_B; T) = \frac{C}{r} + \left(P - \frac{C}{r} \right) \left(\frac{(1 - e^{-rT})}{rT} - I(T) \right) + \left((1 - \alpha)V_B - \frac{C}{r} \right) J(T), \quad (9)$$

其中, θ 为企业税率, α 为破产损失率.

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{rT} \left\{ \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-w+z} N[q_1(T)] + \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-w-z} N[q_2(T)] \right\} \\ &\quad - e^{-rT} \left\{ N(h_1(T)) + \left(\frac{V}{V_B} \right)^{-2w} N[h_2(T)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(T) &= \frac{1}{z\sigma\sqrt{T}} \left\{ -\left(\frac{V}{V_B}\right)^{-w+z} N[q_1(T)]q_1(T) + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-w-z} N[q_2(T)]q_2(T) \right\}, \\
q_1(T) &= \frac{-b - z\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad q_2(T) = \frac{-b + z\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
h_1(T) &= \frac{-b - w\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad h_2(T) = \frac{-b + w\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\
w &= \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma^2}, \quad b = \ln\left(\frac{V}{V_B}\right), \quad z = \frac{[(w\sigma^2)^2 + 2r\sigma^2]^{1/2}}{\sigma^2},
\end{aligned}$$

$N(\cdot)$ 表示的是累计的标准正态分布函数.

由文献[7], 可得税盾收益 $TB = (\theta C/r)(1 - V/V_B)^{-x}$, 破产成本 $BC = \alpha V_B(V/V_B)^{-x}$, 其中 $x = w + z$. 由式(8)可知股票流通价值的表达式

$$\begin{aligned}
MK &= \int_0^T \mathbb{E}^Q \left[\frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda S_u)^{k+1}}{(V_u - P)^k} \right] \times I_{(V_t > V_B)} \right] dt \\
&= \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \int_0^T \left[\frac{(\lambda S_u)^{k+1}}{(V_u - P)^k} \right] \times (1 - F(t; V; V_B)) dt,
\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$F(t; V; V_B) = N[h_1(t)] + \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-2w} N[h_2(t)] \tag{11}$$

表示的是 V 在 t 时刻首次穿越 V_B 的概率, 具体推导见文献[12]. 且为方便处理MK中的 S_t 和 V_t 取常数 \bar{S} , \bar{V} . 则股东权益价值为

$$f(V; V_B; T) = V + TB - BC - V_d + MK. \tag{12}$$

企业的决策由于受股东的影响, 一般都基于股东权益的最大化, 当 $f(V; V_B; T)$ 对 V 满足平滑条件时, V_B 由下式可求

$$\frac{\partial f(V; V_B, T)}{\partial V} \Big|_{V=V_B} = 0. \tag{13}$$

由式(9)、(10)、(12)、(13), 求得

$$V_B = \frac{x + \left(P - \frac{C}{r}\right) \frac{A}{rT} + \frac{C}{r} B + 2G \left(w \int_0^T N(w\sigma\sqrt{t}) dt + \frac{2}{w\sigma^2} N(w\sigma\sqrt{T})\right)}{1 + \alpha x - (1 - \alpha B)}, \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}
A &= z - w - 2zN(z\sigma\sqrt{T}) + 2we^{-rT}N(w\sigma\sqrt{T}) - 2 \left/ \left[\sigma\sqrt{T}n(z\sigma\sqrt{T}) + \frac{2e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}} n(w\sigma\sqrt{T}) \right] \right., \\
B &= z - w + \frac{1}{z\sigma^2 T} + 2 \left(z - \frac{1}{z\sigma^2 T} \right) N(z\sigma\sqrt{T}) - \frac{2}{\sigma\sqrt{T}n(z\sigma\sqrt{T})}, \\
G &= \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda\bar{S})^{k+1}}{(\bar{V} - P)^k} \right].
\end{aligned}$$

$MK = 0$ 时, 是文献[8]的结果.

§3. 最优违约边界下的不完全信息违约概率模型

以上通过考虑了股票的流通性价值的影响来生成了违约边界, 在本文考虑的这个首次通过模型中, 违约边界是求得违约概率的必要条件。此外, 在股票的流通性价值度量中, 涉及到股价和资产价值的相关性(即 ρ), 这实质上是一种信息披露。除了企业的财务报表和信用记录这些基本面信息, 银行可以通过股票价格的信息来获取企业的资产价值信息, 从而判断企业的经营状况。以下将结合企业的不完全信息给出违约概率, 并研究这种相关性对违约概率的影响。

3.1 基于财务报表和信用记录的不完全信息假设

一般而言, 银行一般是根据财务报表来获得企业的经营信息。但是, 由于国内企业的财务管理水品不高, 且常常带有夸大行为, 企业的财务信息都会呈现出一定的滞后性和不精确性。但也与此同时, 各大银行也已建立了比较完善的信贷系统, 积累了大量的客户信用记录, 这给我们对结构化模型不完全信息的研究提供了可能性。

假设银行定期在离散点 t_0, t_1, \dots, t_n 获取企业含有噪音的财务会计信息, 这里仅考虑单一时点 $t = t_1$ 时获得会计信息 \bar{V}_t 的情形。设 t 时刻企业真实资产价值为 V_t , $\ln V_t$ 和 $\ln \bar{V}_t$ 服从联合正态分布, 设 $Y_t = \ln \bar{V}_t = Z(t) + U(t)$, 其中 U_t 为噪音, U_t 和 Z_t 相互独立, 都服从正态分布, 并设 τ 为违约时点, $\tau = \inf\{l : V_l < V_B, 0 \leq l \leq T\}$ 。

此外, 银行可观测到企业的历史违约记录, 即时刻 t 以前是否发生过违约, $I_{(\tau>t)}$, 且 V_B 可由式(14)可求。则银行在 t 时刻获取的信息流为

$$\mathfrak{R}_t = \sigma(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}, V_B, I_{(\tau>t)}).$$

以下将在 $I_{\tau>t} = 1$ 且已知 \mathfrak{R}_t 信息流下进行违约分析。

3.2 违约概率建模及 ρ 对违约概率的影响

由式(1), 设企业资产价值几何布朗运动的偏微分解为 $V_t = e^{Z_0 + mt + \sigma W_t^V}$, 其中 $Z_0 = \ln V_0$, V_0 为已知的企业真实初始资产, $m \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $t^{-1} \ln \mathbb{E}[V_t/V_0] = m + \sigma^2/2 = r$ 。

由文献[12, 13], 可得到 Z_t 的首尾末端位置固定的情况下, 中途运动轨迹不穿过0的概率, 以及在不完全信息 Y_t 已知的条件下真实资产 Z_t 的条件概率。

引理 1 设时刻0时初始状态 $Z_0 = z_0$, 到时刻 t 达到 $Z_t = x$ 的条件下, $M_t = \min\{Z_s : 0 \leq s \leq t\} > 0$ 条件概率为

$$\Psi(z_0, x, \sigma\sqrt{t}) = 1 - \exp\left(\frac{-2z_0x}{\sigma^2 t}\right). \quad (15)$$

引理 2 令 $Z_0 = z_0$, 在已知企业资产观测值 $Y_t = Z_t + U_t$ 的条件下, $\tau > t$, 真实资产 Z_t 的条件概率密度记为 $b(x | Y_t, Z_t, t)$, 则

$$b(x | Y_t, z_0, t) = \frac{\Psi(z_0 - V_B, x - V_B, \sigma\sqrt{t}) \phi_U(Y_t - x) \phi_Z(x)}{\phi_Y(Y_t)}, \quad (16)$$

其中, ϕ_U, ϕ_Z, ϕ_Y 分别表示 U_t, Z_t, Y_t 的正态分布密度函数, 其中 $E(U_t) = \bar{u}, E(Z_t) = mt + z_0, E(Y_t) = mt + z_0 + \bar{u}; D(U_t) = a^2, D(Z_t) = \sigma^2 t, D(Y_t) = a^2 + \sigma^2 t.$

Duffie 和 Lando^[13] 并未对引理2证明, 这里将给出证明作为补充.

证明:

$$\begin{aligned} b(x | Y_t, z_0, t) dx &= P(\tau > t, Z_t \in dx | Y_t) \\ &= \frac{P(\tau > t, Z_t \in dx, Y_t = Z_t + U_t)}{P(Y = Y_t)} \\ &= \frac{P(M_t - V_B > 0, Z_t \in dx, U_t = Y_t - x)}{P(Y = Y_t)}. \end{aligned}$$

由于 Z_t 与 U_t 相互独立,

$$\begin{aligned} P(\tau > t, Z_t \in dx | Y_t) &= \frac{P(M_t - V_B > 0, Z_t \in dx) P(U_t = Y_t - x)}{P(Y = Y_t)} \\ &= \frac{P(M_t - V_B > 0 | Z_t \in dx) P(Z_t = x) P(U_t = Y_t - x)}{P(Y = Y_t)}. \end{aligned}$$

由式(15), 则可求得

$$b(x | Y_t, z_0, t) = \frac{\Psi(z_0 - V_B, x - V_B, \sigma\sqrt{t}) \phi_U(Y_t - x) \phi_Z(x)}{\phi_Y(Y_t)}.$$

故引理2得证. \square

在 $Y = Y_t$ 条件下, t 时刻以前的无违约概率为

$$P(\tau > t | Y_t) = \int_{V_B}^{+\infty} b(z | Y_t, z_0, t) dz. \quad (17)$$

则在 $\mathfrak{R}'_t = \sigma(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}, V_B, I_{(\tau > t)} = 1)$ 信息流下, 通过观测到的含噪音信息的资产价值 Y_t 以及在 t 时刻获得的企业历史违约信息, 可以得到

定理 3 在已知 \mathfrak{R}'_t 信息流下, 真实资产 Z_t 的条件概率密度记为 $g(x | Y_t, t)$, 则

$$\begin{aligned} g(x | Y_t, \tau > t) &= \frac{b(z | Y_t, z_0, t)}{\int_{V_B}^{+\infty} b(z | Y_t, z_0, t) dz} \\ &= \frac{\sqrt{\beta_0(t)} e^{-J(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}_0)} \left[1 - \frac{\exp(-2\tilde{z}_0 \tilde{x})}{\sigma^2 t} \right]}{\exp\left(\frac{\beta_1^2(t)}{4\beta_0(t)} - \beta_3(t)\right) \Phi\left(\frac{\beta_1(t)}{\sqrt{2\beta_0(t)}}\right) - \exp\left(\frac{\beta_2^2(t)}{4\beta_0(t)} - \beta_3(t)\right) \Phi\left(\frac{\beta_2(t)}{\sqrt{2\beta_0(t)}}\right)}, \quad (18) \end{aligned}$$

其中, $\tilde{y} = y - V_B - \bar{u}, \tilde{x} = x - V_B, \tilde{z}_0 = z_0 - V_B,$

$$J(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z}_0) = \frac{(\tilde{y} - \tilde{x})^2}{2a^2} + \frac{(\tilde{z}_0 + mt - \tilde{x})^2}{2\sigma^2 t},$$

$$\begin{aligned}\beta_0(t) &= \frac{a^2 + \sigma^2 t}{2a^2\sigma^2 t}, & \beta_1(t) &= \frac{\tilde{y}}{a^2} + \frac{\tilde{z}_0 + mt}{\sigma^2 t}, \\ \beta_2(t) &= \frac{-\beta_1(t) + 2\tilde{z}_0}{\sigma^2 t}, & \beta_3(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}}{a^2} + \frac{(\tilde{z}_0 + mt)^2}{\sigma^2 t} \right).\end{aligned}$$

定理4 在 \mathfrak{R}'_t 信息流下, 企业在未来 $[t, t+T]$ 发生违约的条件概率记为 $H(Y_t, t, T)$, 则

$$H(Y_t, t, T) = \mathbb{P}(\tau \leq t+T | Y_t, \tau > t) = \int_{V_B}^{+\infty} F(T, Z_0, V_B) g(x | Y_t, \tau > t) dx. \quad (19)$$

$F(T, Z_0, V_B)$ 表示资产从 Z_0 经过 T 时间后首次穿越 V_B 的概率, 具体表达式见式(11). 定理4给出了 \mathfrak{R}'_t 不完全信息条件下, 在到期日 T 之前的企业违约概率. 取参数 $\sigma = 0.1$, $r = 0.05$, $a = 0.1$, $t = 1$, $\bar{u} = -0.005$, $Z_0 = 86.3$, 噪音资产价值信息滞后一级 $y = 86.3$, 分别取 $T = 5$, $V_B = 78$, 考察了违约边界 V_B 和到期日 T 对违约概率 $H(Y_t, t, T)$ 的影响.

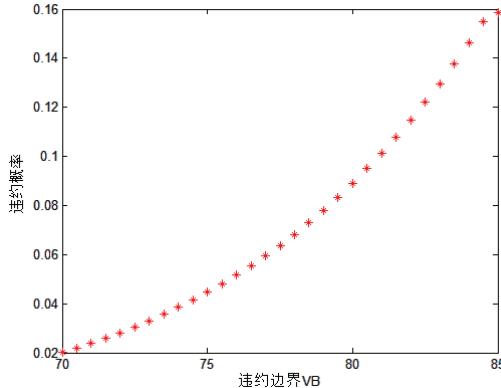


图1 违约边界对违约概率的影响

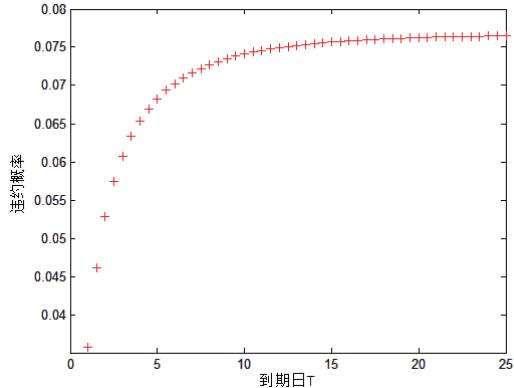


图2 到期日对违约概率的影响

由图1, 当企业的违约边界越大时, 违约概率也会越高, 当初始资产价值偏向违约边界时, 服从几何布朗运动资产价值运动路径穿越违约边界的概率也就越高. 由图2, 到期日 T 越大, 相应的违约概率也越大, 也就是说债权人持有的债券期限越长, 企业不可偿还的可能性则越大.

3.3 ρ 对违约概率的影响

以上的不完全信息主要是从会计信息透明度来对违约概率进行考虑. 但对于上市的企业, 除了这些基本面信息之外, 银行还可以通过企业的股票价格来对企业的经营进行判断. 企业的股票价格实质上是另一种信息披露. 在第2节, 通过引入股票的流通性价值MK, 假设股价与企业资产是服从相关系数为 ρ 的几何布朗运动, 以下将讨论MK与 ρ 对违约概率的影响.

定理5 给定企业的债券现金流、破产成本及税盾收益不变, 则考虑股票流通性价值MK之后, 违约边界 V_B 上升, 违约概率 H 上升.

证明: 由式(10)和式(14), MK的表达式可化简为

$$MK = \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda\bar{S})^{k+1}}{(\bar{V}-P)^k} \right] \int_0^T (1 - F(t; V; V_B)) dt.$$

由MK的定义, 可知 $MK = \max\{\lambda S - V_s, 0\}$, 又因为 $1 - F(t; V; V_B) \geq 0$, 因此

$$G = \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \left[\frac{(\lambda\bar{S})^{k+1}}{(\bar{V}-P)^k} \right] \geq 0.$$

又因为

$$\frac{\partial \int_0^T (1 - F(t; V; V_B)) dt}{\partial V} \geq 0,$$

因此

$$\frac{\partial MK}{\partial V} \geq 0.$$

又由式(14)可知

$$2G \left(w \int_0^T N(w\sigma\sqrt{t}) dt + \frac{2}{w\sigma^2} N(w\sigma\sqrt{T}) \right) = \frac{\partial MK}{\partial V} \Big|_{V=V_B} \geq 0.$$

因此加入MK后, 使得违约边界增大, 由定理4, 违约概率也越高. \square

这个结论表明, 加入了MK后, 对股东价值的衡量更加合理, 从而在计算违约概率时, 可以减小因违约概率低估造成的风险. 这也表明, 加入MK后, 正好可以缓和国内企业通常向银行夸大其经营业绩和信用实力而导致银行对企业的违约概率低估的现象.

定理 6 存在唯一的相关系数 ρ^* 使得违约边界 V_B 和违约概率 H 与 ρ 有如下关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_B}{\partial \rho} &\geq 0, & \frac{\partial H}{\partial \rho} &\geq 0, & \text{当 } \rho &\geq \rho^*; \\ \frac{\partial V_B}{\partial \rho} &\leq 0, & \frac{\partial H}{\partial \rho} &\leq 0, & \text{当 } \rho &\leq \rho^*. \end{aligned} \quad (20)$$

证明: 在股票流通性价值的度量上, ρ 通过影响 k 而影响 V_B , $\partial V_B / \partial \rho$ 可以转换为考虑 $\partial G / \partial \rho$ 的问题.

$$G = \frac{k^k}{(1+k)^{1+k}} \cdot \frac{(\lambda\bar{S})^{k+1}}{(\bar{V}-P)^k},$$

令 $K = k^k / (1+k)^{1+k}$, $\eta = \lambda\bar{S} / (\bar{V}-P)$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial k} = K\eta^k(\bar{V}-P) \left(1 + k + \ln\left(\frac{k}{1+k}\right)\eta \right).$$

当 $\eta \geq k/(1+k)$ 时, $\lambda\bar{S} \geq \bar{V}-P$, 市场处于一个正常运营的状态, 则

$$\frac{\partial G}{\partial k} \geq 0, \quad \max \left[1, \frac{1+k}{\ln(1+k) - \ln(k)} \right] \leq \eta \leq \frac{1+k}{k};$$

$$\frac{\partial G}{\partial k} \leq 0, \quad 1 \leq \eta \leq \min \left[\frac{1+k}{k}, \frac{1+k}{\ln(1+k) - \ln(k)} \right].$$

因为 $\partial k / \partial \rho \geq 0$, $(1+k)/[\ln(1+k) - \ln(k)]$ 和 $(1+k)/k$ 是关于 k 的单调函数, 因此存在唯一的一个 ρ^* 使得 $\partial k / \partial \rho$ 正负转换, 又因为

$$\frac{\partial \int_0^T (1 - F(t; V; V_B)) dt}{\partial V} \geq 0,$$

因此唯一存在 ρ^* 使得结论成立. \square

这个结论表明, 当 ρ 向 1 或 -1 靠近时, 违约边界越大, 由定理 4, 违约概率也随着增大. 其经济含义是, ρ 向 1 或 -1 靠近时, 企业资产价值和股价的波动更加相关, 因此, 银行在进行贷款决策时, 可以通过此相关关系算出的违约概率来减小因违约概率低估造成的风险.

§4. 结束语

传统的结构化模型在设定违约边界时, 往往没有考虑股票的流通价值属性. 本文在首次通过模型的违约边界设定上, 将股票流通所产生的金融属性溢价考虑在内, 建立了更加合理的模型. 并且在违约概率的研究上, 基于财务报表及信用记录设立了企业的不完全信息集, 给出了违约概率.

本文在研究股票的流通性价值对违约概率的影响上, 提供了一个新的思路, 即利用股价和资产价值的相关性研究对违约概率的影响. 结果也表明, 当股价和企业资产更加相关时, 违约概率也会越大. 本文只考虑了企业单一发行到期日为 T 的债券, 且只研究企业之前未发生过违约的情形, 假设比较简单, 未来的研究可以进一步完善.

参 考 文 献

- [1] Crouhy M, Galai D, Mark R. A comparative analysis of current credit risk models [J]. *J. Bank. Financ.*, 2000, **24(1-2)**: 59–117.
- [2] Merton R C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates [J]. *J. Finance*, 1974, **29(2)**: 449–470.
- [3] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *J. Polit. Econ.*, 1973, **81(3)**: 637–654.
- [4] Jones E P, Mason S P, Rosenfeld E. Contingent claims analysis of corporate capital structures: an empirical investigation [J]. *J. Finance*, 1984, **39(3)**: 611–625.
- [5] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions [J]. *J. Finance*, 1976, **31(2)**: 351–367.
- [6] Giesecke K. Correlated default with incomplete information [J]. *J. Bank. Financ.*, 2004, **28(7)**: 1521–1545.

- [7] Leland H E. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure [J]. *J. Finance*, 1994, **49**(4): 1213–1252.
- [8] Leland H E, Toft K B. Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads [J]. *J. Finance*, 1996, **51**(3): 987–1019.
- [9] 程功, 张维, 熊熊. 信息噪音、结构化模型与银行违约概率度量 [J]. 管理科学学报, 2007, **10**(4): 38–48.
- [10] 崔长峰, 刘海龙. 资产价值分解与公司债务定价 [J]. 管理科学学报, 2013, **16**(10): 51–62.
- [11] Merton R C. *Continuous-Time Finance* [M]. Oxford: Wiley-Blackwell, 1992.
- [12] Harrison J M. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems* [M]. New York: Wiley, 1985.
- [13] Duffie D, Lando D. Term structures of credit spreads with incomplete accounting information [J]. *Econometrica*, 2001, **69**(3): 633–664.

The Study of Default Probability under Incomplete Information Based on Structural Model

LI XiuQiong CHEN ShaoGang

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China,
Chengdu, 611731, China)

Abstract: This paper establish a first passage time model based on the Merton's structural model by using the method of geometric Brownian motion. In this paper, we consider the accounting noise and historical default record and then introduce a new incomplete information hypothesis. Besides, we introduce the stock's liquidity value into the model, and apply its method measurement which based on Merton's structural model to the first passage time model to obtain the endogenous default boundary. Based on the incomplete information, the conditional default probability is derived by using the default boundary. And at the last of this passage, we analysis the effect of the correlation between stock's price and company assets on the default probability.

Keywords: structural model; incomplete information; default probability; first passage time model; default boundary

2010 Mathematics Subject Classification: 62E20