

次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价 *

程志勇¹ 郭精军^{1,2*} 张亚芳¹

(¹ 兰州财经大学统计学院, 兰州, 730020; ² 兰州财经大学甘肃经济发展数量分析研究中心, 兰州, 730020)

摘要: 本文主要建立了次分数布朗运动下的期权定价模型, 并且考虑了支付连续红利的情形. 首先利用 Wick-Itô 积分和偏微分方法得到了期权价格所满足的偏微分方程, 然后经过变量替换转化为 Cauchy 问题, 从而得到了支付红利的次分数布朗运动环境下的欧式看涨期权定价公式, 相应地根据看涨看跌定价公式, 得出欧式看跌期权定价公式. 最后, 对定价模型中的参数进行估计, 并讨论了估计量的无偏性和强收敛性.

关键词: 次分数布朗运动; 支付红利; 期权定价; 参数估计

中图分类号: O212.6

英文引用格式: Cheng Z Y, Guo J J, Zhang Y F. Pricing of European option in sub-fractional Brownian motion with dividend payments [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2018, 34(1): 37-48. (in Chinese)

§1. 引言

传统的期权定价模型是在有效的市场假设之下, 认为金融资产的价格波动是相互独立的, 即服从几何布朗运动, 其对数收益率是相互独立的随机变量, 并且服从正态分布. Greene 和 Fielitz^[1] 通过 R/S 算法, 检测纽约交易所 200 种股票的日收益率, 发现它们具有明显的长记忆, 之后很多学者通过大量的研究实验, 都发现了股票价格波动的长记忆. 为了更好地刻画金融资产价格变动的规律, 许多学者尝试把分数布朗运动应用到经济现象中, 这一想法首先由 Mandelbrot^[2] 在 1963 年提出. 之后很多学者开始研究分数布朗运动下的期权定价问题. 由于分数布朗运动不是半鞅, 所以已有的随机积分方法已不再适用, Lin^[3] 提出了路径积分下的分数布朗运动环境下的期权定价模型. Duncan 等^[4] 提出 Wick 乘积的随机积分方法, Cheridito^[5] 研究表明: 在该积分下, 套利依然存在; Björk 和 Hult^[6] 在 Wick 自融资策略下, 得到的期权定价模型并没有经济意义, 因此也不能将他们应用到实际金融中来消除套利, 一些学者开始建立次分数布朗运动来刻画金融资产价格的变化, 次分数布朗运动是比分数布朗运动更为一般的高斯过程, 其性质也类似于分数布朗运动, 不仅

*国家自然科学基金项目(批准号: 71561017)、甘肃省自然科学基金项目(批准号: 145RJZA033) 和甘肃经济发展数量分析研究中心项目(批准号: SLYB201202) 资助.

*通讯作者, E-mail: guojj@lzu.edu.cn.

本文 2016 年 1 月 31 日收到, 2017 年 3 月 22 日收到修改稿.

具有自相似、长相依的性质, 其退化速度也比分数布朗运动快, 与分数布朗运动最主要的不同是其增量是非平稳的^[7].

由于传统的 B-S 期权定价模型假设基础资产不支付红利, 这与实际情况不符. 现实中, 股东有权利要求公司支付红利, 这就导致了 B-S 期权定价模型与实际应用的偏差. 1985 年 McDonald 和 Siegel^[8] 给出支付红利的期权定价公式, 随后大量文献^[9,10] 开始对美式、欧式支付红利的期权定价进行研究. 文献 [11] 对次分数布朗运动环境下带有交易费用的备兑权证进行了定价, 给出了模型中未知参数的估计值和实证分析. 文献 [12] 和 [13] 用随机游走的方法分别去逼近分数布朗运动和次分数布朗运动, 然后采用极大似然法对漂移项的参数进行估计, 并证明了估计量的收敛性和强一致性.

为了刻画金融资产的长记忆性和考虑期权标的资产股票连续支付红利的情况, 本文考虑在次分数布朗运动环境下研究欧式期权定价的问题. 首先通过次分数布朗运动随机积分和偏微分方法, 得到次分数布朗运动下支付红利的欧式看涨和看跌期权定价公式; 其次, 对定价公式中的未知参数进行估计, 并研究了估计量的相关性质.

§2. 预备知识

次分数布朗运动是 Hurst 指数为 H ($H \in (0, 1)$) 的连续高斯过程 $\{\xi^H(t), t \in R\} = 0$ ^[7], 其期望值为 $E[\xi^H(t)] = 0$, 其协方差为

$$E[\xi_t^H \xi_s^H] = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}(|t+s|^{2H} + |t-s|^{2H}).$$

次分数布朗运动满足如下的性质^[7]

- 1) 自相似: 当 $a > 0$ 时, 有 $\{\xi^H(at), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{a^H \xi^H(t), t \geq 0\}$;
- 2) 长相依: 当 $H > 1/2$ 时, $\xi^H(t)$ 有长期依赖性, 即若令 $r(n) = \text{Cov}(\xi^H(1), \xi^H(n+1) - \xi^H(n))$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty;$$

- 3) 对任意的 $t > 0$ 和 $H \in (0, 1)$, $E[\xi_t^H]^2 = (2 - 2^{2H-1})t^{2H}$.

§3. 定价模型

3.1 模型假设

在建立定价模型之前, 需要对金融市场做如下几点基本的假设:

- 1) 市场是完备的, 所有未定权益都是可复制的;
- 2) 市场不存在套利;

- 3) 无风险利率 r 是一个常数, 且任何时期的借贷利率是相等的;
- 4) 市场是无摩擦的, 即无税收成本和交易成本;
- 5) 基础资产可以连续进行交易, 且无卖空限制;
- 6) 在期权存续期间, 公司股票支付红利, 且期权为欧式期权;
- 7) 考虑金融市场上存在可自由、连续地进行交易的两种资产. 一种是无风险资产, 如债券; 另一种是有风险资产, 如股票. 假设这两种资产价格的变动分别满足以下微分方程

$$dP_t = rP_t dt, \quad (1)$$

$$dS_t = S_t(\mu - q)dt + \sigma S_t d\xi_t^H, \quad (2)$$

其中, μ (常数) 表示股票收益率, q (常数) 表示红利率, σ (常数) 表示股价波动率, S_t 表示 t 时刻股票的价格, ξ_t^H 表示次分数布朗运动, 且 (2) 式中的积分为关于 Wick-Itô 的积分.

3.2 数理推导

由于要考虑金融资产的长记忆性, 本文主要考虑 $1/2 < H < 1$ 的情形. 在风险中性的条件下, 利用 Delta 对冲原理, 推导出次分数布朗运动下支付红利的欧式期权价格所满足的微分方程.

定理 1 在风险中性的条件下, 次分数布朗运动环境下支付红利的欧式看涨期权的价格 V_t 在 t ($t \in [0, T]$) 时刻所满足的微分方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV_t = 0. \quad (3)$$

证明: 构建资产组合, 该组合包括一份衍生证券 $V(S_t, t)$ 和 Δ 份股票 S_t . 则资产组合在 t 时刻的价值可表示为 $\Pi_t = V_t - \Delta S_t$, 由于考虑到连续支付红利的情形, 则在 dt 时间内资产组合的价值变动可表示为

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta dS_t - \Delta q S_t dt. \quad (4)$$

由于 $V(S_t, t)$ 是二元可微函数, 故利用 Wick-Itô 公式可得

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2, \quad (5)$$

其中 $(dS_t)^2 = 2\sigma^2 S_t^2 H t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) dt$, $dt \cdot dt = 0$, $dt \cdot d\xi_t^H = 0$, $d\xi_t^H \cdot dt = 0$, $(d\xi_t^H)^2 = 2H t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) dt$.

把 (2) 式和 (5) 式代入到 (4) 式经化简可得

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) S_t (\mu - q) + \sigma^2 S_t^2 H t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta q S_t \right] dt \\ & + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S_t d\xi_t^H. \end{aligned} \quad (6)$$

为了消除随机项对证券组合价值的影响, 令 $\Delta = \partial V / \partial S$, 则 (6) 式可化简为

$$d\Pi_t = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 H t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial V}{\partial S} q S_t \right] dt. \quad (7)$$

由于假设在无风险的条件下, 投资组合价值的变动满足

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r(V_t - \Delta S_t) dt. \quad (8)$$

由 (7) 式与 (8) 是联立可得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H (2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V_t = 0.$$

证毕. \square

下面给出次分数布朗运动环境下支付连续红利欧式看涨期权价格公式.

定理 2 设到期日为 T , 执行价格为 K , 则次分数布朗运动模型下基础资产支付连续红利欧式看涨期权在 t ($t \in [0, T]$) 时刻的价格 V_t 为

$$V(S_t, t) = e^{-q(T-t)} S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - q)(T - t) + \frac{1}{2} \sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sqrt{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}, \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}. \end{aligned}$$

证明: 由定理 1 可知欧式看涨期权的价格 V_t 满足的微分方程为 (3), 即

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H (2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r V_t = 0, \\ V(S_T, T) = (S_T - K)^+. \end{cases}$$

利用变量替换, 将 (3) 式转化为一个 Cauchy 问题.

使用文献 [10] 中方法, 令 $S_t = S = e^x$, $V(S_t, t) = C(t, x)$, 则 $x = \ln S$,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{1}{S^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \frac{1}{S^2} = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{1}{S^2}.$$

将以上式子代入(3)式化简可得

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - q) \frac{\partial C}{\partial x} + \sigma^2 H (2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) - rC = 0, \\ C(T, x) = (\mathrm{e}^x - K)^+. \end{cases} \quad (10)$$

令

$$\begin{aligned} u(s, z) &= C(t, x) \mathrm{e}^{r(T-t)}, \\ s &= \frac{1}{2} \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H}), \\ z &= x + (r - q)(T - t) - \frac{1}{2} \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H}). \end{aligned} \quad (11)$$

则

$$\begin{aligned} C(t, x) &= u(s, z) \mathrm{e}^{-r(T-t)}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \left[ru + H \sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} (r - q) \right], \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

将上述式子代入到(10)中, 化简可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial s}, \\ u(0, z) = (\mathrm{e}^z - K)^+. \end{cases} \quad (12)$$

根据热传导方程经典理论, 其存在唯一强解, 从而

$$u(s, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, \tau) \mathrm{e}^{-(\tau-z)^2/(4s)} d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^\tau - K)^+ \mathrm{e}^{-(\tau-z)^2/(4s)} d\tau.$$

故

$$\begin{aligned} V(t, S_t) &= C(t, x) = u(s, z) \mathrm{e}^{-r(T-t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K}^{+\infty} (\mathrm{e}^\tau - K)^+ \mathrm{e}^{-(z-\tau)^2/(4s)} d\tau \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K}^{+\infty} \mathrm{e}^\tau \mathrm{e}^{-(z-\tau)^2/(4s)} d\tau - \frac{K \mathrm{e}^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(z-\tau)^2/(4s)} d\tau \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \quad (13)$$

对于 I_2 , 令 $y = (\tau - z)/\sqrt{2s}$, 则 $\sqrt{2s} dy = d\tau$, 从而有

$$I_2 = \frac{K \mathrm{e}^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\tau-z)^2/(4s)} d\tau = \frac{K \mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln K - z)/\sqrt{2s}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} dy$$

$$= K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{z - \ln K}{\sqrt{2s}}\right).$$

同理, 对 I_1 , 令 $\omega = (\tau - z - 2s)/\sqrt{2s}$, 则 $\sqrt{2s} d\omega = d\tau$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K}^{+\infty} e^\tau e^{-(z-\tau)^2/(4s)} d\tau = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} e^{z+s} \int_{(\ln K-z-2s)/\sqrt{2s}}^{+\infty} e^{-\omega^2/2} d\omega \\ &= e^{-r(T-t)} e^{z+s} \Phi\left(\frac{z + 2s - \ln K}{\sqrt{2s}}\right). \end{aligned}$$

将 s, z 的表达式, 即 (11) 式代入到 I_1, I_2 中, 然后在将 I_1, I_2 代入到 (13) 式中, 则结果可得. 证毕. \square

使用相同的方法可以类似得到次分数布朗运动模型下带支付红利的欧式看跌期权定价公式.

定理 3 设到期日为 T , 执行价格为 K , 则次分数布朗运动模型下基础资产支付连续红利的欧式看跌期权在 t ($t \in [0, T]$) 时刻的价格 P_t 为

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - e^{-q(T-t)} S_t \Phi(-d_1).$$

定理 3 的证明与定理 2 类似, 且其中 d_1 和 d_2 的表达式与定理 2 中的相同. 由定理 2 和 3 可以得到下面的推论.

推论 4 欧式看涨和欧式看跌期权的价格满足下面重要的关系

$$V_t + K e^{-r(T-t)} = P_t + S_t e^{-q(T-t)}.$$

称该式为看涨看跌期权平价公式.

§4. 参数估计

为了将模型应用于期权定价中去, 需要对 (2) 中的参数进行估计. 假设 $[0, T]$ 上有 N 个离散观察时刻点 t_i , $i = 0, 1, \dots, N - 1$, 在每个观察点上可以得到股票价格的观察量.

4.1 波动率 σ 的估计

根据 (2) 式, 对其变形可得出:

$$\sigma = \frac{dS_t - (u - q)S_t dt}{S_t d\xi_t^H}.$$

等式两边平方, 并做简单的计算可得:

$$\sigma^2 = \frac{(dS_t)^2}{(2 - 2^{2H-1})S_t^2 dt^{2H}}.$$

然后对上式进行离散化处理, 共有 N 个离散的观察点 $t_i, i = 0, 1, \dots, N - 1$, 从而得到股票价格的 N 个观察量, 为简化符号, 记 $t_i = t_{i/N} = i/N$, 最终求得的波动率 σ^2 的估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N^{2H}}{(2 - 2^{2H-1})(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{S_{(i+1)/N} - S_{i/N}}{S_{i/N}} \right)^2.$$

4.2 收益率 μ 的估计

采用 Wick-Itô 积分, 可得随机微分方程 (2) 的解为

$$S_t = S_0 \exp \left[(\mu - q)t + \sigma \xi_t^H - \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) t^{2H} \right]. \quad (14)$$

将模型 (14) 中的参数估计问题等价地转化为对带漂移项的次分数布朗运动进行参数估计

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = Y_t = (\mu - q)t + \sigma \xi_t^H - \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) t^{2H}. \quad (15)$$

假设已知的观察量为 Y_{t_i} , 用随机游走来逼近次分数布朗运动, 然后用极大似然估计法对 (15) 式进行参数估计. 事实上, 当 $H > 1/2$ 时, 次分数布朗运动可以用如下形式的随机游走来逼近^[13]

$$\xi_t^{H,N} := \sum_{i=1}^{[Nt]} \sqrt{N} \left(\int_{(i-1)/N}^{i/N} c(H) n_H \left(\frac{[Nt]}{N}, s \right) ds \right) \varsigma_i, \quad t \in [0, T],$$

其中

$$\begin{aligned} c(H) &= \sqrt{\frac{\Gamma(1+2H) \sin(\pi H)}{\pi}}, \\ n_H(t, s) &= \frac{2^{1-H} \sqrt{\pi} s^{3/2-H}}{\Gamma(H-1/2)} \left(\int_s^t (x^2 - s^2)^{H-3/2} dx \right) I_{(0,t)}(s), \end{aligned}$$

ς_i 表示独立同分布的随机变量, 且 $E[\varsigma_i] = 0, \text{Var}[\varsigma_i] = 1$, $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 文献 [13] 已经证明当 $N \rightarrow \infty$ 时, 序列 $\xi_t^{H,N}$ 在 Skorohod 拓扑下弱收敛于次分数布朗运动 ξ_t^H .

根据观察值和次分数布朗运动的随机游走逼近形式, (15) 式微分之后离散化可表示为

$$Y_{t_{i+1}}^{(N)} := Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + (u - q)(t_{i+1} - t_i) + \sigma (\xi_{t_{i+1}}^{H,N} - \xi_{t_i}^{H,N}) - \frac{\sigma^2}{2} (\xi_{t_{i+1}}^{H,N} - \xi_{t_i}^{H,N})^2.$$

令 $t_i = i/N, i = 0, 1, \dots, N - 1, Y_{t_0} = Y_0 = 0$ 为简化记号, 记 $Y_{t_i} = Y_i$. 类似地使用文献 [13–16] 中的处理方法可将上式化简为

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \frac{\mu - q}{N} + \sigma (\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N}) - \frac{\sigma^2}{2} E[(\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N})^2] \\ &= Y_i + \frac{\mu - q}{N} + \sigma (f_i + F_i \varsigma_{i+1}) - \frac{\sigma^2}{2} E[(f_i + F_i \varsigma_{i+1})^2], \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} f_i &= \sqrt{N} c(H) \sum_{j=1}^i \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left(n_H\left(\frac{i+1}{N}, s\right) ds - n_H\left(\frac{i}{N}, s\right) ds \right) \varsigma_j, \\ F_i &= \sqrt{N} \int_{i/N}^{(i+1)/N} c(H) n_H\left(\frac{i+1}{N}, s\right) ds, \\ \mathbb{E}[Y_{i+1} - Y_i] &= \frac{\mu - q}{N} + \sigma f_i - \frac{\sigma^2}{2} (f_i^2 + F_i^2), \\ \text{Var}[Y_{i+1} - Y_i] &= \sigma^2 F_i^2. \end{aligned}$$

从而给定 $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_i$, 则随机变量 Y_{i+1} 在已知 Y_1, Y_2, \dots, Y_i 下的条件分布为

$$\begin{aligned} &f_{Y_{i+1}/Y_1, Y_2, \dots, Y_i}(y_{i+1}/y_1, y_2, \dots, y_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 F_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y_{i+1} - y_i - (\mu - q)/N - \sigma f_i + \sigma^2(f_i^2 + F_i^2)/2)^2}{\sigma^2 F_i^2} \right], \end{aligned}$$

Y_1, Y_2, \dots, Y_N 的极大似然函数为

$$\begin{aligned} &L(\mu, q, \sigma; y_1, y_2, \dots, y_N) \\ &= f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2/Y_1}(y_2/y_1) \dots f_{Y_N/Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}}(y_N/y_1, y_2, \dots, y_{N-1}) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 F_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y_{i+1} - y_i - (\mu - q)/N - \sigma f_i + \sigma^2(f_i^2 + F_i^2)/2)^2}{\sigma^2 F_i^2} \right]. \end{aligned}$$

等式两边取对数可以得到对数似然函数, 由对数似然函数分别对 μ, σ 求偏导, 可得到相应的极大似然估计量满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_{i+1} - y_i - (\mu - q)/N - \sigma f_i + \sigma^2(f_i^2 + F_i^2)/2}{\sigma F_i} \right) \\ \quad \cdot \left(\frac{f_i^2 + F_i^2}{2F_i} - \frac{y_{i+1} - y_i - (\mu - q)/N}{F_i \sigma^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_{i+1} - y_i - (\mu - q)/N - \sigma f_i + \sigma^2(f_i^2 + F_i^2)/2}{\sigma F_i} \right) \cdot \frac{1}{NF_i \sigma} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

对上述方程组求解可得极大似然估计量为

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \left(N \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_{i+1} - y_i - \sigma f_i + \sigma^2(f_i^2 + F_i^2)/2}{F_i^2} \right) / \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right) + q, \\ \hat{\sigma} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1} f_i + F_i \varsigma_{i+1}^2}{F_i} - N \right) / \left(\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1} (f_i^2 + F_i^2)}{F_i} \right). \end{cases}$$

显然, 运用上述两种不同的估计方法得到的波动率 σ 的估计量是不同的, 但不能笼统地说哪种估计方法好, 这取决于估计量的收敛性.

4.3 估计量的性质

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 容易验证: 估计量 $\hat{\sigma}^2$ 几乎处处收敛于 σ^2 . 下面主要证明估计量 $\hat{\mu}$ 的无偏性、均方收敛性, 为计算方便, 在证明时令 $\sigma = 1$.

定理 5 估计量 $\hat{\mu}$ 是无偏的, 即 $E(\hat{\mu}) = \mu$.

证明: 由 (16) 式可得

$$y_{i+1} - y_i - \sigma f_i + \frac{\sigma^2}{2}(f_i^2 + F_i^2) = \frac{\mu - q}{N} + \sigma F_i \varsigma_{i+1},$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= N \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\mu - q)/N + \sigma F_i \varsigma_{i+1}}{F_i^2} \right) / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right) + q = \mu + \left(N \sigma \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1}}{F_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right), \\ E(\hat{\mu}) &= \mu + E \left[\left(N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1}}{F_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right) \right] = \mu + N \left[E \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1}}{F_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right) \right] = \mu. \end{aligned}$$

证毕. \square

定理 6 当 $N \rightarrow \infty$, 极大似然估计量 $\hat{\mu}$ 均方收敛于 u .

证明: 事实上, 容易得到

$$E(\hat{\mu} - \mu)^2 = E \left[\left(N \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\varsigma_{i+1}}{F_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right) \right]^2 = N^2 / \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{F_i^2} \right).$$

运用次分数布朗运动的协方差公式和性质 (3) 可知, 次分数布朗运动的二阶矩增量的期望为

$$E[(\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N})^2] = -2^{2H-1} \left[\left(\frac{i+1}{N} \right)^{2H} + \left(\frac{i}{N} \right)^{2H} \right] + \left(\frac{i+1}{N} + \frac{i}{N} \right)^{2H} + \frac{1}{N^{2H}}.$$

当 $1/2 < H < 1$ 时, 有下述不等式成立

$$(2 - 2^{2H-1}) \left(\frac{i+1}{N} - \frac{i}{N} \right)^{2H} \leq E[(\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N})^2] \leq \left(\frac{i+1}{N} - \frac{i}{N} \right)^{2H},$$

即

$$\frac{2 - 2^{2H-1}}{N^{2H}} \leq E[(\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N})^2] \leq \frac{1}{N^{2H}}.$$

由文献 [16] 可知

$$F_i^2 + E(f_i^2) \leq E[(\xi_{(i+1)/N}^{H,N} - \xi_{i/N}^{H,N})^2] \leq \frac{1}{N^{2H}},$$

所以

$$F_i^2 \leq \frac{1}{N^{2H}}.$$

从而, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$E(\hat{\mu} - \mu)^2 \leq \frac{1}{N^{2H-1}} = 0.$$

定理可证. 证毕. \square

§5. 实证分析

5.1 参数求解

本文采用深证成指 2016 年 6 月 1 日到 2016 年 11 月 28 日的收盘价, 对参数进行估计. 数据来源于财富通数据库, 支付红利率 $q = 0.06$ 已给定, 假设 $H = 0.75$, 用蒙特卡洛方法对未知参数进行估计. 得到 μ 的估计值 $\bar{\mu} = 0.0004$, σ 的估计值 $\bar{\sigma} = 0.02$.

5.2 股价模拟结果

令初始值 $i = 1$, 利用 R 语言对 (14) 和 (16) 式进行编程, 取深证成指股票在 2016 年 6 月 1 日的收盘价 10159.93 元作为 S_t , 利用 R 程序由 S_t 求得 $S_{t+\Delta t}$, 再由 $S_{t+\Delta t}$ 求得 $S_{t+2\Delta t}$, 依次类推, 直到 $S_{t+n\Delta t} = S_T$, 因此得到股票价格离散时间序列 $\{S_{t+i\Delta t}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 进而可得到一条股价变动的路径. 经典的 B-S 模型股价运动模拟也采取相同的方法. 经典的 B-S 模型和支付红利的次分数布朗运动模型模拟的股价变动与真实股价变动如下图 1 所示:

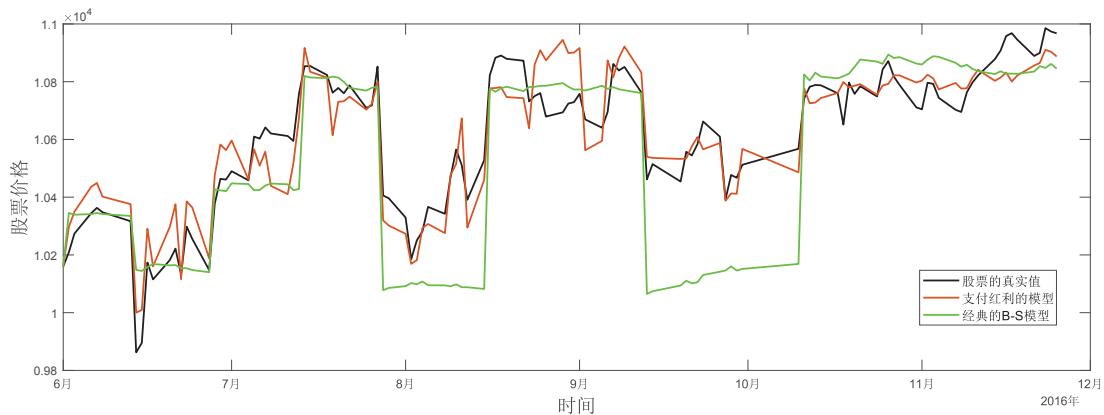


图 1 经典的 B-S 模型和本文支付红利的模型模拟股价路径与真实值对比图

5.3 误差分析

表 1 各模型的基本情况统计

	股票实际价格	经典 B-S 模型模拟价格	支付红利模型模拟价格
均值	10 617.20092	10 541.68897	10 621.87502
最大值	11 036.53	10 894.0278	11 082.41101
最小值	9 862.58	10 064.85379	10 000.25361
中位数	10 714.795	10 785.83715	10 891.585
标准差	248.154954151	318.284445897	235.37507198

由表可知, 支付红利的次分数布朗运动模型模拟股票价格的均值、最大值和最小值, 都比经典的 B-S 模型更加地接近真实值, 且其模拟标准差更小.

5.4 结论

由图 1 和表 1 可知, 采用支付红利的次分数布朗运动来模拟股票价格的结果比经典的 B-S 模型更加地接近真实值, 且其模拟误差较小. 由于期权是由风险资产股票和无风险资产组成, 所以期权的价格变动主要依赖于股票价格, 对股价模拟越准确, 则期权值的模拟也就越准确. 基于此, 可以说明本文所提出的模型比经典的 B-S 模型能较好地反映股票的整体走势, 因而其计算期权值也更加的准确.

参 考 文 献

- [1] Greene M T, Fielitz B D. Long-term dependence in common stock returns [J]. *J. Financ. Econ.*, 1977, **4**(3): 339–349.
- [2] Mandelbrot B B. *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* [M]. New York: Springer, 1997.
- [3] Lin S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motions [J]. *Stochastics Stochastics Rep.*, 1995, **55**(1-2): 121–140.
- [4] Duncan T E, Hu Y Z, Pasik-Duncan B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I: theory [J]. *SIAM J. Control Optim.*, 2000, **38**(2): 582–612.
- [5] Cheridito P. Arbitrage in fractional Brownian motion models [J]. *Finance Stoch.*, 2003, **7**(4): 533–553.
- [6] Björk T, Hult H. A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model [J]. *Finance Stoch.*, 2005, **9**(2): 197–209.
- [7] Tudor C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion [J]. *Stochastics*, 2007, **79**(5): 431–448.
- [8] McDonald R L, Siegel D R. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down [J]. *Internat. Econom. Rev.*, 1985, **26**(2): 331–349.
- [9] 吴金美, 金治明, 刘旭. 支付连续红利的欧式和美式期权定价问题的研究 [J]. 经济数学, 2007, **24**(2): 147–152.
- [10] 陈飞跃, 杨蓉, 龚海文. 混合分数布朗运动环境下欧式期权定价 [J]. 经济数学, 2014, **31**(3): 9–13.
- [11] 肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价 [J]. 中国管理科学, 2014, **22**(5): 1–7.
- [12] Bertin K, Torres S, Tudor C A. Maximum-likelihood estimators and random walks in long memory models [J]. *Statistics*, 2011, **45**(4): 361–374.
- [13] Kuang N H, Xie H T. Maximum likelihood estimator for the sub-fractional Brownian motion approximated by a random walk [J]. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 2015, **67**(1): 75–91.
- [14] 郭精军, 田婧. 分式布朗运动模型下的金融市场风险度量——以上证指数为例 [J]. 兰州商学院学报, 2014, **30**(2): 89–94.

- [15] 毛小丽, 孔凡胜, 郭精军. 分式布朗运动金融模型中的参数估计 [J]. 统计与决策, 2016, **23**: 25–28.
[16] 张卫国, 肖炜麟. 分数布朗运动下股本权证定价研究 —— 模型与参数估计 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.

Pricing of European Option in Sub-fractional Brownian Motion with Dividend Payments

CHENG ZhiYong¹ GUO JingJun^{1,2} ZHANG YaFang¹

(¹School of Statistics, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou, 730020, China)

(²Reserch Center of Quantitative Analysis of Gansu Economic Development, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou, 730020, China)

Abstract: In this paper, we establish the option pricing model under sub-fractional Brownian motion, and consider the situation of the continuous dividend payments. Firstly, Wick-Itô integral and partial differential method are used to get the option price of partial differential equation, and then through variable substitution into Cauchy problem, we can get the pricing formula of European call option with dividend-paying in sub-fractional Brownian motion environment. According to the pricing formula of European call option, the European put option pricing formula is obtained. Moreover, we study the parameter estimation in the model, and consider the unbiasedness and the strong convergence of the estimator.

Keywords: sub-fractional Brownian motion; dividend payment; options pricing; parameter estimation

2010 Mathematics Subject Classification: 60G22; 91G10; 91G60