应用概率统计 第 34 卷
第 2 期 2018 年 4 月
Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2018, Vol. 34, No. 2, pp. 135-144
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2018.02.002

# 一种基于多维尾条件期望的扩散模型检验方法 *

王 骏 陈 萍⋆
(南京理工大学理学院, 南京, 210094)

**摘 要:** 为了解决多维扩散模型的设定检验问题, 我们基于多维尾条件期望 (CTE) 制定了一个检验统计量. 虽然不能直接估计出多维扩散模型的转移密度矩阵, 但是可以估计出每个分量的转移密度, 再通过 CTE 将每个分量联合起来, 建立了一个真正的多维统计量. 最后通过仿真模拟评估了该检验方法的检验的性能.

**关键词:** 扩散模型; 模型设定检验; 多维; 尾条件期望
**中图分类号:** O212.7

**英文引用格式:** WANG J, CHEN P. A test for diffusion model based on multi-dimensional tail condition expectations [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(2): 135–144. (in Chinese)

## §1. 引 言

扩散型模型在工程、经济、军事等社会科学与自然科学领域内具有广泛应用, 已成为当前关注的热点. 尤其在金融数学中, 基础变量的动态规律往往用扩散型模型描述. 在经济理论中通常并没有对模型给予具体的设定, 所以研究者经常使用简单的设定来推导各类证券价格的封闭解. 例如, 金融数学理论表明, 当基础股票价格服从几何 Brown 运动时, 欧式期权的价格可由股票现价和方程的波动率参数确定出来. 但许多实证分析亦表明, 几何 Brown 运动并不是股票价格波动规律的理想模型. 描述股票价格过程的扩散方程的漂移系数和扩散系数很可能是时间和价格的非线性函数甚至是由其它随机源驱动的随机过程, 分别对应着时变扩散或随机波动率模型. 模型的错误设定往往造成模型参数及方差协方差矩阵的估计不相容, 从而对推断和检验造成误导. 进一步, 错误拟合的模型可能会导致衍生产品定价、套期保值以及风险管理上的重大失误. 因此, 检验一个参数模型是否能够充分描述基础变量的实际动态是非常必要的.

最近二十年来, 已经有大量的文献研究扩散型模型的参数或非参数估计问题, 不过直到 Aït-Sahalia [1] 在其开拓性的工作中, 才第一次对一维扩散模型进行了非参数检验, 文中通过边缘密度来构造检验统计量, 因为边缘密度完全是由漂移和扩散函数决定的. 但该检

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11271189) 资助.
⋆通讯作者, E-mail: pro123@mail.njust.edu.cn.
本文 2015 年 8 月 29 日收到, 2017 年 3 月 1 日收到修改稿.

验的某些局限性会影响到其实证效果. 首先, 边际密度函数并不能完全表示出基础变量过程的动态特征, 它无法辨别两个具有相同边际密度函数、但转移密度函数不同的扩散模型. 其次, 由于扩散过程样本数据的持久相依性以及密度核估计量的收敛速度慢, 其有限样本性质不好. 此外, Pritsker[2] 发现对经验相关 Vasicek 模型, 检验有过分拒绝零假设的趋势.

不同于 Aït-Sahalia 基于边缘密度的检验法, Hong 和 Li[3] 提出了基于转移密度函数的非参数检验方法, 他们没有直接估计转移密度函数, 而是转化为广义残差序列, 然后通过检验广义残差序列是否服从 $\mathrm{U}[0,1]$ 分布来检验假设的真伪, 但是这个方法会过分接受原假设. 所以, 陈萍等[4] 对此方法进行了改进与优化, 提出了广义残差拟合优度检验法. 同样是利用基础变量过程的转移密度构造检验统计量, 但与 Hong 和 Li 的思路不同, Chen 等[5] 提出了一种直接针对过程转移密度的检验. 其检验统计量相当于核转移密度估计量和过程对应的参数转移密度之间的距离的标准化. 不过, 他们的工作仅停留在一维阶段. 因为多维转移密度不具有一般的解析形式. 上述提到的工作主要是在针对一维情形下的工作, 对于多维模型下的检验问题, 由于维数灾难, 以及多维情形下一些参数难以估计或者近似, 到目前为止, 对于多维扩散模型的设定检验问题并没有什么大的突破. Hong 和 Li 在同一篇文献中把针对一维问题的方法拓展到了多维情形下, 但是效果并不理想. Song[6] 另辟蹊径, 不同于以往的方法, 他提出的基于鞅方法的检验方法, 通过鞅变换将多维检验问题分解为多个一维检验.

本文中基于条件尾分布直接通过转移概率密度函数来构造检验统计量. CTE (Conditional-Tail-Expectation) 是一个比较新的工具, 原本是应用在风险度量问题中的. Di Bernardino 和 Prieur[7] 首次提出了多维条件尾期望 CTE 的概念. CTE 有以下几个优势, 首先, CTE 本身就是针对多维问题, 所以不需要考虑一维到多维的拓展问题, 很多方法从一维情形拓展到多维情形时往往实现不了, 或者效果会变的没有那么显著, 上述提到的方法就遇到了这样的问题. 其次, CTE 要求应用的对象是非负, 且绝对连续可测的. 而扩散过程中的转移密度正好完美地符合了这个要求. 最后, CTE 本身包含了各个分变量的信息, 比起 Song 的方法检验过程得到了大大的简化. 本文的结构如下. 第 2 部分介绍设定检验的过程. 第 3 部分是一些假设和结果. 第 4 部分进行了数值实验来检验该方法的功效. 第 5 部分给出总结.

## §2. 检验过程

### 2.1 问题的提出和转移密度的估计

如果随机变量 $X_t$ 满足下列等式

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t, \tag{1}$$

则 $X_t$ 是一个扩散过程, 这个方程被称为随机微分方程, 其中 $\mu(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 分别是漂移项和扩散项, $X_t$ 和 $\mu(X_t)$ 是 $m\times 1$ 的向量, $\sigma(X_t)$ 是 $m\times m$ 的矩阵, $B_t$ 也是 $m\times 1$ 的向量.

设定一个参数模型如下

$$\mathrm{d}X_t=\mu(X_t;\theta)\mathrm{d}t+\sigma(X_t;\theta)\mathrm{d}B_t, \tag{2}$$

其中, $\theta$ 是一个未知参数, 属于参数空间 $\Theta\subset R^d$.

为了检验模型 (2) 设定是否正确, 需要检验原假设和备择假设为

$$\begin{aligned}
&H_0:\mathsf{P}[\mu(X_t,t,\theta)=\mu_0(X_t,t)\sigma(X_t,t,\theta)=\sigma_0(X_t,t)]=1, \qquad \text{对于某个 } \theta_0\in\Theta.\\
&H_1:\mathsf{P}[\mu(X_t,t,\theta)=\mu_0(X_t,t)\sigma(X_t,t,\theta)=\sigma_0(X_t,t)]<1, \qquad \text{对于所有的 } \theta_0\in\Theta.
\end{aligned}$$

虽然是连续时间模型, 但是实际上我们的观察值 $\{X_t\}$ 是离散的, 设观测间隔为 $\Delta$, 将时间 $T$ 划分为 $n\equiv T/\Delta$, 记 $X_i=X_{i\Delta}$, 其中, $i=0,1,2,\dots,n$. 由于 $X_t$ 的转移密度可以反映出该随机过程的全部动态, 因此可以通过比较模型 (1) 与模型 (2) 中 $X_t$ 的转移密度 $p_0(y\,|\,x)$ 与 $p_\theta(y\,|\,x)$ (设 $X_s=x$, $X_t=y$, $s<t$) 来判断两个模型是否相同. 故原假设和备择假设可以转换为

$$\begin{aligned}
&H_0:p(y\,|\,x,\theta_0)=p_0(y\,|\,x), \qquad \text{对于某个 } \theta_0\in\Theta \text{ 几乎处处成立}.\\
&H_A:p(y\,|\,x,\theta)\neq p_0(y\,|\,x), \qquad \text{对于所有的 } \theta\in\Theta, \text{存在某个 } i=0,1,2,\dots,n.
\end{aligned}$$

为简化书写, $X_t$ 的每个分量记为 $X_{j,t}$, 其中 $j=1,2,\dots,m$. 每个分量 $X_{j,t}$ 的转移密度记为 $p_j=(p_{j,1},p_{j,2},\dots,p_{j,n})$, 其中, $p_{j,i}=p_j(X_{i+1}=y\,|\,X_i=x)$, $i=0,1,\dots,n$.

Fan 等 [8] 给出了一维扩散过程的转移密度的非参数估计, 设 $K(\cdot)$ 是一个对称的概率密度函数, $h$ 是一个平滑带宽, 如果有 $n\to\infty$, $h\to 0$, $nh\to\infty$, $K_h(\cdot)=h^{-1}K(\cdot/h)$, 则 $p_{j,i}$ 的核估计值如下

$$\widehat{p}_{j,i}=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}K_h(x-X_{j,i})K_h(y-X_{j,i+1})/\widehat{\pi}(x), \tag{3}$$

其中, $\widehat{\pi}_j(x)=(n+1)^{-1}\sum\limits_{t=1}^{n+1}K_h(x-X_{j,i})$ 是由 Ait-Sahalia 提出的平稳强度的核估计值. 由此可以得到 $m$ 个 $\widehat{p}_j$ 的序列 $(\widehat{p}_{j,1},\widehat{p}_{j,2},\dots,\widehat{p}_{j,n})$.

该估计量的偏差和方差如下,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\{\widehat{p}_{j,i}-p_{j,i}\}&=\frac{1}{2}\sigma_k^2h^2\Big(\frac{\partial^2 p_{j,i}(y\,|\,x)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_{j,i}(y\,|\,x)}{\partial y^2}+2\frac{\pi_j'(x)}{\pi_j(x)}\frac{\partial p_{j,i}(y\,|\,x)}{\partial x}\Big)+o(h^2),\\
\mathsf{Var}\,\{\widehat{p}_{j,i}\}&=\frac{R^2(K)p_{j,i}(y\,|\,x)}{nh^2\pi_j(x)}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

为了消除式 (3) 的偏差, 我们使用文献 [5] 给出的两次核平滑对 $p_\theta(y\,|\,x)$ 进行修正,

$$\widetilde{p}_{\widetilde{\theta}j,i}=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n+1}K_n(x-X_i)\sum\limits_{s=1}^{n+1}w_s(y)p_{\widetilde{\theta}}(X_s\,|\,X_t)}{\sum\limits_{t=1}^{n+1}K_n(x-X_t)},$$

其中,

$$\begin{aligned}w_t(x)&=K_n(x-X_t)\frac{s_{2h}(x)-s_{1h}(x)(x-X_t)}{s_{2h}(x)s_{0h}(x)-s_{1h}^2(x)},\\ s_{rh}(x)&=\sum_{s=1}^{n}K_n(x-X_s)K_n(x-X_s)^r.\end{aligned}$$

同样可以得出 $m$ 个 $\widetilde{p}_{\widetilde{\theta}j}$ 的序列 $(\widehat{p}_{\widehat{\theta}j,1},\widehat{p}_{\widehat{\theta}j,2},\dots,\widehat{p}_{\widehat{\theta}j,n})$.

### 2.2 CTE 及其非参数估计

Di Bernardino 和 Prieur [7] 提出了多维 CTE,

$$\mathrm{CTE}_t(Z_i)=\mathsf{E}[Z_i\,|\,F_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z})\geqslant c]=\mathsf{E}[Z_i\,|\,\boldsymbol{Z}\in L(c)],\qquad t\in(0,1),$$

其中, $\boldsymbol{Z}=(Z_1,Z_2,\dots,Z_d)$ 是非负的多维随机向量, 其分布为 $F_{\boldsymbol{Z}}$, $K(t)=\mathsf{P}[F_{\boldsymbol{Z}}\geqslant t]$ 是相关的多维 Kendall 分布函数, 由 Genest 和 Rivest [9] 首次提出. $L(c)=\{x:F(x)\geqslant c\}$ 是 $F$ 的 $t$-upper 水平集, 故多维 CTE 如下

$$\mathrm{CTE}_c(\boldsymbol{Z})=\mathsf{E}[\boldsymbol{Z}\,|\,F(\boldsymbol{Z})\geqslant c]=\mathsf{E}[\boldsymbol{Z}\,|\,\widetilde{F}(\boldsymbol{U})\geqslant c]=\begin{pmatrix}\mathsf{E}[Z_1\,|\,\widetilde{F}(\boldsymbol{U})\geqslant c]\\ \mathsf{E}[Z_2\,|\,\widetilde{F}(\boldsymbol{U})\geqslant c]\\ \vdots\\ \mathsf{E}[Z_d\,|\,\widetilde{F}(\boldsymbol{U})\geqslant c]\end{pmatrix},$$

其中, $\boldsymbol{U}\equiv(F_1(Z_1),F_2(Z_2),\dots,F_d(Z_d))$, $\widetilde{F}$ 是 $F(\boldsymbol{Z})$ 的连接函数, $F_j(Z_j)$ 是相对应的边缘分布. 关于 $F(\boldsymbol{Z})$ 的计算可以参考文献 [10].

基于 Kendall 经验分布, 可以给出一个多维 CTE 的非参数估计

$$\widehat{\mathrm{CTE}}_c(Z)=\begin{pmatrix}\Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_{1i}1_{\{\widetilde{F}_n(U_i)\geqslant c\}}\Big)/[1-K_n(c)]\\ \Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_{2i}1_{\{\widetilde{F}_n(U_i)\geqslant c\}}\Big)/[1-K_n(c)]\\ \vdots\\ \Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_{di}1_{\{\widetilde{F}_n(U_i)\geqslant c\}}\Big)/[1-K_n(c)]\end{pmatrix},$$

其中, $K_n$ 是由 $K$ 的经验 Kendall 估计量. 记 $\mathrm{CTE}_t^j(\boldsymbol{Z}) = \mathsf{E}[Z_j \mid \widetilde{F}(\boldsymbol{U}) \geqslant c]$, $\widehat{\mathrm{CTE}}_t^j(\boldsymbol{Z}) = \big(n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_{ji}1_{\{\widetilde{F}_n(U_i)\geqslant c\}}\big)/[1-K_n(c)]$, $j=1,2,\ldots,d$. 注意到 $\widetilde{F}_n(U_i) = n^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} 1_{\{U_j\leqslant U_i\}}$, 在正则条件下, $F_n(Z_i) = n^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} 1_{\{Z_j\leqslant Z_i\}} = \widetilde{F}_n(U_i)$, 这意味着

$$\widehat{\mathrm{CTE}}_t^j(Z) = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_{ji}1_{\{\widetilde{F}_n(U_i)\geqslant c\}}}{1-K_n(c)} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_{ji}1_{\{F_n(Z_i)\geqslant t\}}}{1-K_n(c)}, \qquad j=1,2,\ldots,d.$$

设

$$\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(t) := \big(\alpha_{n,1}^{\mathrm{CTE}}(t), \alpha_{n,2}^{\mathrm{CTE}}(t), \ldots, \alpha_{n,d}^{\mathrm{CTE}}(t)\big), \tag{4}$$

其中,

$$\alpha_{n,j}^{\mathrm{CTE}}(t) = \sqrt{n}\,\big(\widehat{\mathrm{CTE}}_t^j(\boldsymbol{Z}) - \mathrm{CTE}_t^j(\boldsymbol{Z})\big), \qquad j=1,2,\ldots,d. \tag{5}$$

由引理 4 可得,

$$\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(t) \to \mathrm{N}\big(0, \Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j}\big).$$

### 2.3　基于条件尾分布的检验统计量

为了使用 CTE 来构造检验统计量, $\widehat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}}$ 可以看成 (5) 中的 $\boldsymbol{Z}$, 则序列 $(\widehat{p}_{j,1}, \widehat{p}_{j,2}, \ldots, \widehat{p}_{j,n})$ 可以作为 $\widehat{\boldsymbol{p}}_j$ 的观测样本. 同理, 序列 $(\widehat{p}_{\widehat{\theta}j,1}, \widehat{p}_{\widehat{\theta}j,2}, \ldots, \widehat{p}_{\widehat{\theta}j,n})$ 作为 $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}j}$ 的样本. 代入到式 (4) 可以得到 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widehat{\boldsymbol{p}})$ 和 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$.

即可以构造检验统计量

$$M^{\mathrm{CTE}} = \big(M_1^{\mathrm{CTE}}, M_2^{\mathrm{CTE}}, \ldots, M_m^{\mathrm{CTE}}\big),$$

其中,

$$M_j^{\mathrm{CTE}} = \sqrt{n}\,\big(\widehat{\mathrm{CTE}}_c^j(\widehat{p}_j) - \widehat{\mathrm{CTE}}_c^j(\widetilde{p}_{\widetilde{\theta}j})\big), \qquad j=1,2,\ldots,m.$$

这样就得到最终的检验统计量 $M^{\mathrm{CTE}}$, 在正确的模型设定下, 由定理 5 可得, $M^{\mathrm{CTE}}$ 将弱收敛到一个均值向量为 0 向量, 协方差矩阵为 $\Gamma_M^{\mathrm{CTE}}$ 的正态过程. 由定理 6, 如果模型设定错误, $M^{\mathrm{CTE}}$ 将不收敛到一个均值向量为 0 向量, 协方差矩阵为 $\Gamma_M^{\mathrm{CTE}}$ 的正态过程. 由此, 可以得出我们的检验步骤: 1) 通过适当的方法估计出模型的参数估计量 $\widehat{\theta}$. 本文中采用的是比较常用的极大似然估计. 2) 分别计算出 $\widehat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}}$, 并计算出相应的 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c^j(\widehat{p}_j)$ 和 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c^j(\widetilde{p}_{\widetilde{\theta}j})$. 3) 得出我们的检验统计量 $M^{\mathrm{CTE}}$. 设定置信水平为 $\alpha$, 检验 $M^{\mathrm{CTE}}$ 是否是一个均值向量为 0 向量, 协方差矩阵为 $\Gamma_M^{\mathrm{CTE}}$ 的正态过程. 其中, $\Gamma_M^{\mathrm{CTE}} = \Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widehat{\boldsymbol{p}})} + \Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})}$, $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widehat{\boldsymbol{p}})}$ 是 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widehat{\boldsymbol{p}})$ 的协方差矩阵, $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})}$ 是 $\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$ 的协方差矩阵.

## §3. 重要的设定和结论

本文中提出的方法是基于以下的前提条件和假设.

**假设 1**

(i) 对于 (1) 和 (2) 式中的过程 $\{X_t\}$ 是连续严平稳的, 每个分量过程都有唯一的弱解和唯一的转移概率函数 $p(y\,|\,x)$ 并且是绝对连续的.

(ii) $X_t$ 的一个离散样本 $\{X_{\tau\Delta}\}_{\tau=1}^{n}$ 是可以被观测的, $\Delta$ 是固定的时间间隔, $\{X_{\tau\Delta}\}$ 是一个 $\alpha$ 混合过程, 带有混合系数 $\alpha(\cdot)$, 且满足 $\sum\limits_{\tau=0}^{\infty}\alpha(\tau\Delta)^{(v-1)/v}\leqslant C$, 对某个常数 $v$ 成立.

**假设 2**

(i) $\Theta$ 是一个有限维的参数空间, $p(y\,|\,x,\theta)$ 在 $\theta\in\Theta$ 中三次可微.

(ii) 在 $H_0$ 或 $H_A$ 下, 存在一个 $\theta^*$ 和一个发散到无穷的正值参数序列 $\{a_n\}$. 对所有的 $\epsilon>0$ 和某个 $C>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}(a_n\widehat{\theta}-\theta^*>C)<\epsilon$ 且 $\sqrt{n}\,ha_n^{-1}=o(\sqrt{h}\,)$.

(iii) $\widehat{\theta}\in\Theta$ 是一个参数估计量, 满足 $\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}-\theta^*)=O_{\mathsf{P}}(1)$, 其中 $\theta^*\equiv p\lim\widehat{\theta}$ 是 $\Theta$ 的一个内部元素, 在 $H_0$ 下, $\theta^*=\theta_0$.

**假设 3** $K(\cdot)$ 是一个支撑在 $[-1,1]$ 上的有界对称的概率密度, 且二阶导数也有界.

假设 1 是为了确保检验方法有效的前提, 并且满足 CTE 的使用条件. 同时保证了方程的解以及扩散过程转移密度函数的存在性和唯一性. 假设 2 (i) (iii) 中的 $\theta^*$ 在 $H_0$ 下是真参数 $\theta_0$. 当 $H_A$ 为真时, $\theta^*$ 被看成是参数估计量 $\widehat{\theta}$ 在原参数空间上的预测. 在假设 2 (ii) 下, $\widehat{\theta}$ 收敛到 $\theta^*$ 的速度比 $\sqrt{n}\,h$ 快.

**引理 4** 见文献 [7] 中的定理 3.2 详述和证明.

**定理 5** 在 $H_0$ 下, 若假设 1–3 都满足, $M(\mathrm{CTE})$ 将弱收敛到一个多元标准正态过程.

**证明:** 由引理 4, $\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widehat{\boldsymbol{p}})=\sqrt{n}\,(\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widehat{\boldsymbol{p}})-\mathrm{CTE}_c(\widehat{\boldsymbol{p}}))$ 是一个收敛到均值为 0, 协方差为 $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widehat{\boldsymbol{p}})}$ 的正态过程, 而 $\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})=\sqrt{n}\,(\widehat{\mathrm{CTE}}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})-\mathrm{CTE}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}}))$ 是一个收敛到均值为 0, 协方差为 $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})}$ 的正态过程. 在 $H_0$ 下, 如果模型设定正确, 则 $\widehat{\boldsymbol{p}}$ 与 $\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}}$ 是同分布的, 即具有相同的统计性质, 且相互独立. 由 CTE 的定义知 $\mathrm{CTE}_c(\widehat{\boldsymbol{p}})$ 与 $\mathrm{CTE}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$ 相等, 故 $M_j^{\mathrm{CTE}}$ 与 $\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widehat{\boldsymbol{p}})-\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$ 同分布. 所以, $M_j^{\mathrm{CTE}}$ 是均值向量为 0 向量, 协方差矩阵为 $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widehat{\boldsymbol{p}})}+\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})}$ 的正态过程. □

**定理 6** 在 $H_A$ 下, 若假设 1–3 都满足, $M(\mathrm{CTE})$ 将不收敛到一个多元标准正态过程.

**证明:** 当 $H_A$ 成立时, $p$ 与 $p_\theta$ 不是同分布. 所以 $\mathrm{CTE}_c(\widehat{\boldsymbol{p}})$ 与 $\mathrm{CTE}_c(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$ 不同等, $M_j^{\mathrm{CTE}}$ 与 $\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widehat{\boldsymbol{p}})-\alpha_n^{\mathrm{CTE}}(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})$ 不具有相同的统计性质. 即 $M_j^{\mathrm{CTE}}$ 不是均值向量为 0 向量, 协方差矩阵为 $\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widehat{\boldsymbol{p}})}+\Gamma_j^{\mathrm{CTE}_t^j(\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\widetilde{\theta}})}$ 的正态过程. 故 $M_j^{\mathrm{CTE}}$ 将不收敛到正态过程. □

# §4. 数值实验

为了检验本文的方法是否有效, 接下来将与 Hong 和 Li [3] 进行同样的模拟实验来做对比. 在本文所有的模拟中, 我们选取 $K(u)=(15/16)(1-u^2)^2 I(|u|\leqslant 1)$ 作为估计转移密度时的核估计量. 设定 $\Delta=1/12$, 分析联邦基金利率数据的月观测数据. 我们选取 $n=250$, 500 以及 1 000 对应 20 到 80 年的数据, 模拟 500 次.

## 4.1 Size 的检验

在 size 检验中, 采用三因子 Vasicek 模型:

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - X_{1t} \\ \alpha_2 - X_{2t} \\ \alpha_3 - X_{3t} \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ W_{3t} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$(\kappa_{11},\kappa_{21},\kappa_{22},\kappa_{31},\kappa_{32},\kappa_{33},\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33})=(0.50,-0.20,1.00,0.10,0.20,2.00,1.00,1.00,1.00)$, $(\kappa_{12},\kappa_{13},\kappa_{23},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0,0,0)$. 这些参数设定是参考文献 [11], 经验拒绝率使用的渐近临界值 5% 和 10% 的水平可被采用. 参考 Chen 等 [5] 的方法, 我们在这里也设定了带宽集, 计算了不同带宽下的模拟数值, 表 1 中的结果选取的是模拟时的最优带宽下的结果.

**表 1　$Q$ 检验法和 CTE 检验法 (括号里的数值) 的 size 对比结果**

| | | 因子 1 | 因子 2 | 因子 3 | 联合 |
|---|---|---|---|---|---|
| 5% | $n=250$ | 4.5 (3.9) | 2.8 (2.7) | 2.9 (3.0) | 2.4 (2.1) |
| | $n=500$ | 4.1 (3.8) | 2.7 (2.8) | 5.0 (4.2) | 3.6 (3.2) |
| | $n=1\,000$ | 4.6 (4.2) | 5.3 (4.4) | 4.8 (3.7) | 3.7 (2.8) |
| 10% | $n=250$ | 6.9 (5.3) | 4.8 (4.4) | 5.9 (6.0) | 7.4 (5.1) |
| | $n=500$ | 6.0 (4.8) | 4.5 (3.8) | 7.9 (6.2) | 8.2 (6.7) |
| | $n=1\,000$ | 7.3 (6.2) | 7.1 (5.4) | 7.7 (7.3) | 6.7 (5.8) |

表 1 给出了 CTE 方法与 Hong 和 Li [3] 的 $Q$ 检验法的对比结果, 不难看出, 我们的方法比起 $Q$ 检验法, 对于三因子 Vasicek 模型的检验的 size 有了大幅的提升. 同时可以看出, $n=250$ 时, 即小样本下的表现也十分良好.

## 4.2 Power 的检验

为了探讨 CTE 方法对于多维扩散模型检验的 power, 我们通过三个规范的仿射扩散模型模拟出的数据来检验原假设该数据是否由模型 (6) 生成.

(i)

$$
\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - X_{1t} \\ -X_{2t} \\ -X_{3t} \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} X_{1t}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (1+\beta_{21}X_{1t})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (1+\beta_{31}X_{1t})^{1/2} \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ W_{3t} \end{bmatrix},
$$

$(\kappa_{11},\kappa_{22},\kappa_{32},\kappa_{33},\alpha_1) = (0.50, 2.00, -0.10, 5.00, 2.00)$, $(\kappa_{21},\kappa_{23},\kappa_{31},\beta_{21},\beta_{31}) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

(ii)

$$
\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - X_{1t} \\ \alpha_2 - X_{2t} \\ -X_{3t} \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} X_{1t}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & X_{2t}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (1+\beta_{31}X_{1t}+\beta_{32}X_{2t})^{1/2} \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ W_{3t} \end{bmatrix},
$$

$(\kappa_{11},\kappa_{22},\kappa_{33},\alpha_1,\alpha_2) = (0.50, 2.00, 5.00, 2.00, 1.00)$, $(\kappa_{12},\kappa_{21},\kappa_{31},\kappa_{32},\beta_{31},\beta_{32}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

(iii)

$$
\mathrm{d}\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 - X_{1t} \\ \alpha_2 - X_{2t} \\ \alpha_3 - X_{3t} \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \begin{bmatrix} X_{1t}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & X_{2t}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & X_{3t}^{1/2} \end{bmatrix} \mathrm{d}\begin{bmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \\ W_{3t} \end{bmatrix},
$$

$(\kappa_{11},\kappa_{22},\kappa_{33},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (0.50, 2.00, 1.00, 2.00, 1.00, 1.00)$, $(\kappa_{12},\kappa_{13},\kappa_{21},\kappa_{23},\kappa_{31},\kappa_{32}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

表 2 给出了 CTE 方法与 $Q$ 检验法的对比结果, 可以看出 CTE 方法, 对于这三个模型, 可以判断出哪个因子造成了原假设错误, 并从整体上很好地拒绝原假设错误的情况, 并不会由于某些分量假设正确而过度接受错误的原假设. 无论是 CTE 方法还是 $Q$ 检验法, 随着样本数据越多即 $n$ 越大, 检验的 power 越显著. 对于小样本的检验功效有待提高, 尤其是 $n=250$ 时.

**表 2　$Q$ 检验法和 CTE 检验法 (括号里的数值) 的 power 对比结果**

| | | 因子 1 | 因子 2 | 因子 3 | 联合 |
|---|---|---|---|---|---|
| Model 1 | $n=250$ | 37.2 (24.2) | 6.3 (4.9) | 7.7 (3.2) | 17.2 (9.4) |
| | $n=500$ | 63.5 (50.8) | 6.7 (4.8) | 7.5 (5.2) | 27.2 (16.3) |
| | $n=1\,000$ | 94.6 (97.4) | 5.8 (5.4) | 6.6 (4.7) | 53.7 (48.3) |
| Model 2 | $n=250$ | 38.4 (26.7) | 26.3 (13.7) | 6.7 (4.5) | 32.2 (18.2) |
| | $n=500$ | 74.2 (62.9) | 48.1 (37.2) | 7.2 (5.3) | 65.7 (49.5) |
| | $n=1\,000$ | 95.3 (98.3) | 78.5 (72.4) | 6.8 (5.9) | 93.2 (91.1) |
| Model 3 | $n=250$ | 37.5 (23.9) | 25.8 (22.7) | 51.9 (42.5) | 77.1 (64.3) |
| | $n=500$ | 69.4 (53.4) | 48.7 (42.3) | 81.3 (67.2) | 97.6 (83.2) |
| | $n=1\,000$ | 97.3 (94.2) | 85.3 (77.0) | 98.2 (93.5) | 99.3 (97.4) |

## §5.　结　　论

目前多维扩散过程的转移密度还没显示形式或者很好的近似形式, 所以通过直接比较原模型和假设模型的转移密度是很困难的. 本文中求出了每个分量的转移密度序列, 并使用 CTE 构造了检验统计量. 这是首次将金融风险管理中的工具应用到了扩散模型设定检验中来. CTE 具有优良的性质, 首先转移密度很好地满足了 CTE 的应用条件, 几乎不用加额外的约束条件, 其次通过 CTE 构造的检验统计量可以包含各个分量的信息, 而不是简单地对每个分量独立检验或者是线性叠加. 从数值模拟的结果, 不难看出比起 Hong 和 Li[3] 的方法在检验的功效上还是有所进步的. 当然, 这个基于 CTE 的方法还有改进之处, 对于小样本情形下的检验的 power 有待提高. 而且当维数很大时, 协方差矩阵的计算是十分繁琐的, 面对大数据时, 计算明显增加. 所以, 关于多维扩散模型的设定检验问题还有很大的研究空间.

## 参　考　文　献


[1] AÏT-SAHALIA Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate [J]. *Rev Financ Stud*, 1996, **9(2)**: 385–426.

[2] PRITSKER M. Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models [J]. *Rev Financ Stud*, 1998, **11(3)**: 449–487.

[3] HONG Y M, LI H T. Nonparametric specification testing for continuous-time models with applications to term structure of interest rates [J]. *Rev Financ Stud*, 2005, **18(1)**: 37–84.

[4] 陈萍, 冯予, 赵慧秀, 等. 连续时间金融模型的非参数统计分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[5] CHEN S X, GAO J T, TANG C Y. A test for model specification of diffusion processes [J]. *Ann Statist*, 2008, **36(1)**: 167–198.

[6] SONG Z G. A martingale approach for testing diffusion models based on infinitesimal operator [J]. *J Econometrics*, 2011, **162(2)**: 189–212.

[7] DI BERNARDINO E, PRIEUR C. Estimation of multivariate conditional-tail-expectation using Kendall's process [J]. *J Nonparametr Stat*, 2014, **26(2)**: 241–267.

[8] FAN J Q, YAO Q W, TONG H. Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems [J]. *Biometrika*, 1996, **83(1)**: 189–206.

[9] GENEST C, RIVEST L P. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas [J]. *J Amer Statist Assoc*, 1993, **88(423)**: 1034–1043.

[10] DI BERNARDINO E, RULLI'ERE D. On certain transformations of Archimedean copulas: application to the non-parametric estimation of their generators [J]. *Depend Model*, 2013, **1(1)**: 1–36.

[11] AÏT-SAHALIA Y, KIMMEL R L. Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions [J]. *J Financ Econ*, 2010, **98(1)**: 113–144.

[12] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. *J Financ Econ*, 1977, **5(2)**: 177–188.

# A Test for Diffusion Model Based on Multi-Dimensional Tail Condition Expectations

WANG Jun CHEN Ping

(*School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China*)

**Abstract:** In order to solve the problem of testing multidimensional diffusion models, we develop a test statistic based on Multi-Dimensional Tail Condition Expectations (CTEs). Although it is almost impossible to estimate the transition density matrix of a multidimensional diffusion model directly, the transition density of each component can be estimated and each component can be combined by the CTE to establish a true multidimensional statistics. Finally, the performance of the test is evaluated through simulation.

**Keywords:** diffusion model; model test; multi-dimensional diffusion; tail condition expectation

**2010 Mathematics Subject Classification:** 62G10; 62H15; 60G10