应用概率统计 第 34 卷
第 3 期 2018 年 6 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Jun., 2018, Vol. 34, No. 3, pp. 312-318
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2018.03.008

连续状态马氏链遍历性的初等证明 *

张鹏艳⋆ 杨卫国

(江苏大学理学院, 镇江, 212013)

摘 要: 本文介绍了连续状态马氏链 Dobrushin 系数、指数强遍历性、强遍历性以及弱遍历性, 在此基础上给出指数强遍历、强遍历和弱遍历之间相互等价的一个初等证明.

关键词: 连续状态马氏链; 指数强遍历; 强遍历; 弱遍历

中图分类号: O211.6

英文引用格式: ZHANG P Y, YANG W G. Primary proof of ergodicities for continuous-state Markov chains [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(3): 312–318. (in Chinese)

§1. 引 言

对任意 $x \in R$, 设 $p(x,y)$ 为 Borel 可测函数, 如果 $p(x,y) \geqslant 0$, 且

$$\int_R p(x,y)\mathrm{d}y = 1,$$

则称 $p(x,y)$ 为转移密度. 如果对任意 $x_1, x_2 \in R$ 有 $p(x_1,y) = p(x_2,y)$, 则称 $p(x,y)$ 为常数转移密度. 显然常数转移密度就是密度.

设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为 R 上取值的马氏链, 其转移核为 $P(x,B)$ $(B \in \mathscr{B}(R))$, 即对任意 $n \geqslant 0$ 有

$$P(x,B) = \mathsf{P}(X_{n+1} \in B \,|\, X_n = x).$$

如果存在转移密度 $p(x,y)$, 使

$$P(x,B) = \int_B p(x,y)\mathrm{d}y,$$

则称 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为具有转移密度 $p(x,y)$ 的连续状态马氏链. 令

$$p^{(n+1)}(x,y) = \int_R p(x,z)p^{(n)}(z,y)\mathrm{d}z,$$

---

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11571142) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: zhang382363946@126.com.

本文 2017 年 5 月 12 日收到, 2017 年 6 月 30 日收到修改稿.

易知对任意 $k \geqslant 1$ 有

$$\mathsf{P}(X_{n+k} \in B \mid X_n = x) = \int_B p^{(k)}(x, y)\mathrm{d}y,$$

其中 $p^{(n)}(x, y)$ 为马氏链的 n 步转移密度.

设 $f(x)$ 为 R 上的 Borel 可测函数, 定义 $f(x)$ 的范数 (参见文献 [1])

$$\|f(x)\| = \int_R |f(x)|\mathrm{d}x.$$

设 $p(x, y)$ 为连续状态马氏链的转移密度, 定义 p 的 Dobrushin 系数 (参见文献 [2; 第 226 页])

$$C(p) = \frac{1}{2} \sup_{x,y} \int_R |p(x, z) - p(y, z)|\mathrm{d}z.$$

设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为 R 上取值的连续状态马氏链, 其转移密度为 $p(x, y)$, n 步转移密度为 $p^{(n)}(x, y)$. 设 $\pi(y)$ 是一个分布密度,

(i) 如果存在常数 $c > 0$ 及 $0 < r < 1$, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 对任意 x, 有

$$\int_R |p^{(n)}(x, y) - \pi(y)|\mathrm{d}y \leqslant c\, r^n,$$

则称马氏链是指数强遍历的 (参见文献 [2; 第 227 页]);

(ii) 如果

$$\sup_x \int_R |p^{(n)}(x, y) - \pi(y)|\mathrm{d}y \to 0, \qquad (n \to \infty),$$

则称马氏链是强遍历的 (参见文献 [1; 定理 2.1]);

(iii) 如果 $C(p^{(n)}) \to 0$ $(n \to \infty)$, 则称马氏链是弱遍历的 (参见文献 [1; 定义 1.2]).

设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为 R 上取值的连续状态马氏链, 其转移密度为 $p(x, y)$, $\pi(y)$ 是一个分布密度. 如果

$$\pi(y) = \int_R \pi(x)p(x, y)\mathrm{d}x,$$

则称 $\pi(y)$ 是马氏链的平稳分布.

如果马氏链关于分布 $\pi(y)$ 是强遍历的, 易知 $\pi(y)$ 是马氏链的平稳分布.

在马氏链理论研究中, 马氏链的遍历性理论是其基本内容之一, 它在生物、数值计算、自动控制、信息理论以及近代物理等众多领域都有着广泛的应用. 连续状态马氏链的指数强遍历性、强遍历性和弱遍历性是马氏链遍历性理论的重要内容. 关于马氏链遍历性问题, 国内外专家学者已有许多经典的结论. 结合文献 [3] 的定理 1 和推论 1 我们知道, 马氏链的强遍历性和弱遍历性是等价的, 但是作者没有给出详细的证明过程. 在文献 [4] 的定理 3.5 中, 作者给出并证明马氏链的指数强遍历性和弱遍历性是等价的. 本文介绍了连续状态马氏链指数强遍历性, 强遍历性以及弱遍历性的相关性质, 并在此基础上给出连续状态马氏链指数强遍历性, 强遍历性和弱遍历性之间相互等价的一个初等证明.

§2. 主要结果

本节将给出连续状态马氏链的指数强遍历性、强遍历性、弱遍历性之间相互等价的一个初等证明.

在文献 [3] 的定义 5 之后, 其作者指出: $C(p)=0$ 的充要条件是 p 为常数转移密度. 这个结论存在问题, 我们将其完善如下:

引理 1 设 $p(x,y)$ 为转移密度, $C(p)=0$ 的充要条件是存在常数转移密度 (或密度) $\overline{p}(y)$, 使

$$\sup_x \int_R |p(x,y)-\overline{p}(y)|\mathrm{d}y=0. \tag{1}$$

证明: 充分性显然. 下证必要性. 令 $\overline{p}(y)=p(0,y)$, 显然 $\overline{p}(y)$ 为常数转移密度. 由于 $C(p)=0$, 即

$$\frac{1}{2}\sup_{x_1,x_2}\int_R |p(x_1,y)-p(x_2,y)|\mathrm{d}y=0,$$

所以 (1) 成立. □

由此引理, 当 $C(p)=0$ 时可认为 p 为常数转移密度.

引理 2 [3] 设 $p(x,y)$ 为如上定义的转移密度, $r(x)$ 为 Borel 可测函数, 满足 $\int_R |r(x)|\mathrm{d}x<\infty$, 且 $\int_R r(x)\mathrm{d}x=0$. 记

$$rp(y)=\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x,$$

则

$$\|rp\|\leqslant C(p)\|r\|. \tag{2}$$

注记 3 在文献 [3] 的引理 6 中, 作者给出此引理, 但没有给出详细的证明过程. 在文献 [8] 中我们给出此引理的一个详细证明, 为了便于读者理解, 我们将在附录中给出证明.

推论 4 [2] (Dobrushin 不等式) 设 $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 为 R 上取值的连续状态马氏链, 转移密度为 $p(x,y)$, 对于任意分布密度 $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$ 有

$$\Big\|\int_R \rho_1(x)p(x,*)\mathrm{d}x-\int_R \rho_2(x)p(x,*)\mathrm{d}x\Big\|\leqslant C(p)\|\rho_1-\rho_2\|.$$

证明: 令 $r(x)=\rho_1(x)-\rho_2(x)$, 易知

$$\int_R [\rho_1(x)-\rho_2(x)]\mathrm{d}x=0.$$

由引理 2 有

$$\Big\|\int_R \rho_1(x)p(x,*)\mathrm{d}x-\int_R \rho_2(x)p(x,*)\mathrm{d}x\Big\|=\|(\rho_1-\rho_2)p\|\leqslant C(p)\|\rho_1-\rho_2\|.$$

故本推论得证. □

注记 5 在文献 [2] 的 225 页中, 作者给出连续状态马氏链的 Dobrushin 不等式, 也没有给出详细的证明过程, 我们是在引理 2 的基础上作为推论证明 Dobrushin 不等式.

引理 6 [3] 设 $p(x,z)$ 与 $q(z,y)$ 为两个转移密度, 分别记为 p,q, 记 $r(x,y)$ 为 r. 令

$$r(x,y)=\int_R p(x,z)q(z,y)\mathrm{d}z,$$

易知 $r(x,y)$ 也是转移密度, 则

$$C(r)\leqslant C(p)C(q).$$

引理 7 马氏链为弱遍历的充要条件是存在正整数 n_0, 使 $C(p^{(n_0)})<1$.

证明: 必要性显然. 这是因为由 $C(p^{(n)})\to 0$, 易知存在正整数 n_0, 使 $C(p^{(n_0)})<1$. 下证充分性. 由于

$$p^{(n+1)}(x,y)=\int_R p(x,z)p^{(n)}(z,y)\mathrm{d}z,$$

由引理 6, 易知

$$C(p^{(n+1)})\leqslant C(p)C(p^{(n)})\leqslant C(p^{(n)}),$$

所以 $\{C(p^{(n)})\}$ 是单减数列. 设 $C(p^{(n_0)})=\delta<1$. 由于 $C(p^{(kn_0)})\leqslant\delta^k\to 0\ (k\to\infty)$, 所以 $\{C(p^{(n_0)})\}$ 的一个子列 $C(p^{(kn_0)})\to 0$, 因此 $C(p^{(n)})\to 0$. 所以马氏链是弱遍历的. □

以下是本文的主要结果:

定理 8 设 $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 为 R 上取值的连续状态马氏链, 则以下三个命题等价:

(i) $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 是指数强遍历的;

(ii) $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 是强遍历的;

(iii) $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 是弱遍历的.

证明: (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然. 下证 (ii) $\Rightarrow$ (iii). 由于

$$\begin{aligned}C(p^{(n)})&=\frac{1}{2}\sup_{x_1,x_2}\int_R|p^{(n)}(x_1,y)-p^{(n)}(x_2,y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{1}{2}\sup_{x_1}\int_R|p^{(n)}(x_1,y)-\pi(y)|\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\sup_{x_2}\int_R|p^{(n)}(x_2,y)-\pi(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由马氏链的强遍历性, 我们有 $C(p^{(n)})\to 0\ (n\to\infty)$, 所以 $\{X_n,\,n\geqslant 0\}$ 是弱遍历的.

下面我们证 (iii) $\Rightarrow$ (i). 取 $x_0\in R$, 由 Dobrushin 不等式, 对任意 n,k 有

$$\begin{aligned}&\int_R|p^{(n+k)}(x_0,y)-p^{(n+1)}(x_0,y)|\mathrm{d}y\\=&\int_R\Big|\int_R[p^{(k)}(x_0,z)-p(x_0,z)]p^{(n)}(z,y)\mathrm{d}z\Big|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\leqslant \|p^{(k)}(x_0,*)-p(x_0,*)\|C(p^{(n)}) \leqslant 2C(p^{(n)}) \to 0, \qquad (n\to\infty). \tag{3}$$

于是存在 $\{p^{(n)}(x_0,y)\}$ 的一个子列

$$\int_R p^{(n_1)}(x_0,y)\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{\infty}\int_R |p^{(n_{k+1})}(x_0,y)-p^{(n_k)}(x_0,y)|\mathrm{d}y < \infty,$$

因此级数

$$p^{(n_1)}(x_0,y)+\sum_{k=1}^{\infty}[p^{(n_{k+1})}(x_0,y)-p^{(n_k)}(x_0,y)]$$

几乎处处收敛 (参见文献 [5; 第 47 页]). 在此级数的收敛点令

$$\pi(x_0,y)=p^{(n_1)}(x_0,y)+\sum_{k=1}^{\infty}[p^{(n_{k+1})}(x_0,y)-p^{(n_k)}(x_0,y)],$$

在其它点令 $\pi(x_0,y)=0$, 则有

$$\lim_{k\to\infty} p^{(n_k)}(x_0,y)=\pi(x_0,y) \qquad \text{a.e.}, \tag{4}$$

由 (3), (4) 及 Fatou 引理, 我们有

$$\int_R |p^{(n+1)}(x_0,y)-\pi(x_0,y)|\mathrm{d}y \leqslant 2C(p^{(n)}). \tag{5}$$

由 (5) 易证 $\pi(x_0,y)$ 为转移密度, 并且 $C(\pi)=0$. 由引理 1 知, 对任意 $x_0\in R$, $\pi(x_0,y)=\pi(y)$ 为常数转移密度. 于是对任意 x

$$\int_R |p^{(n+1)}(x,y)-\pi(y)|\mathrm{d}y \leqslant 2C(p^{(n)}). \tag{6}$$

由于 $C(p^{(n)})\to 0$, 设 $C(p^{(n_0)})=r<1$, $n=ln_0+k$ $(k=0,1,\ldots,n_0-1)$. 由 (6) 知, 对任意 x, 我们有

$$\begin{aligned}\int_R \big|p^{(n+1)}(x,y)-\pi(y)\big|\mathrm{d}y &\leqslant 2C(p^{(n)}) \leqslant 2C(p^{(ln_0)})\\ &\leqslant 2r^l = 2(r^{l/(n+1)})^{n+1}\\ &\leqslant 2(r^{1/2n_0})^{n+1}=2\delta^{n+1},\end{aligned}$$

其中 $0<\delta<1$, 所以 $\{X_n,\, n\geqslant 0\}$ 是指数强遍历的. □

注记 9 定理 8 的结果是已知的, 参见文献 [4]、文献 [6] 及文献 [7; 第 384 页], 但这些文献中并未给出详细的证明过程. 本文在定理 8 中给出其一个完整的初等证明, 完善已有文献的结论证明.

推论 10 [2] 具有转移密度的连续状态马氏链 $\{X_n,\, n\geqslant 0\}$, 如果存在 $n_0\geqslant 1$, 使其 n_0 步转移密度的 Dobrushin 系数 $C(p^{(n_0)})<1$, 则称马氏链是指数强遍历的.

证明: 结合引理 7 及定理 8 可得本推论. □

注记 11 文献 [2] 的 227 页只给出此结论, 未给出这个结论的证明.

附　　录

以下是文献 [8] 对引理 2 的详细证明:

证明: 易知 $r(x)=r^+(x)-r^-(x)$, $|r(x)|=r^+(x)+r^-(x)$, 其中 $r^+(x)=\max\{r(x),0\}$, $r^-(x)=\max\{-r(x),0\}$. 由于

$$\int_R r(x)\mathrm{d}x=0,$$

易知

$$\int_R r^+(x)\mathrm{d}x=\int_R r^-(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{且} \int_R |r(x)|\mathrm{d}x=2\int_R r^+(x)\mathrm{d}x.$$

容易证明

$$\int_R \Big[\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y=0.$$

类似地有

$$C(p)=\sup_{x,y}\int_R [p(x,z)-p(y,z)]^+\mathrm{d}z.$$

令 $E=\{y:\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x>0\}$. 由于

$$\int_R |r(x)|\mathrm{d}x\int_E p(x,y)\mathrm{d}y<\infty,$$

由 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_R \Big|\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x\Big|\mathrm{d}y\\
&=2\int_R \Big[\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x\Big]^+\mathrm{d}y=2\int_E \Big[\int_R r(x)p(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y\\
&=2\int_R r(x)\mathrm{d}x\int_E p(x,y)\mathrm{d}y=2\int_R [r^+(x)-r^-(x)]\mathrm{d}x\int_E p(x,y)\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2\Big[\int_R r^+(x)\mathrm{d}x\sup_{x_1}\int_E p(x_1,y)\mathrm{d}y-\int_R r^-(x)\mathrm{d}x\inf_{x_2}\int_E p(x_2,y)\mathrm{d}y\Big]\\
&=2\int_R r^+(x)\mathrm{d}x\sup_{x_1,x_2}\int_E [p(x_1,y)-p(x_2,y)]\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2\int_R r^+(x)\mathrm{d}x\sup_{x_1,x_2}\int_R [p(x_1,y)-p(x_2,y)]^+\mathrm{d}y\\
&=\|r\|C(p).
\end{aligned}\tag{7}$$

结合 (7) 式, 可得 (2) 式成立, 故引理 2 得证. □

参 考 文 献

[1] MADSEN R W, ISAACSON D L. Strongly ergodic behavior for non-stationary Markov processes [J]. *Ann Probab*, 1973, **1(2)**: 329–335.

[2] 龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程教程及在算法和智能计算中的随机模型 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.

[3] MADSEN R W. A note on some ergodic theorems of A. Paz [J]. *Ann Math Statist*, 1971, **42(1)**: 405–408.

[4] MUKHAMEDOV F. Ergodic properties of nonhomogeneous Markov chains defined on ordered Banach spaces with a base [J]. *Acta Math Hungar*, 2015, **147(2)**: 294–323.

[5] 严加安. 测度论讲义 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[6] DOBRUSHIN R L. Central limit theorem for nonstationary Markov chains I, II [J]. *Theory Probab Appl*, 1956, **1(1)**: 65–80; **1(4)**: 329–383.

[7] MEYN S P, TWEEDIE R L. *Markov Chains and Stochastic Stability* [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[8] 张鹏艳, 杨卫国. 对连续状态马氏链 Dobrushin 不等式的一个证明 [J]. 高等数学研究, 2017, **20(4)**: 94–95.

Primary Proof of Ergodicities for Continuous-State Markov Chains

ZHANG Pengyan YANG Weiguo

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013, China*)

Abstract: In this paper, we introduce the definitions of geometric strongly ergodic, strongly ergodic and weakly ergodic for continuous-state Markov chains, then we give a primary proof of equivalence of the ergodicities for continuous-state Markov chains.

Keywords: continuous-state Markov chains; geometric strongly ergodic; strongly ergodic; weakly ergodic

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15