应用概率统计 第 35 卷
第 1 期 2019 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2019, Vol. 35, No. 1, pp. 63-72
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2019.01.005

次线性期望下弱负相关随机变量的性质及其强大数定律 *

陈晓燕⋆ 许晓明

(南京理工大学理学院, 南京, 210094) (南京师范大学数学科学学院, 南京, 210023)

摘 要: 强大数定律是非可加概率 (或非线性期望) 框架下的重要理论. 目前已有许多有关非可加概率 (或非线性期望) 下独立同分布或负相关随机变量序列的强大数定律的研究文献. 本文在非可加概率和次线性期望框架下, 引入弱负相关随机变量的概念, 并研究了弱负相关随机变量的有关性质. 作为应用, 本文还证明了弱负相关随机变量序列的强大数定律.

关键词: 弱负相关随机变量; 次线性期望; 非可加概率测度; 强大数定律

中图分类号: O211.4

英文引用格式: CHEN X Y, XU X M. The properties and strong law of large numbers for weakly negatively dependent random variables under sublinear expectations [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(1): 63–72. (in Chinese)

§1. 引 言

在金融风险管理、超对冲、鲁棒统计等研究的驱动下, 2007 年 Peng [1] 引入了次线性期望以及其下的随机变量独立同分布的概念. 次线性期望是一种非线性期望, 其下的独立性一般不具有对称性, 即随机变量 X 独立于随机变量 Y, 并不意味着 Y 一定独立于 X. 这是有别于经典概率测度的情形. 次线性期望下随机变量序列的极限理论的研究在方法和内容上与经典概率下有非常大的区别. 2008 年, Peng [2] 给出了次线性期望下的独立同分布随机变量序列的弱大数定律和中心极限定理, 其中的极限分布分别为具有均值不确定性和具有方差不确定性的随机变量的分布, 前者称为 U-分布, 后者称为 G-正态分布. 一般地, 次线性期望可由一族概率测度 (或是有限可加概率测度) 引导的线性期望的上确界给出 (见文献 [3]). 2010 年, Chen [4,5] 在由一族概率测度引导的一对上、下概率 (V, v) 和次线性期望 E 下研究了 $1+\alpha$ 阶矩 ($\alpha\in(0,1)$) 下独立同分布随机变量序列的 Kolmogorov 型强大数定律, 其中样本均值不再收敛于一个点而是一个区间, 或者严格地讲样本均值序列的所有收敛子序列的极限点落在某一区间之内以下概率 1 成立.

独立性是个非常强的条件, Zhang [6,7] 在研究 Rosenthal 型和指数型不等式时, 提出了次线性期望下的负相关随机变量的概念. 粗略地讲, 对于随机向量 X_1 和 X_2, 如果对

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11501293)、江苏省高等学校自然科学研究项目 (批准号: 17KJB110009) 和南京理工大学科研启动基金项目共同资助.

⋆通讯作者, E-mail: cxy_161977@njust.edu.cn.

本文 2016 年 12 月 27 日收到, 2017 年 3 月 25 日收到修改稿.

于任意的非增 (非减) 的实值检验函数φ_i, $i=1,2$, 当其满足 $\mathsf{E}[|\varphi_i(X_i)|]<\infty$, $i=1,2$, $\varphi_1(X_1)\geqslant 0$, $\mathsf{E}[\varphi_2(X_2)]\geqslant 0$ 以及 $\mathsf{E}[|\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)|]<\infty$ 时, 我们有

$$\mathsf{E}[\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)]\leqslant\mathsf{E}[\varphi_1(X_1)]\mathsf{E}[\varphi_2(X_2)],\tag{1}$$

其中 E 为次线性期望, 就称随机向量 X_2 负相关于随机向量 X_1. Zhang[7] 还对负相关随机变量序列给出了一般次线性期望下的强大数定律, 将文献 [4] 的结果推广到负相关随机变量以及其一阶矩下.

对于有界随机变量, 若只考虑不等式 (1) 对指数函数 $\varphi_i(x)=\mathrm{e}^{cx}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $i=1,2$ 成立, 其中 c 为任意实数, 我们将称之为弱负相关, 那么这样的弱负相关随机变量具有什么样的性质? 本文通过考虑次线性期望下随机变量的均值、方差和相关系数等概念来对此进行研究, 给出了负相关函数与它们之间的关系不等式. 作为应用我们也将给出弱负相关随机变量序列的强大数定律.

本文结构安排如下: 第 2 节介绍一些基本概念和引理, 第 3 节给出次线性期望下弱负相关随机变量的定义, 第 4 节研究次线性期望下弱负相关随机变量的性质, 第 5 节证明了次线性期望下弱负相关随机变量序列的强大数定律.

§2. 预备知识

令 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间, $\mathscr{P}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一族概率测度, 我们定义与 $\mathscr{P}$ 相关的一对非可加概率测度如下:

$$V(A)=\sup_{\mathsf{P}\in\mathscr{P}}\mathsf{P}(A),\quad v(A)=\inf_{\mathsf{P}\in\mathscr{P}}\mathsf{P}(A),\qquad\forall\, A\in\mathscr{F}.$$

V 和 v 分别被称为与 $\mathscr{P}$ 相关的上概率和下概率. 显然 V 和 v 是共轭的, 即满足 $v(A)=1-V(A^c)$, $\forall\, A\in\mathscr{F}$, 其中 A^c 表示事件 A 的余事件.

引理 1 令 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{F}$ 可测的事件列, 则

(i) 上概率 V 满足可列次可加性: $V\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}V(A_n)$.

(ii) 上概率 V 满足下连续性: 若 $A_n\uparrow A$ 且 $A\in\mathscr{F}$, 则 $V(A_n)\uparrow V(A)$.

(iii) 下概率 v 满足上连续性: 若 $A_n\downarrow A$ 且 $A\in\mathscr{F}$, 则 $V(A_n)\downarrow V(A)$.

证明: 由上概率 V 的定义可得性质 (i). 性质 (ii) 的证明可以参见文献 [2; 引理 2.1]. 由性质 (ii) 以及共轭性质可得性质 (iii). □

令 $\mathscr{M}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上所有实值有界随机变量的集合, 我们定义与 $\mathscr{P}$ 相关的上期望如下:

$$\mathsf{E}(X)=\sup_{\mathsf{P}\in\mathscr{P}}\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(X),\qquad\forall\, X\in\mathscr{M},\tag{2}$$

其中 E_{P} 表示概率测度 P 引导的线性期望. 显然, $V(A)=\mathsf{E}(I_A)$, $v(A)=-\mathsf{E}(-I_A)$, $\forall\, A\in\mathscr{F}$, 其中 I_A 表示事件 A 的示性函数.

定义 2 [2] 给定 $(\Omega, \mathscr{F})$, 若泛函 $\mathsf{E}: \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ 满足对于任意 $X, Y \in \mathscr{M}$,

(i) 单调性: 若 $X \leqslant Y$, 则 $\mathsf{E}(X) \leqslant \mathsf{E}(Y)$.

(ii) 保常性: 对于任意的实数 c, $\mathsf{E}(c) = c$.

(iii) 次可加性: $\mathsf{E}(X+Y) \leqslant \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$.

(iv) 正齐次性: 对于任意的实数 $\lambda \geqslant 0$, $\mathsf{E}(\lambda X) = \lambda \mathsf{E}(X)$.

则称 E 为次线性期望.

我们易于验证 (2) 式定义的上期望 E 是次线性期望.

下面我们给出次线性期望 E 下随机变量的均值、方差、协方差等概念.

定义 3 给定随机变量 $X \in \mathscr{M}$, $\underline{\mu}(X) := -\mathsf{E}(-X)$ 和 $\overline{\mu}(X) := \mathsf{E}(X)$ 分别称为 X 的下均值和上均值. 若 X 的上下均值相等, 称其没有均值不确定性, 否则称其具有均值不确定性.

$\underline{\sigma}^2(X) := -\mathsf{E}(-X^2)$ 和 $\overline{\sigma}^2(X) := \mathsf{E}(X^2)$ 分别称为 X 的下方差和上方差. 若 X 的上下方差相等, 称其没有方差不确定性, 否则称其具有方差不确定性.

$\sigma_{\mathsf{E}}(X) := \sqrt{\mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2}$ 称为 X 的标准差.

对于随机变量 $X, Y \in \mathscr{M}$, $\mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X,Y) := \mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$ 称为 X 与 Y 的协方差. 若 $\sigma_{\mathsf{E}}(X) \neq 0$, $\sigma_{\mathsf{E}}(Y) \neq 0$, X 与 Y 的相关系数定义为 $\rho_{\mathsf{E}}(X,Y) = \mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X,Y)/[\sigma_{\mathsf{E}}(X)\sigma_{\mathsf{E}}(Y)]$.

引理 4 [2]

(i) 对于任意的 $X, Y \in \mathscr{M}$, 若 X 没有均值不确定性, 则有 $\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$.

(ii) (Höllder 不等式) 对于任意的 $X, Y \in \mathscr{M}$, $\mathsf{E}(|XY|) \leqslant \mathsf{E}(|X|^p)^{1/p}\mathsf{E}(|Y|^q)^{1/q}$, 其中 $p, q > 1$ 为任意常数且满足 $1/p + 1/q = 1$.

§3. 弱负相关随机变量

下面我们在一族概率测度 $\mathscr{P}$ 以及其对应的次线性期望 E 下给出随机变量的独立性与相关性的概念.

定义 5 (独立) [5] 给定随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, 其中 $X_i, Y_j \in \mathscr{M}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 若对于任意函数 $\varphi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 和 $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 有 $\mathsf{E}[\varphi_1(X)\varphi_2(Y)] = \mathsf{E}\{\mathsf{E}[\varphi_1(x)\varphi_2(Y)]_{x=X}\}$, 其中 $\varphi_1(X), \varphi_2(Y), \mathsf{E}[\varphi_1(x)\varphi_2(Y)]_{x=X} \in \mathscr{M}$, 则称随机向量 Y 独立于随机向量 X.

对于随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$, 若任意 $n \geqslant 2$, X_n 独立于 $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, 则称 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立随机变量序列.

定义 6 (负相关) [7] 给定随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, 其中 $X_i, Y_j \in \mathscr{M}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 若对于任意不增 (不减) 的两个函数 $\varphi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 和 $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 有 $\mathsf{E}[\varphi_1(X)\varphi_2(Y)] \leqslant \mathsf{E}[\varphi_1(X)]\mathsf{E}[\varphi_2(Y)]$, 其中 $\varphi_1(X), \varphi_2(Y) \in \mathscr{M}$, $\mathsf{E}[\varphi_2(Y)] \geqslant 0$, $\varphi_1(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, 则称随机向量 Y 是负相关于随机向量 X 的.

对于随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$, 若任意 $n \geqslant 2$, X_n 负相关于 $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$, 则称 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为负相关随机变量序列.

定义 7 (相关函数) 给定随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_k \in \mathscr{M}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 定义

$$\beta_X(c) := \mathsf{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} cX_k\Big)\Big] - \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cX_k)], \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}.$$

我们称 β_X 为随机向量 X 的相关函数.

定义 8 (相关系数函数) 给定随机变量 $X, Y \in \mathscr{M}$, 对于任意实数 c $(c \neq 0)$, 若 $\beta_{X,X}(c) > 0$ 且 $\beta_{Y,Y}(c) > 0$, 则 $\rho_{X,Y}(c) := \beta_{X,Y}(c)/\sqrt{\beta_{X,X}(c)\beta_{Y,Y}(c)}$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$ $(c \neq 0)$, 称为 X 与 Y 的相关系数函数.

定义 9 (弱负相关) 给定随机向量 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_k \in \mathscr{M}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, 若其相关函数 $\beta_X(c) \leqslant 0$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$, 则称随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是弱负相关的.

对于序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$, 若对于任意整数 $n \geqslant 1$ 和任意常数 $c \in \mathbb{R}$, $\beta_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(c) \leqslant 0$, 则称 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是弱负相关随机变量序列.

定义 10 (象限负相关) [8] 给定序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$, 若对于任意整数 $n \geqslant 1$ 和任意的概率测度 $\mathsf{P} \in \mathscr{P}$, 我们有

$$\mathsf{P}(X_k \leqslant x_k; 1 \leqslant k \leqslant n) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k \leqslant x_k), \tag{3}$$

且

$$\mathsf{P}(X_k > x_k; 1 \leqslant k \leqslant n) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k > x_k), \tag{4}$$

其中 x_k 为任意实数, $1 \leqslant k \leqslant n$, 则称 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是象限负相关的.

命题 11 给定 $\mathscr{P}$ 及其相应的次线性期望 E, 对于随机变量序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$,

(i) 若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是独立的, 则它是负相关的.

(ii) 若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是负相关的, 则它是弱负相关的.

(iii) 若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是象限负相关的, 则它是弱负相关的.

证明: 根据定义知 (i) 和 (ii) 是显然成立的. 对于任意的整数 $n \geqslant 1$ 和实数 c, 若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是象限负相关的, 则根据关系式 (3) 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} cX_k\Big)\Big] &= \sup_{\mathsf{P}\in\mathscr{P}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} cX_k\Big)\Big] \leqslant \sup_{\mathsf{P}\in\mathscr{P}} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[\exp(cX_k)] \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cX_k)].\end{aligned}$$

根据定义可知本引理中 (iii) 也是成立的. □

引理 12 给定 $\mathscr{P}$ 及其相应的次线性期望 E, 若 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ 是弱负相关的, 则对于任意 $a \neq 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, 我们有 $\{aX_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是弱负相关的.

证明: 根据弱负相关随机变量序列的定义易知本引理成立. □

例 13 假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是带模糊贝努利随机变量序列 (参考文献 [2,9] 及其中相关参考文献), 满足对任意 $n \geqslant 1$,

$$\mathsf{Q}(X_n = 1) = p_n, \qquad \mathsf{Q}(X_n = 0) = 1 - p_n, \tag{5}$$

$$\mathsf{Q}(X_k = q_k; 1 \leqslant k \leqslant n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{Q}(X_k = q_k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{6}$$

其中实数 $p_n \in [1/3, 1/2]$, $q_k = 0, 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

显然对于任意可测集 $B_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathsf{Q}(X_k \in B_k; 1 \leqslant k \leqslant n) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{Q}(X_k \in B_k).$$

令 $\mathscr{P} := \{$概率测度 Q 满足等式 (5) 和 (6)$\}$, 我们可以给出 $\mathscr{P}$ 对应的次线性期望, 即上期望 $\mathsf{E}(X) := \sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathscr{P}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(X)$, $\forall X \in \mathscr{M}$. 则易于验证 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在次线性期望 E 下是独立的、负相关的和弱负相关的, 也是 $\mathscr{P}$ 下象限负相关的.

例 14 假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是例 13 中给定的随机变量序列, 令 $Y_n = X_n - X_{n-1}$, $\forall n \geqslant 1$, 其中 $X_0 = 0$, 则 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是弱负相关的, 但是在次线性期望 E 下它不是独立的, 不是负相关的, 也不是 $\mathscr{P}$ 下象限负相关的.

证明: 我们可以验证当 $c \geqslant 0$ 时, $\mathsf{E}[\exp(cX_n)] = (\mathrm{e}^c + 1)/2$, 当 $c < 0$ 时, $\mathsf{E}[\exp(cX_n)] = (\mathrm{e}^c + 2)/3$. 则对于任意实数 c 和整数 $n \geqslant 1$, 一方面

$$\mathsf{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} cY_k\Big)\Big] = \mathsf{E}[\exp(cX_n)],$$

另一方面, 若 $c = 0$, 则有

$$\prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cY_k)] = \mathsf{E}[\exp(cX_n)] = 1.$$

若 $c \neq 0$, 则对任意 $2 \leqslant k \leqslant n$, 由于 X_k 独立于 X_{k-1}, 我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cY_k)] &= \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cX_k)]\mathsf{E}[\exp(-cX_{k-1})] \\
&= \mathsf{E}[\exp(cX_n)] \prod_{k=1}^{n-1} \mathsf{E}[\exp(cX_k)]\mathsf{E}[\exp(-cX_k)] \\
&= \mathsf{E}[\exp(cX_n)] \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{6}[(\mathrm{e}^{|c|} + 1)(\mathrm{e}^{-|c|} + 2)] > \mathsf{E}[\exp(cX_n)].
\end{aligned}$$

从而

$$\mathsf{E}\Big[\exp\Big(\sum_{k=1}^{n} cY_k\Big)\Big] \leqslant \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\exp(cY_k)], \qquad \forall\, c \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1,$$

即 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为弱负相关随机变量序列. 显然, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是独立的. 我们也可以验证

$$\mathsf{E}[\exp(Y_1 - Y_2)] > \mathsf{E}[\exp(Y_1)]\mathsf{E}[\exp(-Y_2)].$$

这就意味着 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是负相关的. 我们同样可以验证对 $\forall\,\mathsf{Q} \in \mathscr{P}$, $\mathsf{Q}(Y_1 = 1, Y_2 = -1) > \mathsf{Q}(Y_1 = 1)\mathsf{Q}(Y_2 = -1)$, 故而 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也不是象限负相关的. □

§4. 弱负相关随机变量的性质

定理 15 给定 $\mathscr{P}$ 及其相应的次线性期望 E, 令随机变量 $X, Y \in \mathscr{M}$, 我们有

(i) 对于任意充分小的实数 c $(c \geqslant 0)$, $\beta_{X,Y}(c) \leqslant o(c)$, 其中 $o(c)$ 表示 $c \to 0$ 时的无穷小量, 并且

$$\liminf_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,Y}(c)}{c} \geqslant \max\{\underline{\mu}(X) - \overline{\mu}(X), \underline{\mu}(Y) - \overline{\mu}(Y)\}, \tag{7}$$

$$\limsup_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,Y}(c)}{c} \leqslant 0, \tag{8}$$

$$\limsup_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,Y}(c)}{c^2} \leqslant \mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X, Y). \tag{9}$$

(ii) 假设 X 和 Y 都没有均值不确定性, 则

$$\lim_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,Y}(c)}{c} = 0, \tag{10}$$

$$\liminf_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,Y}(c)}{c^2} \geqslant \mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X, Y) - \frac{1}{2}[\overline{\sigma}^2(X) - \underline{\sigma}^2(X) + \overline{\sigma}^2(Y) - \underline{\sigma}^2(Y)]. \tag{11}$$

证明: (i) 对于任意充分小的实数 $c > 0$, 由 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned}\beta_{X,Y}(c) = {}& \mathsf{E}\Big[1 + c(X+Y) + c^2XY + \frac{c^2}{2}(X^2+Y^2) + o(c^2)\Big] \\ & - \mathsf{E}\Big[1 + cX + \frac{c^2}{2}X^2 + o(c^2)\Big]\mathsf{E}\Big[1 + cY + \frac{c^2}{2}Y^2 + o(c^2)\Big].\end{aligned} \tag{12}$$

根据 E 的次可加性可得

$$\beta_{X,Y}(c) = \mathsf{E}(cX + cY) - \mathsf{E}(cX) - \mathsf{E}(cY) + o(c) \leqslant o(c).$$

这也意味着不等式 (8) 成立. 根据 E 的次可加性和正齐次性, 我们有

$$\begin{aligned}\beta_{X,Y}(c) \geqslant {}& \max\{c[\mathsf{E}(X) - \mathsf{E}(-Y) - \mathsf{E}(X) - \mathsf{E}(Y)], c[\mathsf{E}(Y) - \mathsf{E}(-X) - \mathsf{E}(X) - \mathsf{E}(Y)]\} \\ & + o(c) \\ = {}& c\max\{\underline{\mu}(Y) - \overline{\mu}(Y), \underline{\mu}(X) - \overline{\mu}(X)\} + o(c).\end{aligned}$$

从而可得不等式 (7). 再次应用 E 的次可加性可得

$$\beta_{X,Y}(c) \leqslant c^2[\mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)] + o(c^2) = c^2\mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X,Y) + o(c^2),$$

这意味着不等式 (9) 成立.

(ii) 由本定理中 (i) 可知等式 (10) 显然成立. 对于充分小的实数 $c>0$, 根据等式 (12) 和 E 的次可加性可得

$$\begin{aligned}\beta_{X,Y}(c) \geqslant\ & \mathsf{E}(c^2XY) - \mathsf{E}\Big(cX + \frac{c^2}{2}X^2\Big)\mathsf{E}\Big(cY + \frac{c^2}{2}Y^2\Big)\\ & - \mathsf{E}\Big[-\Big(cX + \frac{c^2}{2}X^2\Big)\Big] - \mathsf{E}\Big(cX + \frac{c^2}{2}X^2\Big)\\ & - \mathsf{E}\Big[-\Big(cY + \frac{c^2}{2}Y^2\Big)\Big] - \mathsf{E}\Big(cY + \frac{c^2}{2}Y^2\Big) + o(c^2).\end{aligned}$$

因为 X 和 Y 都不具有均值不确定性, 由引理 4 和 E 的正齐次性可得不等式 (11). □

推论 16　给定随机变量 $X \in \mathscr{M}$, 对任意实数 c, $\beta_{X,X}(c) \geqslant 0$, 并且

$$\lim_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,X}(c)}{c} = 0, \tag{13}$$

$$\limsup_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,X}(c)}{c^2} \leqslant \sigma_{\mathsf{E}}^2(X). \tag{14}$$

特别地, 若 X 没有均值不确定性, 则

$$\liminf_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,X}(c)}{c^2} \geqslant \sigma_{\mathsf{E}}^2(X) - \overline{\sigma}^2(X) + \underline{\sigma}^2(X). \tag{15}$$

若 X 没有均值和方差不确定性, 则

$$\lim_{c\to 0+} \frac{\beta_{X,X}(c)}{c^2} = \sigma_{\mathsf{E}}^2(X). \tag{16}$$

证明:　由 Höller 不等式可得 $\beta_{X,X}(c) = \mathsf{E}[\exp(2cX)] - \mathsf{E}[\exp(cX)]^2 \geqslant 0$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$. 从而结合定理 15 本推论得证. □

推论 17　假设 $X_1, X_2 \in \mathscr{M}$ 都没有均值不确定性, 且对于充分小的常数 $c>0$, X 与 Y 的相关系数函数 $\rho_{X_1,X_2}(c)$ 的定义有意义.

(i) 若 $\alpha_i := \sigma_{\mathsf{E}}^2(X_i) - [\overline{\sigma}^2(X_i) - \underline{\sigma}^2(X_i)] > 0$, $i=1,2$, 则

$$\limsup_{c\to 0+} \rho_{X_1,X_2}(c) \leqslant \frac{\mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X_1,X_2)}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}.$$

(ii) 若 $\sigma_{\mathsf{E}}(X_i) > 0$, $i=1,2$, 则

$$\liminf_{c\to 0+} \rho_{X_1,X_2}(c) \geqslant \rho_{\mathsf{E}}(X_1,X_2) - \frac{\overline{\sigma}^2(X_1) - \underline{\sigma}^2(X_1) + \overline{\sigma}^2(X_2) - \underline{\sigma}^2(X_2)}{2\sigma_{\mathsf{E}}(X_1)\sigma_{\mathsf{E}}(X_2)}.$$

特别地, 若 X_i 没有方差不缺定性, $i=1,2$, 则

$$\lim_{c\to 0+}\rho_{X_1,X_2}(c)=\rho_{\mathsf{E}}(X_1,X_2).$$

证明: 由定理 15 中 (9) 和 (15) 式可得 (i). 由定理 15 中 (11) 和 (14) 式可得 (ii). □

定理 18 给定 $X,Y\in\mathscr{M}$, 若 X 和 Y 是弱负相关的且都没有均值不确定性, 则

$$\mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X,Y)\leqslant\frac{1}{2}[\overline{\sigma}^2(X)-\underline{\sigma}^2(X)+\overline{\sigma}^2(Y)-\underline{\sigma}^2(Y)].$$

若进一步假设 X 和 Y 也没有方差不确定性, 则 $\mathsf{Cov}_{\mathsf{E}}(X,Y)\leqslant 0$, $\rho_{\mathsf{E}}(X,Y)\leqslant 0$.

证明: 根据弱负相关随机变量的定义和定理 15 易得本定理. □

§5. 强大数定律

引理 19 (Chebyshev 不等式) [10] 对任意实数 $x>0$ 和随机变量 $X\in\mathscr{M}$, $V(X\geqslant x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}\mathsf{E}(\mathrm{e}^X)$.

引理 20 (Borel-Cantelli 引理) [10] 假设事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{F}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V(A_n)<\infty$, 则有 $V\big(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\big)=0$.

下面的引理是显然成立的.

引理 21 $\mathrm{e}^x\leqslant 1+x+x^2\mathrm{e}^{-|x|}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

引理 22 假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{M}$ 是弱负相关随机变量序列, 满足 $\mathsf{E}(X_n)=\overline{\mu}\in\mathbb{R}$, $\forall\, n\geqslant 1$, 且存在 $K>0$ 使得 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|X_n|\leqslant K$. 那么对任意的实数 $m>0$ 存在常数 $C>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\}\leqslant C,$$

其中 C 只依赖于常数 m, $\overline{\mu}$ 和 K.

证明: 利用引理 21 和次线性期望 E 的性质可得对于任意 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $m>0$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\}\\ \leqslant\ &1+\Big[\frac{m\ln(1+n)(\overline{\mu}+K)}{n}\Big]^2\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)(\overline{\mu}+K)}{n}\Big].\end{aligned}$$

因为 $[\ln(1+n)]^2/n$ 是收敛序列, 存在常数 $d>0$ 使得 $\forall\, n\geqslant 1$, $[\ln(1+n)]^2/n\leqslant d$. 从而

$$\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\}\leqslant 1+\frac{1}{n}C_1,$$

其中 $C_1 = dm^2(\overline{\mu}+K)^2 2^{m(\overline{\mu}+K)} > 0$. 根据假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是弱负相关的, 由引理 12 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\} &\leqslant \prod_{i=1}^{n}\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\}\\ &\leqslant \Big(1+\frac{1}{n}C_1\Big)^n \to \mathrm{e}^{C_1},\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$. 引理得证.　□

定理 23 (强大数定律)　假设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathscr{M}$ 为弱负相关随机变量序列, 存在常数 $\overline{\mu},\underline{\mu}\in(-\infty,+\infty)$ 满足 $\overline{\mu}\geqslant\underline{\mu}$, 使得 $\mathsf{E}(X_n)=\overline{\mu}$, $-\mathsf{E}(-X_n)=\underline{\mu}$, $\forall\, n\geqslant 1$, 且存在常数 $K>0$ 使得 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|X_n|\leqslant K$. 令 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $\forall\, n\geqslant 1$, 则

$$v\Big(\underline{\mu}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\leqslant\overline{\mu}\Big)=1. \tag{17}$$

证明:　由于 V 与 v 是共轭的, 上概率 V 具有次可加性, 要证明关系式 (17) 我们只需要证明下面的两个式子成立

$$V\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}>\overline{\mu}\Big)=0, \tag{18}$$

$$V\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}<\underline{\mu}\Big)=0. \tag{19}$$

我们先来看 (18) 式. 对于任意的实数 $\epsilon>0$ 和 $m>1$, 由引理 19 和 22 可得

$$\begin{aligned}V\Big(\frac{S_n}{n}>\overline{\mu}+\epsilon\Big) &= V\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{\mu})\geqslant m\ln(1+n)\epsilon\Big]\\ &\leqslant (1+n)^{-m\epsilon}\sup_{n\geqslant 1}\mathsf{E}\Big\{\exp\Big[\frac{m\ln(1+n)}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{\mu})\Big]\Big\}\\ &\leqslant C(1+n)^{-m\epsilon},\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 为仅依赖于 m, $\overline{\mu}$ 和 K 的常数. 取 m 满足 $m\epsilon>1$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}V\Big(\frac{S_n}{n}>\overline{\mu}+\epsilon\Big)<\infty.$$

利用 Borel-Cantelli 引理即可得 (18) 式.

用 $\{-X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 代替 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, 根据引理 12 同理可证 (19) 式成立. 本定理证完.　□

参 考 文 献

[1] PENG S G. *G*-expectation, *G*-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type [M] // BENTH F E, NUNNO G D, LINDSTRØM T, et al. *Stochastic Analysis and Applications*. Berlin: Springer, 2007: 541–567.

[2] PENG S G. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation [J]. *Stochastic Process Appl*, 2008, **118(12)**: 2223–2253.

[3] PENG S G. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty [OL]. 2010 [2010-02-24], https://arxiv.org/abs/1002.4546.

[4] CHEN Z J. Strong laws of large numbers for capacities [OL]. 2010 [2010-06-03]. https://arxiv.org/abs/1006.0749v1.

[5] CHEN Z J. Strong laws of large numbers for sub-linear expectations [J]. *Sci China Math*, 2016, **59(5)**: 945–954.

[6] ZHANG L X. Exponential inequalities under the sub-linear expectations with applications to laws of the iterated logarithm [J]. *Sci China Math*, 2016, **59(12)**: 2503–2526.

[7] ZHANG L X. Rosenthal's inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications [J]. *Sci China Math*, 2016, **59(4)**: 751–768.

[8] LEHMANN E L. Some concepts of dependence [J]. *Ann Math Statist*, 1966, **37(5)**: 1137–1153.

[9] EPSTEIN L G, SCHNEIDER M. IID: independently and indistinguishably distributed [J]. *J Econom Theory*, 2003, **113(1)**: 32–50.

[10] CHEN Z J, WU P Y, LI B M. A strong law of large numbers for non-additive probabilities [J]. *Internat J Approx Reason*, 2013, **54(3)**: 365–377.

The Properties and Strong Law of Large Numbers for Weakly Negatively Dependent Random Variables under Sublinear Expectations

CHEN Xiaoyan

(*School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China*)

XU Xiaoming

(*School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing, 210023, China*)

Abstract: Strong laws of large numbers play key role in nonadditive probability theory. Recently, there are many research papers about strong laws of large numbers for independently and identically distributed (or negatively dependent) random variables in the framework of nonadditive probabilities (or nonlinear expectations). This paper introduces a concept of weakly negatively dependent random variables and investigates the properties of such kind of random variables under a framework of nonadditive probabilities and sublinear expectations. A strong law of large numbers is also proved for weakly negatively dependent random variables under a kind of sublinear expectation as an application.

Keywords: weakly negatively dependent random variables; sublinear expectation; nonadditive probability; strong law of large numbers

2010 Mathematics Subject Classification: 60E05; 60F15