应用概率统计　第 35 卷
第 2 期　2019 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2019, Vol. 35, No. 2, pp. 193-199
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2019.02.007

经典风险模型中有限时间区间分红问题 *

王翠莲　　刘　晓*

(安徽师范大学数学与统计学院, 芜湖, 241002)

摘　要: 本文研究经典风险模型中有限时间区间分红问题. 假设在时间区间 $[0,t]$ 内, 分红按照 barrier 策略支付, 即给定一个非负 barrier 值 b, 仅当盈余超过 b 时, 将超过的部分支付分红. 利用微分法, 得到了 $[0,t]$ 内期望折现分红 $(V(x;t))$ 满足的方程, 并在指数理赔假设下给出了 $V(x;t)$ 关于 t 的 Laplace 变换的显式表达式. 最后, 使用 Stehfest 方法给出一个数值例子.

关键词: 分红; 有限时间区间; Laplace 变换; Stehfest 方法

中图分类号: O212.62

英文引用格式: WANG C L, LIU X. Dividend problems for finite time interval in the classical risk model [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(2): 193–199. (in Chinese)

§1. 引　　言

假设保险公司的盈余过程为

$$X(s) = x + cs - \sum_{i=1}^{N(s)} Y_i, \tag{1}$$

其中 $X(0) = x \geqslant 0$ 为初始盈余, $c > 0$ 为保费收取速率, $\{N(s);\, s \geqslant 0\}$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的泊松过程, $\{Y_i;\, i = 1, 2, \ldots\}$ 是独立同分布的非负连续型理赔随机变量序列, 共同分布函数为 $F(y)$. 模型 (1) 称为经典风险模型, 关于该模型的介绍可以参看文献 [1] 和 [2].

分红问题最早由 De Finetti[3] 提出, 并在离散时间风险模型中研究了最优分红策略使得折现分红的期望达到最大, 此后, 关于分红问题受到很多研究者的关注, Avanzi[4] 与 Albrecher 和 Thonhauser[5] 分别从不同角度对分红问题的进展和未来研究前景给予详细的阐述. 近年来, 分红问题也一直是精算研究者们关注的热点, 并对模型进行推广, 如 Zhang 和 Liu[6] 与 Jin 等[7] 研究了带随机决策时间的分红问题, Zhao 等[8] 和 Chen 等[9] 研究了时间不一致的分红问题, Yao 等[10] 研究了带注资的分红问题.

*王翠莲受教育部人文社科项目 (批准号: 17YJC910009) 资助. 刘晓受安徽省自然科学基金项目 (批准号: 1908085MA21)、安徽高校自然科学研究项目 (批准号: KJ2018A0305)、安徽师范大学博士科研启动金 (批准号: 2016XJJ119) 和安徽师范大学科研培育基金 (批准号: 2016XJJ004、2015xmpy14、2016XJJ055) 资助.

*通讯作者, E-mail: yjjatyjjat@163.com.

本文 2018 年 1 月 16 日收到, 2018 年 10 月 6 日收到修改稿.

在现有的文献中, 大多数是研究无穷时间区间的分红问题, 而对于有限时间区间的分红问题却鲜有文献涉及. 就我们所知, 文献 [11] 中假设分红前盈余过程为 $U(s) = x+\mu s+\sigma B(s)$ (其中 μ 和 $\sigma>0$ 为常数, $B(s)$ 为布朗运动), 讨论有限时间区间内最优分红策略问题. 本文受到该文献的启发, 假设分红前盈余过程为经典风险模型, 给定分红策略是参数为 $b\geqslant 0$ 的 barrier 策略, 讨论在有限时间区间 $[0,t]$ 内分红随机变量折现值的期望.

当 $x\leqslant b$ 时, 记在参数为 $b\geqslant 0$ 的 barrier 策略下, 分红后的盈余过程为 $\{X^b(s);\ s\geqslant 0\}$, 则有

$$X^b(s)=x+cs-\sum_{i=1}^{N(s)}Y_i-D^b(s),$$

$D^b(s)$ 为到时间 s 为止分红的累积值, 即 $D^b(s)=c\int_0^s I_{\{X^b(r)=b\}}\mathrm{d}r$, $I_{\{\cdot\}}$ 表示示性函数. 记破产时间 $\tau^b:=\inf\{s\geqslant 0: X^b(s)<0\}$, 假设破产后分红不再进行, 即 $D^b(s)=0,\ s\geqslant\tau^b$. 给定时间 $t\geqslant 0$, 我们的目的是要研究 $[0,t]$ 时间区间内期望折现分红 $V(x;t)$, 即

$$V(x;t)=\mathsf{E}_x\Big[\int_0^{t\wedge\tau^b}\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}D^b(s)\Big], \tag{2}$$

其中 $\mathsf{E}_x[\cdot]$ 表示相应于初始盈余为 x 的数学期望, δ 表示折现率. 本文只考虑 $x\leqslant b$ 的情形, 因为当 $x>b$ 时, 有 $V(x;t)=x-b+V(b;t)$.

本文结构安排如下: 第二节给出 $V(x;t)$ 满足的方程, 并得到 $V(x;t)$ 的一些性质; 第三节在指数理赔假设下给出 $V(x;t)$ 关于变量 t 的 Laplace 变换 $W(x;s)$ 的表达式; 第四节用 Stehfest 方法得到 $V(x;t)$ 的数值解.

§2. $V(x;t)$ 满足的方程

本节讨论 $V(x;t)$ 的一些性质并给出其满足的方程.

命题 1 给出 $V(x;t)$ 关于变量 t 的有界性, 说明 $V(x;t)$ 关于变量 t 的 Laplace 变换 $W(x;s)$ 是存在的.

命题 1 $V(x;t)\leqslant c(1-\mathrm{e}^{-\delta t})/\delta$.

证明: 易见 $\mathrm{d}D^b(s)\leqslant c\mathrm{d}s$, 由 (2) 式知$V(x;t)\leqslant c\int_0^t\mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}s=c(1-\mathrm{e}^{-\delta t})/\delta$. 证毕. □

定理 2 给出, 当 $t>0$ 且 $0<x<b$ 时, $V(x;t)$ 满足的方程.

定理 2 当 $0<x<b$ 且 $t>0$ 时, $V(x;t)$ 满足如下的方程

$$V_t(x;t)-cV_x(x;t)+(\lambda+\delta)V(x;t)-\lambda\int_0^x V(x-y;t)\mathrm{d}F(y)=0. \tag{3}$$

边界条件为

$$\lim_{t\to 0}V(x;t)=V(x;0)=0, \tag{4}$$

$$V_t(0+;t)-cV_x(0+;t)+(\lambda+\delta)V(0+;t)=0. \tag{5}$$

证明: 当 $0\leqslant x<b$ 时, 考虑时间区间 $[0,\triangle t)$ 内可能发生如下几种情形:

1) 以概率 $1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)$ 没有理赔发生, $\triangle t$ 时刻的盈余为 $x+c\triangle t$;

2) 以概率 $\lambda\triangle t+o(\triangle t)$ 的概率只发生一次理赔;

3) 以概率 $o(\triangle t)$ 发生一次以上理赔,

可以得到

$$\begin{aligned}V(x;t)=&[1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}V(x+c\triangle t;t-\triangle t)\\&+[\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}\int_0^x V(x-y;t-\triangle t)\mathrm{d}F(y)+o(\triangle t).\end{aligned} \tag{6}$$

由 (6) 式易知 $V(x;t)$ 在区域 $\{0<x<b,\ t>0\}$ 内关于 x 和 t 的偏导数均存在, 从而可以得到在该区域内有

$$\begin{aligned}V(x;t)=&[1-(\lambda+\delta)\triangle t+o(\triangle t)][V(x;t)-V_t(x;t)\triangle t+cV_x(x;t)\triangle t+o(\triangle t)]\\&+[\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\int_0^x V(x-y;t-\triangle t)\mathrm{d}F(y)+o(\triangle t).\end{aligned}$$

从而 (3) 式成立. $V(x;0)=0$ 是显然的. 在 (6) 式中令 $t=\triangle t$, 然后令 $\triangle t\to 0$, 即得 (4) 式. 在 (3) 式中令 $x\to 0+$ 即得 (5) 式. 证毕. □

定理 (3) 给出 $V(x;t)$ 在 $x=b$ 处的连续性.

定理 3 $\lim\limits_{x\to b}V(x;t)=V(b;t)$.

证明: 在 (6) 式中令 $x=b-c\triangle t$, 有

$$\begin{aligned}V(b-c\triangle t;t)=&[1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}V(b;t-\triangle t)\\&+[\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}\int_0^{b-c\triangle t}V(b-c\triangle t-y;t-\triangle t)\mathrm{d}F(y)+o(\triangle t).\end{aligned} \tag{7}$$

令 $\triangle t\to 0$, 有

$$\lim_{\triangle t\to 0}V(b-c\triangle t;t)=\lim_{\triangle t\to 0}V(b;t-\triangle t). \tag{8}$$

类似于 (6) 式, 当 $x=b$ 时, 有

$$\begin{aligned}V(b;t)=&[1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}\Big[c\frac{\mathrm{e}^{\delta\triangle t}-1}{\delta}+V(b;t-\triangle t)\Big]\\&+[\lambda\triangle t+o(\triangle t)]\mathrm{e}^{-\delta\triangle t}\int_0^b V(b-y;t-\triangle t)\mathrm{d}F(y)+o(\triangle t).\end{aligned} \tag{9}$$

令 $\triangle t \to 0$, 有

$$\lim_{\triangle t\to 0} V(b;t-\triangle t)=V(b;t). \tag{10}$$

由 (8) 和 (10) 式可知结论成立. 证毕. □

定理 4 给出 $V(x;t)$ 在 $x=b$ 处的一个边界条件.

定理 4 $V_x(b;t)=1$.

证明: (7) 式两边同减去 $V(b;t)$, 再除以 $\triangle t$, 令 $\triangle t\to 0$, 有

$$V_t(b;t)-cV_x(b-;t)+(\lambda+\delta)V(b;t)-\lambda\int_0^b V(b-y;t)\mathrm{d}F(y)=0. \tag{11}$$

由 (9) 式可知,

$$V_t(b;t)-c+(\lambda+\delta)V(b;t)-\lambda\int_0^b V(b-y;t)\mathrm{d}F(y)=0. \tag{12}$$

由 (11) 和 (12) 式可得 $V_x(b-;t)=1$. $V_x(b+;t)=1$ 是显然的. 证毕. □

§3. 指数理赔假设下 $V(x;t)$ 的讨论

本节假设理赔随机变量服从参数为 $\beta>0$ 的指数分布, 即 $F(y)=1-\mathrm{e}^{-\beta y}$, $y\geqslant 0$, 给出 $V(x;t)$ 关于 t 的 Laplace 变换的表达式.

将 $F(y)=1-\mathrm{e}^{-\beta y}$ 代入 (3) 式并换元, 得到

$$V_t(x;t)-cV_x(x;t)+(\lambda+\delta)V(x;t)-\lambda\beta\mathrm{e}^{-\beta x}\int_0^x V(z;t)\mathrm{e}^{\beta z}\mathrm{d}z=0. \tag{13}$$

用算子 $\partial/\partial x+\beta$ 作用于 (13) 式, 有

$$V_{tx}(x;t)-cV_{xx}(x;t))+(\lambda+\delta-\beta c)V_x(x;t)+\beta V_t(x;t)+\beta\delta V(x;t)=0. \tag{14}$$

记 $W(x;s)$ $(s>0)$ 为 $V(x;t)$ 关于 t 的 Laplace 变换, 即 $W(x;s)=\int_0^\infty V(x;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$. 由 (4) 式和命题 1 可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty V_t(x;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sW(x;s),\\
&\int_0^\infty V_x(x;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=W_x(x;s),\\
&\int_0^\infty V_{tx}(x;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=sW_x(x;s),\\
&\int_0^\infty V_{xx}(x;t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=W_{xx}(x;s).
\end{aligned}$$

对方程(14) 两边关于 t 作 Laplace 变换, 有

$$cW_{xx}(x;s)+(\beta c-\lambda-\delta-s)W_x(x;s)-\beta(\delta+s)W(x;s)=0. \tag{15}$$

求解方程 (15) 可得

$$W(x;s)=A_1(s)\mathrm{e}^{g_1(s)x}+A_2(s)\mathrm{e}^{g_2(s)x}, \tag{16}$$

其中 $g_1(s)$ 和 $g_2(s)$ 分别是方程

$$cy^2+(\beta c-\lambda-\delta-s)y-\beta(\delta+s)=0$$

的两个根, 即

$$\begin{aligned} g_1(s)&=\frac{\lambda+\delta+s-\beta c+\sqrt{(\beta c-\lambda-\delta-s)^2+4\beta c(\delta+s)}}{2c},\\ g_2(s)&=\frac{\lambda+\delta+s-\beta c-\sqrt{(\beta c-\lambda-\delta-s)^2+4\beta c(\delta+s)}}{2c}. \end{aligned}$$

对 (5) 式关于 t 作 Laplace 变换, 有

$$sW(0+;s)-cW_x(0+;s)+(\lambda+\delta)W(0+;s)=0. \tag{17}$$

对等式 $V_x(b;t)=1$ 两边关于 t 作 Laplace 变换, 有

$$W_x(b;s)=\frac{1}{s}. \tag{18}$$

将 (16) 式代入 (17) 和 (18) 式, 可得

$$\begin{aligned} A_1(s)&=\frac{\lambda+\delta+s-cg_2(s)}{s\{[\lambda+\delta+s-cg_2(s)]g_1(s)\mathrm{e}^{g_1(s)b}-[\lambda+\delta+s-cg_1(s)]g_2(s)\mathrm{e}^{g_2(s)b}\}},\\ A_2(s)&=-\frac{\lambda+\delta+s-cg_1(s)}{s\{[\lambda+\delta+s-cg_2(s)]g_1(s)\mathrm{e}^{g_1(s)b}-[\lambda+\delta+s-cg_1(s)]g_2(s)\mathrm{e}^{g_2(s)b}\}}. \end{aligned}$$

所以有

$$W(x;s)=\frac{[\lambda+\delta+s-cg_2(s)]\mathrm{e}^{g_1(s)x}-[\lambda+\delta+s-cg_1(s)]\mathrm{e}^{g_2(s)x}}{s\{[\lambda+\delta+s-cg_2(s)]g_1(s)\mathrm{e}^{g_1(s)b}-[\lambda+\delta+s-cg_1(s)]g_2(s)\mathrm{e}^{g_2(s)b}\}}. \tag{19}$$

由 Laplace 变换逆变换计算公式可得

$$V(x;t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}W(x,s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\qquad \alpha>0, \tag{20}$$

其中 j 为虚数单位.

§4. 数值例子

一般很难通过 (20) 式得到 $V(x;t)$ 的解析解, Stehfest[12] 给出了 Laplace 变换的数值反演公式, 并在随后发表的评论 [13] 中指出其中的错误, 并给出了修正, 修正后的公式为

$$V(x;T)=\frac{\ln 2}{T}\sum_{i=1}^{N}Z_iW\Big(x;\frac{\ln 2}{T}i\Big), \tag{21}$$

其中

$$Z_i=(-1)^{N/2+i}\sum_{k=[(i+1)/2]}^{\min(i,N/2)}\frac{k^{N/2}(2k)!}{(N/2-k)!k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!}, \tag{22}$$

(21) 和 (22) 式中 N 一般取 6 至 18 之间的偶数, $[(i+1)/2]$ 表示对 $(i+1)/2$ 取整. 我们取 $c=1$, $\lambda=0.1$, $\beta=0.2$, $b=1$, $\delta=0.05$, 用 Stehfest 算法 (取 $N=14$) 得到 $V(0.2;t)$, $V(0.5;t)$, $V(0.8;t)$ 的图形如下:

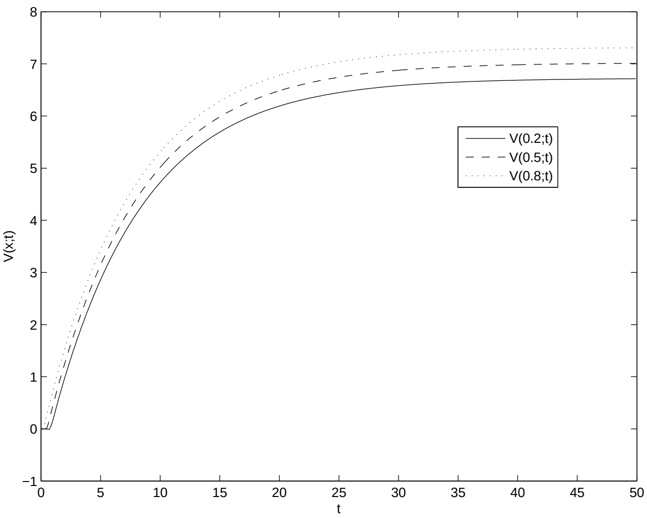

图 1 $V(x;t)$ **的曲线,** $x=0.2$, 0.5, 0.8

由图 1 可知, 当 t 趋于 0 时, 对$x=0.2$, 0.5, 0.8, $V(x;t)$ 均趋于0, 这与边界条件 (4) 是吻合的; 若我们取 t 充分大, 如 $t=50$, $V(0.2;50)=6.7144$, $V(0.5;50)=7.0101$, $V(0.8;50)=7.3076$, 由文献 [14] 中 (2.34) 式, 可以计算得到无穷时间区间情形的分红现值, 分别为 $V(0.2;\infty)=6.7244$, $V(0.5;\infty)=7.0201$, $V(0.8;\infty)=7.3176$; 可见, 用 Stehfest 方法得到的近似效果是非常好的.

参 考 文 献

[1] BÜHLMANN H. *Mathematical Methods in Risk Theory* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[2] GRANDELL J. *Aspects of Risk Theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[3] DE FINETTI B. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio [C] // *Proceedings of the Transactions of the 15th International Congress of Actuaries, Vol.2*, 1957: 433–443.

[4] AVANZI B. Strategies for dividend distribution: a review [J]. *N Am Actuar J*, 2009, **13(2)**: 217–251.

[5] ALBRECHER H, THONHAUSER S. Optimality results for dividend problems in insurance [J]. *RACSAM Rev R Acad Cienc Exactas Fís Nat Ser A Mat*, 2009, **103(2)**: 295–320.

[6] ZHANG Z M, LIU C L. Moments of discounted dividend payments in a risk model with randomized dividend-decision times [J]. *Front Math China*, 2017, **12(2)**: 493–513.

[7] JIN F, OU H, YANG X Q. A periodic dividend problem with inconstant barrier in Markovian environment [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2015, **31(2)**: 281–294.

[8] ZHAO Q, WEI J Q, WANG R M. On dividend strategies with non-exponential discounting [J]. *Insurance Math Econom*, 2014, **58**: 1–13.

[9] CHEN S M, ZENG Y, HAO Z F. Optimal dividend strategies with time-inconsistent preferences and transaction costs in the Cramér-Lundberg model [J]. *Insurance Math Econom*, 2017, **74**: 31–45.

[10] YAO D J, WANG R M, XU L. Optimal impulse control for dividend and capital injection with proportional reinsurance and exponential premium principle [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, **46(5)**: 2519–2541.

[11] ANGELIS T D, EKSTRÖM E. The dividend problem with a finite horizon [J]. *Ann Appl Probab*, 2017, **27(6)**: 3525–3546.

[12] STEHFEST H. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms [D5] [J]. *Comm ACM*, 1970, **13(1)**: 47–49.

[13] STEHFEST H. Remark on algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms [J]. *Comm ACM*, 1970, **13(10)**: 624.

[14] SCHMIDLI H. *Stochastic Control in Insurance* [M]. London: Springer-Verlag, 2008.

Dividend Problems for Finite Time Interval in the Classical Risk Model

WANG Cuilian LIU Xiao

(*School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu, 241002, China*)

Abstract: In this paper, we study the dividend problems for finite time interval in the classical risk model. Assume that the dividends are paid according to a barrier strategy in the time interval $[0, t]$, i.e., given a nonnegative barrier value b, the dividends only can be paid when the surplus exceeds b and the excess is paid as dividend. Applying the "differential argument", the equation for the total expected discounted dividends in the time interval $[0, t]$ ($V(x; t)$) is derived, and the explicit expression for the Laplace transform of $V(x; t)$ with respect to t is obtained under the assumption that the claim sizes are exponentially distributed. Finally, a numerical example is given by Stehfest method.

Keywords: dividend; finite time interval; Laplace transform; Stehfest method

2010 Mathematics Subject Classification: 62P05; 91B30; 91B70