

Alpha Power 伽马分布的性质与应用 *

牛郁琳 闫在在*

(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特, 010051)

摘要: 本文通过增加一个额外的形状参数, 扩展了伽马分布, 称这种新分布为 alpha power 伽马分布。发现该分布具有相对灵活的危险率函数。研究了它的性质, 包括 s 阶原点矩、矩母函数以及次序统计量分布的显式表达。得到了熵、平均剩余寿命以及平均等待时间的积分表达。讨论了该分布在完全样本下参数的极大似然估计, 得到了参数的 Fisher 信息矩阵。进一步, 研究了一般 II 型逐次截尾样本下的参数估计。最后通过一个实际数据分析说明了提出分布的实用性。

关键词: alpha power transformation; 伽马分布; 极大似然估计; Fisher 信息矩阵; 一般 II 型逐次截尾
中图分类号: O213.2

英文引用格式: NIU Y L, YAN Z Z. Properties and applications of alpha power gamma distribution [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(4): 331–344. (in Chinese)

§1. 引言

近年来, 国内外学者提出了许多通过扩展已有分布产生新分布的方法。新分布的失效函数更加灵活, 扩大了拟合数据的范围。Zografos 和 Balakrishnan^[1] 提出了一种通过伽马随机变量产生单变量分布族的扩展方法: 设 $G(x)$ 为任意累积分布函数 (CDF), 对应的概率密度函数 (PDF) 为 $g(x)$, 定义 gamma-G 分布的 PDF 和 CDF 为

$$f(x) = \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \{-\ln[1 - G(x)]\}^{\alpha-1}, \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{-\ln[1-G(x)]} u^{\alpha-1} e^{-u} du = \frac{\gamma(\alpha, -\ln[1 - G(x)])}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2)$$

其中 $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ 是伽马函数, $\gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt$ 是不完全伽马函数。许多学者利用这种扩展方法得到新分布。Ristić 和 Balakrishnan^[2] 研究了 gamma-exponentiated 分布; Cordeiro 等^[3] 讨论了三参数连续 gamma-Lomax 分布; Iriarte 等^[4] 提出了两参数 gamma-Maxwell 分布。Alzaatreh 等^[5] 引入 T-X 分布族扩展方法: 设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别是

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11861049) 和内蒙古自然科学基金面上项目 (批准号: 2017MS0101、2018MS01027) 资助。

*通讯作者, E-mail: zz.yan@163.com.

本文 2017 年 7 月 14 日收到, 2018 年 9 月 4 日收到修改稿。

随机变量 X 的 CDF 和 PDF, 随机变量 T 定义在 $[0, \infty)$ 上, 它的 PDF 为 $r(t)$, 则 T-X 分布族的 CDF 和 PDF 分别为

$$F_{TX}(x) = \int_0^{-\ln[1-F(x)]} r(t)dt, \quad (3)$$

$$f_{TX}(x) = \frac{dF_{TX}(x)}{dx} = \frac{f(x)}{1-F(x)} r\{-\ln[1-F(x)]\} = h(x)r\{-\ln[1-F(x)]\}, \quad (4)$$

其中 $h(x)$ 是随机变量 X 的危险率函数. 实际上, Alzaatreh 等^[6] 已经讨论了 gamma-Pareto 分布; Alzaatreh 等^[7] 提出 Weibull-Pareto 分布, 都属于 T-X 族. Mahdavi 和 Kundu^[8] 提出通过增加一个额外的形状参数来改善分布灵活性的新方法, 称为 alpha power transformation (APT). 令 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别表示一个连续随机变量 X 的 CDF 和 PDF, 定义 APT 的 CDF 为

$$F_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(x)} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ F(x), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (5)$$

相应的 PDF 为

$$f_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} f(x) \alpha^{F(x)}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ f(x), & \alpha = 1. \end{cases} \quad (6)$$

APT 方法扩展分布的已有研究很少, 主要地, Mahdavi 和 Kundu 利用 APT 方法扩展了单参数指数分布, 产生了一种两参数的分布, 称为 alpha power 指数 (APE) 分布, 研究了该分布的概率性质, 讨论了参数的极大似然估计, 利用实际的数据对 APE 分布进行数据拟合, 获得了满意的模拟效果. 其实 Nassar 等^[9] 已经利用 APT 方法扩展了威布尔分布, 得到 alpha power 威布尔 (APW) 分布, 研究了其概率特性和参数的极大似然估计.

本文利用 APT 方法扩展伽马分布, 称新分布为 alpha power 伽马 (APG) 分布. 扩展的目的是为了获得具有良好概率性质和灵活危险率形状的新分布. 提出的 APG 分布具有相对灵活的危险率函数, 可以更好地拟合数据. 本文剩下的内容安排: 第二节介绍了 APG 分布, 得到该分布的 CDF、PDF、生存函数和危险率函数; 第三节研究了 APG 分布危险率函数和 PDF 的形状; 讨论了 APG 分布的概率性质, 包括矩、矩母函数、分位数函数、熵、次序统计量、平均剩余寿命函数和平均等待时间; 第四节讨论 APG 分布在完全样本下参数的极大似然估计 (MLEs), 并利用一个实际数据集分析并评价了 APG 分布的 MLEs, 验证 APG 分布能够很好的拟合一些寿命数据; 第五节研究了 APG 分布基于一般 II 型逐次截尾数据下的参数估计问题, 并通过实例数据与完全样本下的参数估计进行比较; 第六节是本文的结论.

§2. APG 分布

伽马分布的分布函数 $F_G(x; r, \lambda) = 1 - \Gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r) = \gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)$. 令 $\varphi = (\alpha, r, \lambda)$, 从(5)和(6)中, 得到服从 APG 分布随机变量 X 的 CDF 和 PDF 分别为

$$F_{APG}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-\Gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ 1 - \frac{\Gamma(r, \lambda x)}{\Gamma(r)}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$f_{APG}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha \cdot \lambda^r}{(\alpha - 1)\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \alpha^{1-\Gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\alpha > 0, r > 0$ 为形状参数, $\lambda > 0$ 为尺度参数, $\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ 是上不完全伽马函数, $x > 0$. 相应的生存函数和危险率函数分别为

$$S_{APG}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{\alpha - \alpha^{1-\Gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)}}{\alpha - 1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ \frac{\Gamma(r, \lambda x)}{\Gamma(r)}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$h_{APG}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha \cdot \lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} (\alpha^{1-\Gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} - 1)^{-1}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1; \\ \frac{\lambda^r}{\Gamma(r, \lambda x)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (10)$$

§3. APG 分布的性质

3.1 危险率函数和密度函数的形状

本子节讨论危险率函数和密度函数的形状. 图 1 表示危险率函数的形状呈现单峰、单调增加、单调减少、趋于常数. 图 2 表示密度函数的形状.

性质 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \begin{cases} \frac{\lambda \ln \alpha}{\alpha - 1}, & r = 1; \\ 0, & r > 1; \\ \infty, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

性质 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda \ln \alpha}{\alpha - 1}, & r = 1; \\ 0, & r > 1; \\ \infty, & 0 < r < 1. \end{cases}$$

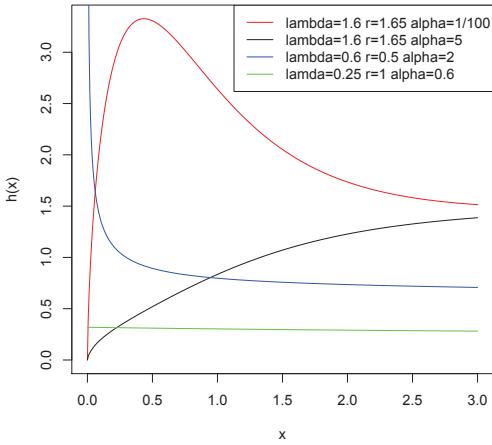


图 1 APG 分布危险率函数的形状

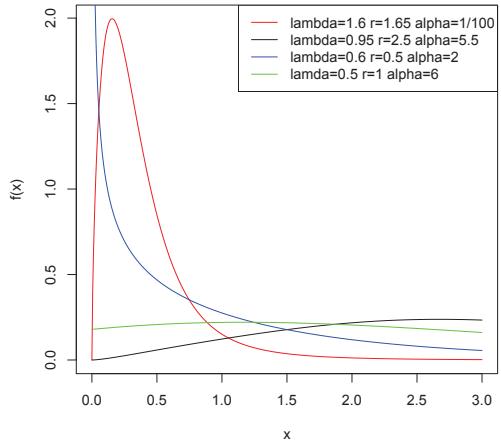


图 2 APG 分布密度函数的形状

3.2 矩和矩母函数

本子节讨论 APG 分布的 s 阶原点矩和矩母函数. 利用级数 $\alpha^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\ln \alpha)^k z^k / k!$, X 的 s 阶矩为

$$\mu'_s = E(X^s) = \frac{\lambda^r}{(\alpha - 1)\Gamma(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} x^{s+r-1} e^{-\lambda x} \left[\frac{\gamma(r, \lambda x)}{\Gamma(r)} \right]^k dx. \quad (11)$$

使用伽马随机变量分布函数的级数表示 $\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r) = [(\lambda x)^r/\Gamma(r)] \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda x)^m / [(r+m)m!]$, (11) 重写为

$$\mu'_s = \frac{\lambda^r}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^{k+1}}{k!\Gamma(r)^{k+1}} \int_0^{\infty} x^{s+r-1} e^{-\lambda x} \left[(\lambda x)^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda x)^m}{(r+m)m!} \right]^k dx.$$

令 $u = \lambda x$, 有

$$\mu'_s = \frac{\lambda^{-s}}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^{k+1}}{k!\Gamma(r)^{k+1}} \int_0^{\infty} u^{s+r-1} e^{-u} \left[u^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u)^m}{(r+m)m!} \right]^k du. \quad (12)$$

注意到 (12) 中的积分可以写成 A 型 Lauricella 函数^[10] 的形式, 即

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \frac{\lambda^{-s}}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^{k+1} r^{-k}}{k!\Gamma(r)^{k+1}} \Gamma(s + r(k+1)) \\ &\quad \times F_A^{(k)}(s + r(k+1); r, r, \dots, r; r+1, r+1, \dots, r+1; -1, -1, \dots, -1), \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} &F_A^{(n)}(a; b_1, b_2, \dots, b_n; c_1, c_2, \dots, c_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} (a)_{m_1+m_2+\cdots+m_n} \frac{(b_1)_{m_1} (b_2)_{m_2} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} (c_2)_{m_2} \cdots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}}{m_1! m_2! \cdots m_n!}, \end{aligned}$$

$(a)_i = a(a+1)\cdots(a+i-1)$. 此时 (13) 表示加权的 A 型 Lauricella 函数的无穷和. 因此, APG 分布的矩母函数为

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^s \lambda^{-s} r^{-k} (\ln \alpha)^{k+1}}{s! k! \Gamma(r)^{k+1}} \Gamma(s+r(k+1)) \\ &\quad \times F_A^{(k)}(s+r(k+1); r, r, \dots, r; r+1, r+1, \dots, r+1; -1, -1, \dots, -1). \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 Rényi 熵

熵是用来衡量随机变量方差的不确定性. 设随机变量 ξ 的 PDF 为 $f_\xi(x)$, 其 Rényi 熵 ($\text{RE}_\xi(v)$) 的定义为

$$\text{RE}_\xi(v) = \frac{1}{1-v} \ln \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi^v(x) dx \right], \quad v > 0, v \neq 1.$$

由 (8) 得到 APG 随机变量 X 的 Rényi 熵为

$$\text{RE}_X(v) = \frac{1}{1-v} \ln \left\{ \left[\frac{\lambda^r \alpha \ln \alpha}{(\alpha-1) \Gamma(r)} \right]^v \int_0^{\infty} x^{v(r-1)} e^{-v\lambda x} \alpha^{-v\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} dx \right\}. \quad (15)$$

再利用 α^{-z} 的级数表达, (15) 重写为

$$\begin{aligned} \text{RE}_X(v) &= \frac{v}{1-v} \ln \left[\frac{\lambda^r \alpha \ln \alpha}{(\alpha-1) \Gamma(r)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1-v} \ln \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^k v^k}{k! \Gamma(r)^k} \int_0^{\infty} x^{v(r-1)} e^{-v\lambda x} \gamma^k(r, \lambda x) dx \right] \\ &= \frac{v}{1-v} \ln \left(\frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha-1} \right) + \frac{vr}{1-v} \ln \lambda - \frac{v}{1-v} \ln [\Gamma(r)] \\ &\quad + \frac{1}{1-v} \ln \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^k v^k}{k! \Gamma(r)^k} \int_0^{\infty} x^{v(r-1)} e^{-v\lambda x} \gamma^k(r, \lambda x) dx \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

3.4 次序统计量

令 X_1, X_2, \dots, X_n 为 APG 分布的一个随机样本, 则第 i 个次序统计量 $X_{i:n}$ 的 PDF $f_{i:n}(x)$ 为

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F_{\text{APG}}(x)]^{i-1} [1 - F_{\text{APG}}(x)]^{n-i} f_{\text{APG}}(x). \quad (17)$$

把 (7) 和 (8) 代入 (17) 中, 有

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{n! \lambda^r \ln \alpha}{(i-1)!(n-i)! \Gamma(r) (\alpha-1)^n} x^{r-1} e^{-\lambda x} \alpha^{\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} \\ &\quad \times (\alpha^{\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} - 1)^{i-1} (\alpha - \alpha^{\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)})^{n-i}. \end{aligned}$$

利用二项式展开, 有

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{\lambda^r \ln \alpha}{B(i, n-i+1)\Gamma(r)(\alpha-1)^n} \\ &\times \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{n-i} C_{i-1}^m C_{n-i}^l \frac{(-1)^{m+l}}{\alpha^{l+i-n}} x^{r-1} e^{-\lambda x} \alpha^{(i-m+l)\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)}. \end{aligned} \quad (18)$$

因此, $X_{i:n}$ 的 s 阶矩为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{i:n}^s) &= \frac{n! \lambda^{-s}}{(\alpha-1)^n} \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+l} (i-m+l)^k \alpha^{n-i-l} (\ln \alpha)^{k+1} r^{-k}}{m! l! k! (i-1-m)! (n-i-l)! \Gamma(r)^{k+1}} \Gamma(s+r(k+1)) \\ &\times F_A^{(k)}(s+r(k+1); r, r, \dots, r; r+1, r+1, \dots, r+1; -1, -1, \dots, -1). \end{aligned} \quad (19)$$

3.5 平均剩余寿命和平均等待时间

APG 随机变量 X 的平均剩余寿命 $\mu(t)$ 为

$$\mu(t) = \frac{1}{S_{\text{APG}}(t)} \left[\mathbb{E}(X) - \int_0^t x f_{\text{APG}}(x) dx \right] - t, \quad (20)$$

其中

$$\int_0^t x f_{\text{APG}}(x) dx = \frac{\alpha \lambda^r \ln \alpha}{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^k}{k! \Gamma(r)^{k+1}} \int_0^t x^r e^{-\lambda x} \gamma^k(r, \lambda x) dx. \quad (21)$$

把 (9), (13) 和 (21) 代入 (20) 中, 得

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{\alpha - \alpha^{\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)}} \left[\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^{k+1} r^{-k}}{k! \Gamma(k+1)(r)} \Gamma(1+r(k+1)) \right. \\ &\quad \times F_A^{(k)}(1+r(k+1); r, r, \dots, r; r+1, r+1, \dots, r+1; -1, -1, \dots, -1) \\ &\quad \left. - \alpha \lambda^r \ln \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\ln \alpha)^k}{k! \Gamma(r)^{k+1}} \int_0^t x^r e^{-\lambda x} \Gamma^k(r, \lambda x) dx \right] - t. \end{aligned} \quad (22)$$

X 的平均等待时间为

$$\overline{\mu(t)} = t - \frac{1}{F(t)} \int_0^t x f_{\text{APG}}(x) dx. \quad (23)$$

把 (7) 和 (21) 代入 (23) 中, 得

$$\overline{\mu(t)} = t - \frac{\alpha \lambda^r \ln \alpha}{\alpha^{\gamma(r, \lambda x)/\Gamma(r)} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln \alpha)^k}{k! \Gamma(r)^{k+1}} \int_0^t x^r e^{-\lambda x} \gamma^k(r, \lambda x) dx. \quad (24)$$

§4. 参数估计

4.1 极大似然估计

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 APG 分布的样本, 对数似然函数 $l(\varphi)$ 为

$$l(\varphi) = n \ln \left(\frac{\ln \alpha}{\alpha-1} \right) + nr \ln \lambda - n \ln [\Gamma(r)] + (r-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\gamma(r, \lambda x_i)}{\Gamma(r)}. \quad (25)$$

为了简化表示, 引入 digamma 函数:

$$\psi(r) = \frac{d}{dr} [\ln \Gamma(r)] = \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}.$$

$l(\varphi)$ 关于 α, r, λ 分别求一阶偏导数, 得到下面似然方程:

$$\frac{\partial l(\varphi)}{\partial \alpha} = \frac{n(\alpha - 1 - \alpha \ln \alpha)}{\alpha(\alpha - 1) \ln \alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \gamma_1(r, \lambda x_i) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial l(\varphi)}{\partial r} = n \ln \lambda - n\psi(r) + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial l(\varphi)}{\partial \lambda} = \frac{nr}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda} = 0, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, z) &= \frac{\gamma(r, z)}{\Gamma(r)}, & \Gamma'(r) &= \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t} \ln(t) dt, \\ \frac{\partial \gamma(r, \lambda x_i)}{\partial r} &= \int_0^{\lambda x_i} t^{r-1} e^{-t} \ln(t) dt, & \frac{\partial \gamma(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda} &= \lambda^{r-1} x_i^r e^{-\lambda x_i}, \\ \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r} &= \left[\int_0^{\lambda x_i} t^{r-1} e^{-t} \ln(t) dt - \psi(r) \gamma(r, \lambda x_i) \right] / \Gamma(r), \\ \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda} &= \frac{\lambda^{r-1} x_i^r e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}. \end{aligned}$$

求解似然方程 (26), (27) 和 (28) 可以得到参数 φ 的 MLE, 记为 $\hat{\varphi} = (\hat{\alpha}, \hat{r}, \hat{\lambda})$. 但是, 该方程组是非线性的, 得不到其解析解, 本文借助 R 软件进行数值求解.

4.2 漐近置信区间

由于参数的 MLEs 很难得到一个显式表达, 更不能得到 MLEs 精确分布. 我们只能利用对数似然函数的观测 Fisher 信息矩阵, 获得参数的漐近置信区间. 观测 Fisher 信息矩阵为 $I(\hat{\varphi})$. 其中

$$I(\varphi) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha \partial r} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r^2} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r \partial \lambda} \\ -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda \partial r} & -\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha^2} = \frac{n[-\alpha(\alpha - 1)(\ln \alpha)^2 - (\alpha - 1 - \alpha \ln \alpha)(2\alpha \ln \alpha - \ln \alpha + \alpha - 1)]}{[\alpha(\alpha - 1) \ln \alpha]^2}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \gamma_1(r, \lambda x_i),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r^2} &= n\psi'(r) + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r^2}, \\
\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda^2} &= -\frac{nr}{\lambda^2} + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda^2}, \\
\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha \partial r} &= \frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{\lambda x_i} t^{r-1} e^{-t} \ln(t) dt - \psi(r) \gamma(r, \lambda x_i) \right] / \Gamma(r), \\
\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \alpha \partial \lambda} &= \frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^{r-1} x_i^r e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}, \\
\frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial r \partial \lambda} &= \frac{\partial^2 l(\varphi)}{\partial \lambda \partial r} = \frac{n}{\lambda} + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda \partial r}, \\
\frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r^2} &= \left[\int_0^{\lambda x_i} t^{r-1} e^{-t} \ln^2(t) dt - \psi'(r) \gamma(r, \lambda x_i) \right] / \Gamma(r) \\
&\quad + \psi(r) \left[\psi(r) \gamma(r, \lambda x_i) - 2 \int_0^{\lambda x_i} t^{r-1} e^{-t} \ln(t) dt \right] / \Gamma(r), \\
\frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda^2} &= \frac{(r-1)\lambda^{r-2} x_i^r e^{-\lambda x_i} - \lambda^{r-1} x_i^{r+1} e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(r)}, \\
\frac{\partial^2 \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda \partial r} &= \frac{e^{-\lambda x_i} x_i^r \lambda^{r-1}}{\Gamma(r)} [\ln(\lambda x_i) - \psi(r)].
\end{aligned}$$

由大样本理论可知, $(\hat{\varphi} - \varphi)$ 的渐近分布为零均值向量, 协方差矩阵为 $[EI(\varphi)]^{-1}$ 的三维正态分布. $[EI(\varphi)]^{-1}$ 由对数似然函数的观测 Fisher 信息矩阵 $I(\hat{\varphi})$ 的逆来估计. 所以, $\hat{\varphi}$ 的协方差矩阵可以用 $I^{-1}(\hat{\varphi})$ 来估计. 参数 α, r, λ 近似 $100(1-\delta)\%$ 的置信区间分别为 $(\hat{\alpha} \pm Z_{\delta/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\alpha})})$, $(\hat{r} \pm Z_{\delta/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{r})})$, $(\hat{\lambda} \pm Z_{\delta/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda})})$. 其中 $\widehat{\text{Var}}(\hat{\alpha})$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{r})$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda})$ 是协方差矩阵 $I^{-1}(\hat{\varphi})$ 对角线上的元素, $Z_{\delta/2}$ 是标准正态分布 $100(1-\delta)\%$ 的上分位数. 此外, 参数 α, r, λ 的覆盖率 (CPs) 分别利用 $CP_\alpha = P[|(\hat{\alpha} - \alpha)/\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\alpha})}| \leq Z_{\delta/2}]$, $CP_r = P[|(\hat{r} - r)/\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{r})}| \leq Z_{\delta/2}]$, $CP_\lambda = P[|(\hat{\lambda} - \lambda)/\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda})}| \leq Z_{\delta/2}]$ 获得.

4.3 实例应用

本节通过一个实际数据集验证了所提出的 APG 分布具有应用价值. 采用 Lee 和 Wang^[11] 报道的数据集, 该数据集是对 136 例膀胱癌病人的缓解时间 (以月为单位) 进行随机抽样得到的一个完全样本. 在此之前, 这个数据集被许多作者采用, 拟合他们建议的扩展寿命分布. Zea 等^[12] 与 Lemonte 和 Cordeiro^[13] 分别利用该数据集说明了 beta exponentiated 帕累托和 extended Lomax 分布的实用性; Sharma 等^[14] 把这组数据应用到了 extended Maxwell 分布中, 并研究了该分布的参数估计.

当使用 APG 分布分析寿命数据时, 我们能通过经验 TTT 方法 (the empirical total time on test procedure) 预先确定参数 α, r, λ 的范围. 经验 TTT 图可以作为一个工具来判断给出的数据集对应 APG 分布的危险率函数形状. 其定义为 $(s/n, \phi_n(s/n))$, $s =$

$1, 2, \dots, n$). 其中 $\phi_n(s/n) = [\sum_{i=1}^n X_{i:n} + (n-s)X_{s:n}] / \sum_{i=1}^n X_i$ 表示规模经验 TTT 转换 (scaled empirical TTT transform), $X_{i:n}, i = 1, 2, \dots, n$ 表示次序统计量.

Aarset^[15] 指出, 如果经验 TTT 图是凸的、凹的、先凸后凹的以及先凹后凸的, 相应危险率函数的形状是减少的、增加的、浴盆状的以及单峰的. 图 3 呈现了对于膀胱癌数据的经验 TTT 图, 可以直观的看出膀胱癌数据对应危险率函数的形状是单峰的.

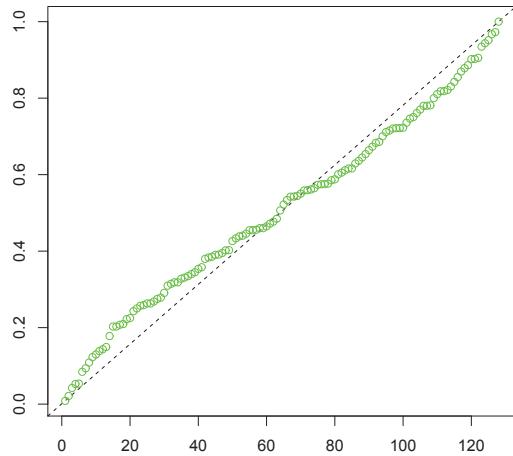


图 3 膀胱癌数据的 TTT 图

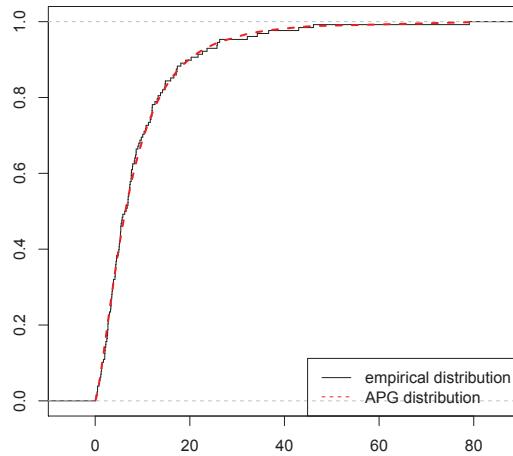


图 4 膀胱癌数据的经验分布和 APG 分布图

现在我们利用这组数据拟合 APG 分布, 并和一些经典的寿命分布进行比较. 比如伽马、威布尔、逆威布尔、指数威布尔、广义指数、alpha power 指数、alpha power 威布尔、指数威布尔和 extended Maxwell 分布. 利用这组数据得到了这些分布参数的 MLEs、参数 MLEs 的方差、负的对数似然函数 ($-\ln L$)、Akaike 信息准则 ($AIC = 2 \times k - 2 \times \ln L$)、Bayesian 信息准则 ($BIC = k \times \ln n - 2 \times \ln L$) 以及 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 统计量和它的 P 值. 其中 k 是可靠性模型中参数的个数, n 是数据集中观测到数据的数量, $\ln L$ 是被估计模型似然函数的最大值. 一般地, $-\ln L$ 、AIC、BIC、K-S 估计量的值越小, 而 P 值越大, 则表示拟合效果越好. 表 1 和表 3 分别呈现了这些分布的 PDF 以及它们的 $-\ln L$ 、AIC、BIC、K-S 估计量、 P 值; 表 2 给出了这些分布的 MLEs 以及参数的方差. 从表 3 中可以清楚地看出该分布表现出很好的拟合性. 为了更直观的看出拟合效果, 图 4 给出了膀胱癌数据的经验分布和 APG 分布图, 从图 4 中可以看出 APG 分布几乎和经验分布重合.

§5. 一般II型逐次截尾样本下 APG 分布参数的极大似然估计

5.1 一般 II 型逐次截尾试验

Balakrishnan 和 Aggarwala^[16] 提出了一般 II 型逐次截尾. 该方案描述如下:

表 1 几个分布的概率密度函数

分布	PDF
Alpha Power 指数 (APE) 分布	$\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \lambda e^{-\lambda x} \alpha^{1-e^{-\lambda x}}, x > 0, \alpha, \lambda > 0, \alpha \neq 1$
伽马分布 (GD)	$\frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta}, x > 0, k, \theta > 0$
Extended Maxwell (EMa) 分布	$\frac{k}{\sqrt{2\pi}\theta^3} x^{3k/2-1} e^{-x^k/(2\theta^2)}, x > 0, k, \theta > 0$
Alpha Power 威布尔 (APW) 分布	$\frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \lambda \beta \alpha^{1-e^{-\lambda x^\beta}} x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta}, x > 0, \alpha, \beta, \lambda > 0, \alpha \neq 1$
指数威布尔分布 (EWD)	$\alpha \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta} (1 - e^{-(\lambda x)^\beta})^{\alpha-1}, x > 0, \alpha, \beta, \lambda > 0$
广义指数分布 (GED)	$\alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}, x > 0, \alpha, \lambda > 0$
威布尔分布 (WD)	$\alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, x > 0, \alpha, \lambda > 0$
逆威布尔分布 (IWD)	$\alpha \lambda x^{-\alpha-1} e^{-\lambda x^{-\alpha}}, x > 0, \alpha, \lambda > 0$

表 2 膀胱癌数据的极大似然估计 [方差]

分布	MLEs [Var]
APG	$(\hat{\alpha}, \hat{r}, \hat{\lambda}) = (0.020629, 1.398004, 0.061280)$ $= [0.00248357, 0.02373227, 0.00140822]$
APE	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (1.173800, 0.111326)$ $= [0.71555402, 0.00051589]$
GD	$(\hat{k}, \hat{\theta}) = (1.172512, 7.987657)$ $= [0.01713424, 1.22103250]$
EMa	$(\hat{k}, \hat{\theta}) = (0.844688, 1.443141)$ $= [0.00296102, 0.01269054]$
APW	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta}) = (0.014040, 0.016288, 1.268524)$ $= [0.00102874, 0.00008901, 0.00780948]$
EWD	$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}) = (2.795887, 0.654421, 0.298865)$ $= [1.66271470, 0.01889318, 0.02973685]$
GED	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (1.217953, 0.121167)$ $= [0.02217089, 0.00018466]$
WD	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (1.047840, 0.093886)$ $= [0.00460805, 0.00036819]$
IWD	$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (0.752080, 2.431093)$ $= [0.00180000, 0.04809303]$

表3 各个模型对于膀胱癌数据拟合的统计量

模型	$-\ln L$	K-S	P 值	AIC	BIC
APG	409.7933	0.0389	0.9901	825.5865	834.1426
APE	414.3182	0.0794	0.3954	832.6364	838.3404
GD	413.3678	0.0732	0.4986	830.7356	836.4396
EMa	412.1556	0.0597	0.7513	828.3113	834.0153
APW	410.1891	0.0459	0.9499	826.3782	834.9343
EWD	410.6801	0.0450	0.9579	827.3602	835.9163
GED	413.0776	0.1489	0.0069	830.1552	835.8592
WD	414.0869	0.0700	0.5566	832.1738	837.8778
IWD	444.0008	0.1408	0.0125	892.0015	897.7056

考虑 n 个独立同分布的寿命试验单元, 从时刻 0 开始试验, 前 r 个单元的失效时间没有被观测到. 当第 $r+1$ 个试验单元的失效时间 ($\text{记为 } {}_rX_{r+1:m:n}$) 被观测到时, 则从剩余的 $n-r-1$ 个生存单元中随机抽取 R_{r+1} 个撤出试验, 其余单元继续试验; 当观测到第 $r+2$ 个试验单元的失效时间 ${}_rX_{r+2:m:n}$, 在剩余的 $n-r-R_{r+1}-2$ 个生存单元中随机抽取 R_{r+2} 个撤出试验, 其余单元继续试验; 依次类推, 当观测到第 $r+i$ 个试验单元的失效时间 ${}_rX_{r+i:m:n}$, 在剩余的 $n-r-\sum_{j=1}^{i-1} R_{r+j}-i$ 个生存单元中随机抽取 R_{r+i} 个撤出试验, 试验继续; 直到第 m 个试验单元的失效时间 ${}_rX_{m:m:n}$ 被观测到时, 剩余的 R_m 个试验单元全部撤出, 结束试验. 试验获得的样本数据 $({}_rX_{r+1:m:n}, {}_rX_{r+2:m:n}, \dots, {}_rX_{m:m:n})$ 为一般 II 型逐次截尾次序统计量, $m-r$ 表示试验观测到失效时间的单元个数. $n, m, r, R_{r+i}, i = 1, 2, \dots, m-r$ 是事先确定的, 满足 $R_m = n-m - \sum_{i=1}^{m-r-1} R_{r+i}$, 称 $(R_{r+1}, R_{r+2}, \dots, R_m)$ 为截尾方案. 当 $r=0$ 时就是通常的 II 型逐次截尾.

5.2 极大似然估计

设 ${}_rX_{r+1:m:n}, {}_rX_{r+2:m:n}, \dots, {}_rX_{m:m:n}$ 是 APG 分布的一般 II 型逐次截尾样本, 为方便起见, 记为 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$. 截尾方案为 $(R_{r+1}, R_{r+2}, \dots, R_m)$. 似然函数为

$$L(\varphi) = C^* [F(x_{r+1})]^r \prod_{i=r+1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i}, \quad (29)$$

其中

$$C^* = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} (n - R_{r+1} - r - 1) \cdots (n - R_{r+1} - \cdots - R_{m-1} - m + 1).$$

对数似然函数为

$$l(\varphi) = \ln c^* + r \ln[F(x_{r+1})] + \sum_{i=r+1}^m \ln[f(x_i)] + \sum_{i=r+1}^m R_i \ln[1 - F(x_i)]$$

$$\begin{aligned}
&= \ln c^* + r \ln(\alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} - 1) - m \ln(\alpha - 1) + (m - r) \ln(\ln \alpha) \\
&\quad + r(m - r) \ln \lambda - (m - r) \ln[\Gamma(r)] + (r - 1) \sum_{i=r+1}^m \ln x_i - \lambda \sum_{i=r+1}^m x_i \\
&\quad + \ln \alpha \sum_{i=r+1}^m \gamma_1(r, \lambda x_i) + \sum_{i=r+1}^m R_i \ln(\alpha - \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)}) - \sum_{i=r+1}^m R_i \ln(\alpha - 1). \quad (30)
\end{aligned}$$

$l(\varphi)$ 关于参数 α, r, λ 求一阶偏导数, 得到下面的似然方程, 进一步求解似然方程可以得到参数 α, r, λ 的 MLEs.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\varphi)}{\partial \alpha} &= r \gamma_1(r, \lambda x_{r+1}) (\alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} - 1)^{-1} \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})-1} - \frac{m}{\alpha - 1} + \frac{m - r}{\alpha \ln \alpha} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=r+1}^m \gamma_1(r, \lambda x_i) + \sum_{i=r+1}^m R_i (\alpha - \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)})^{-1} [1 - \gamma_1(r, \lambda x_i) \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)-1}] \\
&\quad - \sum_{i=r+1}^m \frac{R_i}{\alpha - 1}, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\varphi)}{\partial r} &= \ln(\alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} - 1) + r(\alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} - 1)^{-1} \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} \ln \alpha \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_{r+1})}{\partial r} \\
&\quad - \ln(\ln \alpha) + (m - 2r) \ln \lambda + \ln[\Gamma(r)] - (m - r) \psi(r) + \sum_{i=r+1}^m \ln x_i \\
&\quad + \ln \alpha \sum_{i=r+1}^m \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r} - \sum_{i=r+1}^m R_i (\alpha - \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)})^{-1} \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)} \ln \alpha \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial r}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\varphi)}{\partial \lambda} &= r(\alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} - 1)^{-1} \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_{r+1})} \ln \alpha \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_{r+1})}{\partial \lambda} + \frac{r(m - r)}{\lambda} - \sum_{i=r+1}^m x_i \\
&\quad + \ln \alpha \sum_{i=r+1}^m \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda} - \sum_{i=r+1}^m R_i (\alpha - \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)})^{-1} \alpha^{\gamma_1(r, \lambda x_i)} \ln \alpha \frac{\partial \gamma_1(r, \lambda x_i)}{\partial \lambda}. \quad (33)
\end{aligned}$$

显然, 上述似然方程很难得到精确解. 因此, 只能通过数值方法得到参数 α, r, λ 的 MLEs, 记为 $\hat{\alpha}, \hat{r}, \hat{\lambda}$.

5.3 实例应用

为了和完全样本的结果比较, 本子节采用前面 4.3 节中提到的膀胱癌数据获得一般 II 逐次截尾样本. 截尾方案设计如下: 在该数据中假设前 $r = 2$ 个单元没有被观测到, $R[3] = 2, R[4] = 5, R[10] = 4, R[12] = 1, R[15] = 3, R[20] = 2, R[110] = 1$, 其他 $R[i] = 0$, 此时 $n = 128, m = 110$. 通过随机模拟得到一个一般 II 型逐次截尾样本, 利用该样本拟合 APG 分布, 参数的 MLEs 及其它的方差见表 4. 通过跟完全样本数据比较, 从表 4 中可以看出, APG 分布基于一般 II 型逐次截尾样本得到参数 α, r, λ 的 MLEs 与完全样本下参数估计几乎接近, 截尾样本下参数估计的方差偏高, 很显然, 这是由截尾数据引起的. 因此, 在一般 II 型逐次截尾样本下, 讨论 APG 分布的参数估计具有潜在的应用价值.

表4 基于一般II型逐次截尾样本下参数 α, r, λ 的MLEs

参数	完全样本下参数的 MLEs	截尾样本下参数的 MLEs
α	0.020629 (0.00248357)	0.022397 (0.00590908)
r	1.398004 (0.02373227)	1.413466 (0.03463068)
λ	0.061280 (0.00140822)	0.063264 (0.00305210)

§6. 结 论

本文利用 APT 方法对伽马分布进行扩展, 提出了一种新的三参数寿命分布, 称为 APG 分布; 首先讨论了该分布危险率函数的形状; 其次讨论了该分布的概率性质, 得到了 s 阶原点矩和矩母函数、次序统计量的分布密度、次序统计量 s 阶矩的显式表达, 以及熵、平均剩余寿命、平均等待时间的积分表达; 第三, 讨论了 APG 分布在完全样本和截尾样本数据下参数的 MLEs; 最后, 分析了一个实际数据, 得到了完全样本和截尾样本下 APG 分布的参数估计, 并通过对比发现, 截尾样本下参数的 MLEs 几乎与完全样本下的一致, 只是截尾样本下估计的方差略大. 因此, 通过与文中提到分布比较得到的数值结果, 表明提出的 APG 分布在拟合一些类型的数据时, 具有优越性. 这也说明提出的新分布可以比较灵活地模拟实际数据.

参 考 文 献

- [1] ZOGRAFOS K, BALAKRISHNAN N. On families of beta- and generalized gamma-generated distributions and associated inference [J]. *Stat Methodol*, 2009, **6**(4): 344–362.
- [2] RISTIĆ M M, BALAKRISHNAN N. The gamma-exponentiated exponential distribution [J]. *J Stat Comput Simul*, 2012, **82**(8): 1191–1206.
- [3] CORDEIRO G M, ORTEGA E M M, POPOVIĆ B V. The gamma-Lomax distribution [J]. *J Stat Comput Simul*, 2015, **85**(2): 305–319.
- [4] IRIARTE Y A, ASTORGA J M, BOLFARINE H, et al. Gamma-Maxwell distribution [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, **46**(9): 4264–4274.
- [5] ALZAATREH A, LEE C, FAMOYE F. A new method for generating families of continuous distributions [J]. *Metron*, 2013, **71**(1): 63–79.
- [6] ALZAATREH A, FAMOYE F, LEE C. Gamma-Pareto distribution and its applications [J]. *JMASM*, 2012, **11**(1): 78–94.
- [7] ALZAATREH A, FAMOYE F, LEE C. Weibull-Pareto distribution and its applications [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2013, **42**(9): 1673–1691.
- [8] MAHDAVI A, KUNDU D. A new method for generating distributions with an application to exponential distribution [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, **46**(13): 6543–6557.
- [9] NASSAR M, ALZAATREH A, MEAD M, et al. Alpha power Weibull distribution: properties and applications [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, **46**(20): 10236–10252.

- [10] CORDEIRO G M, NADARAJAH S. Closed-form expressions for moments of a class of beta generalized distributions [J]. *Braz J Probab Stat*, 2011, **25**(1): 14–33.
- [11] LEE E T, WANG J W. *Statistical Methods for Survival Data Analysis* [M]. 3rd ed. New York: Wiley, 2003.
- [12] ZEA L M, SILVA R B, BOURGUIGNON M, et al. The beta exponentiated Pareto distribution with application to bladder cancer susceptibility [J]. *IJSP*, 2012, **1**(2): 8–19.
- [13] LEMONTE A J, CORDEIRO G M. An extended Lomax distribution [J]. *Statistics*, 2013, **47**(4): 800–816.
- [14] SHARMA V K, BAKOUCH H S, SUTHAR K. An extended Maxwell distribution: properties and applications [J]. *Comm Statist Simulation Comput*, 2017, **46**(9): 6982–7007.
- [15] AARSET M V. How to identify a bathtub hazard rate [J]. *IEEE Trans Reliab*, 1987, **R-36**(1): 106–108.
- [16] BALAKRISHNAN N, AGGARWALA R. *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications* [M]. Boston: Birkhäuser Basel, 2000.

Properties and Applications of Alpha Power Gamma Distribution

NIU Yulin YAN Zaizai

(College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot, 010051, China)

Abstract: In this paper, the gamma distribution has been extended by adding an extra shape parameter, we refer to the new distribution as alpha power gamma distribution. It is found that the distribution has a relatively flexible hazard rate function. The properties of the new distribution are studied, including explicit expressions for the s^{th} raw moments, moment generating function and distributions of order statistics are derived. Also, the integral expressions for the entropy, mean residual life and mean waiting time are obtained. The maximum likelihood estimators of the distribution parameters under complete sample are discussed, the Fisher information matrix is derived. Then, the estimation of the parameters under the general progressive type-II censoring is studied. Finally, the real data set is used to illustrate the practicality of the proposed distribution.

Keywords: alpha power transformation; gamma distribution; maximum likelihood estimation; Fisher information matrix; general progressive type-II censoring

2010 Mathematics Subject Classification: 62N05