应用概率统计　第 35 卷
第 4 期　2019 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Aug., 2019, Vol. 35, No. 4, pp. 425-432
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2019.04.007

ρ - 混合序列部分和的精确渐近性 *

付　锐*
(浙江经济职业技术学院物流技术学院, 杭州, 310018)

费丹丹　付宗魁　王改霞
(信阳学院数学与统计学院, 信阳, 464000)

摘　要: 设 $\{X_n;\, n \geqslant 1\}$ 是均值为零的严平稳 ρ - 混合序列, 利用 ρ - 混合序列的弱收敛定理及概率不等式, 在适当的矩条件下, 得到了 ρ - 混合序列部分和的精确渐近性的一般结果.

关键词: ρ - 混合序列; 部分和; 精确渐近

中图分类号: O211.4

英文引用格式: FU R, FEI D D, FU Z K, et al. Precise asymptotics for partial sums of ρ-mixing sequence [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(4): 425–432. (in Chinese)

§1.　引言及主要结果

ρ - 混合序列的概念首先被 Kolmogorov 与 Rozanov[1] 提出, 如下:

定义 1　设 $\{X_n;\, n \geqslant 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 的一列随机变量, 集合 $\Gamma_n^- = \sigma(X_i;\, 1 \leqslant i \leqslant n)$, $\Gamma_n^+ = \sigma(X_i;\, i \geqslant n)$. 定义

$$\rho(n) = \sup_{k \geqslant 1} \sup_{X \in L_2(\Gamma_k^-),\, Y \in L_2(\Gamma_{k+n}^+)} \frac{|\mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y|}{\sqrt{\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 (Y - \mathsf{E}Y)^2}},$$

如果 $\rho(n) \to 0$ $(n \to \infty)$, 则称序列 $\{X_n;\, n \geqslant 1\}$ 是 ρ - 混合的.

随后, ρ - 混合序列理论的研究很多. 如文献 [2–4] 得到了 ρ - 混合序列的中心极限定理; 文献 [5–7] 得到了 ρ - 混合序列的最大值不等式; 文献 [8] 得到了 ρ - 混合序列的强大数律; 文献 [9–13] 得到了 ρ - 混合序列的精确渐近性.

本文在文献 [14] 研究独立同分布序列部分和精确渐近性的基础上, 借鉴文献 [10] 对 ρ - 混合序列部分和精确渐近性的研究, 利用 ρ - 混合序列的弱收敛定理及概率不等式, 在适当的矩条件下, 得到了 ρ - 混合序列部分和的精确渐近性的一般结果.

本文约定: $\|X_1 I(|X_1| \leqslant x)\|_2^q = [\mathsf{E}X_1^2 I(|X_1| \leqslant x)]^{q/2}$, $\lfloor x \rfloor = \sup\{m : m \leqslant x,\, m \in Z\}$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^n X_i$, $\sigma^2 = \mathsf{E}X_1^2 + 2\sum\limits_{n=2}^\infty \mathsf{E}X_1X_n > 0$, N 为标准正态随机变量, $\Phi(x)$ 为标准正态分

*浙江省大学生科技创新活动计划 (新苗人才计划) 项目 (批准号: 2017R448006)、河南省高等学校重点科研项目 (批准号: 17A110030)、河南省高等学校青年骨干教师培养计划 (批准号: 2018GGJS198)、河南省教育科学 “十三五” 规划 2019 年度一般课题 (批准号: 2019-JKGHYB-0316) 和信阳学院校级一般项目 (批准号: 2018LYB10、2019-XJLYB-003) 资助.

*通讯作者, E-mail: fu2008rui@126.com.

本文 2018 年 7 月 16 日收到, 2019 年 5 月 11 日收到修改稿.

布函数, $\{W_t;\, t\geqslant 0\}$ 为标准维纳过程, C 在不同的位置表示不同的常数. 本文的主要结果如下:

定理 2 设 $\{X_n;\, n\geqslant 1\}$ 是均值为零的严平稳 ρ-混合序列, $0<\sigma^2<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n=\sigma^2$, 存在常数 $0\leqslant\delta<1/2$ 和 $\alpha>0$ 使得 $\mathsf{E}|X_1|^{2\delta+2+\alpha}<\infty$, 且存在常数 $q>2\delta+2+\alpha$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{2/q}(2^n)<\infty$. 若存在 $n_0\in Z^+$, 使得以下条件成立:

(i) $g(x)$ 为 $[n_0,\infty)$ 上的正函数, 且满足 $g(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$.

(ii) 存在 $n_1>n_0$, 使得 $g^\delta(x)g'(x)$ 在 $[n_1,\infty)$ 上单调非升.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x-1)/g(x)=1$.

(iv) $xg'(x)\geqslant 0$ 在 $[n_1,\infty)$ 单调非升.

则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0}g^\delta(n)g'(n)\mathsf{P}[|S_n|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{ng(n)}]=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.$$

定理 3 在定理 2 的条件下, 则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0}g^\delta(n)g'(n)\mathsf{P}\Big[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{ng(n)}\Big]=\frac{2}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\delta+2}}.$$

注记 4 满足定理中的函数 $g(x)$ 有很多, 比如 $g(x)=(\ln x)^\beta$, $(\ln\ln x)^\gamma$. 其中 $\beta>0$, $\gamma>0$ 为某些适当的参数.

注记 5 在定理中取 $g(x)=\ln x$, 可以得到文献 [10] 的结论.

推论 6 设 $\{X_n;\, n\geqslant 1\}$ 是均值为零的严平稳 ρ-混合序列, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n=\sigma^2>0$, 若存在常数 $0<\nu\leqslant 1$ 使得 $\mathsf{E}X_1^2(\ln|X_1|)^\nu<\infty$, 且存在常数 $\kappa>2\nu+2$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{2/\kappa}(2^n)<\infty$, 则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\nu+2}\sum_{n\geqslant n_0}\frac{(\ln n)^\nu}{n}\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n\ln n})=\frac{1}{\nu+1}\mathsf{E}|N|^{2\nu+2},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\nu+2}\sum_{n\geqslant n_0}\frac{(\ln n)^\nu}{n}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n\ln n}\Big)=\frac{2}{\nu+1}\mathsf{E}|N|^{2\nu+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\nu+2}}.$$

注记 7 定理中的结论对独立同分布序列仍然成立, 见文献 [14].

§2. 引 理

引理 8 [4,5] 设 $\{X_n;\, n\geqslant 1\}$ 为严平稳 ρ-混合序列, $\mathsf{E}X_1=0$, $\mathsf{E}X_1^2<\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho(2^n)<\infty$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}S_n^2/n=\sigma^2$, 则有 $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ 依分布收敛于 $\mathrm{N}(0,1)$. 设 $\{W_t;\, t\geqslant 0\}$ 为标准维纳过程, 如果 $\sigma>0$, 则有 $W_n\Rightarrow W$, 特别的, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|/(\sigma\sqrt{n})$ 依分布收敛于 $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|$, $n\to\infty$. 其中, $W_n(t)=S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n})$, $0\leqslant t\leqslant 1$, "$\Rightarrow$" 表示在 $D[0,1]$ 中的弱收敛.

引理 9 [6]　设 $\{X_n;\, n\geqslant 1\}$ 为 ρ- 混合序列, $\mathsf{E}X_n=0$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 则对任意的 $q\geqslant 2$, 存在常数 $K=K(q,\rho(\cdot))$, 使得对任意的 $x>0$ 和 $y>0$ 满足 $2n\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathsf{E}|X_i|I(|X_i|\geqslant y)\leqslant x$, 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\max|S_n|\geqslant x)\leqslant{}&\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(|X_i|\geqslant y)\\&+Kx^{-q}n^{q/2}\exp\Big[K\sum_{i=1}^{[\ln n]}\rho(2^i)\Big]\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_iI(|X_i|\leqslant y)\|_2^q\\&+Kx^{-q}n\exp\Big[K\sum_{i=1}^{[\ln n]}\rho^{2/q}(2^i)\Big]\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mathsf{E}|X_i|^qI(|X_i|\leqslant y).\end{aligned}$$

引理 10 [15]　设 $\{W_t;\, t\geqslant 0\}$ 为标准维纳过程, N 为标准正态随机变量, 对任意的 $x>0$, 则

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant x\Big]&=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\mathsf{P}[(2k-1)x\leqslant N\leqslant(2k+1)x]\\&=4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathsf{P}[N\geqslant(2k+1)x]\\&=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathsf{P}[|N|\geqslant(2k+1)x].\end{aligned}$$

特别的,

$$\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant x\Big]\sim 2\mathsf{P}(|N|\geqslant x)\sim\frac{4}{\sqrt{2\pi}x}\mathrm{e}^{-x^2/2},\qquad x\to\infty.$$

§3.　定理 2 的证明

不失一般性, 不妨假设 $\sigma^2=1$, 记 $\Psi(x)=1-\Phi(x)+\Phi(-x)$, $x\geqslant 0$. $d(\varepsilon)=g^{-1}(M/\varepsilon^2)$, $M>2$.

命题 11　在定理 2 的条件下, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0}g^{\delta}(n)g'(n)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0}g^{\delta}(n)g'(n)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})&=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\int_{n_0}^{\infty}g^{\delta}(x)g'(x)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(x)})\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\int_{g(n_0)}^{\infty}y^{\delta}\Psi(\varepsilon\sqrt{y})\mathrm{d}y\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}2\int_{\varepsilon\sqrt{g(n_0)}}^{\infty}t^{2\delta+1}\Psi(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.\qquad\square\end{aligned}$$

命题 12 在定理 2 的条件下, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)|\mathsf{P}[|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}]-\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})|=0.$$

证明: 记 $\Delta_n=\sup\limits_{x}|\mathsf{P}(|S_n|\geqslant\sqrt{n}x)-\Psi(x)|$. 由引理 8 知 $\Delta_n\to 0$, $n\to\infty$, 即

$$\frac{1}{g^{\delta+1}(m)}\sum_{n=1}^{m}g^{\delta}(n)g'(n)\Delta_n\to 0,\qquad m\to\infty. \tag{1}$$

由 (1), 则有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)|P[|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}]-\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})|\\
&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Delta_n\\
&=\varepsilon^{2\delta+2}g^{\delta+1}(d(\varepsilon))\frac{1}{g^{\delta+1}(d(\varepsilon))}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Delta_n\\
&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}\Big(\frac{M}{\varepsilon^2}\Big)^{\delta+1}\frac{1}{g^{\delta+1}(d(\varepsilon))}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Delta_n\\
&=M^{\delta+1}\frac{1}{g^{\delta+1}(d(\varepsilon))}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Delta_n\to 0,\qquad\varepsilon\to 0.\qquad\square
\end{aligned}$$

命题 13 在定理 2 的条件下, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 则

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})=0.$$

证明: 因 $g(d(\varepsilon)-1)\leqslant g(d(\varepsilon))=M/\varepsilon^2$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x-1)/g(x)=1$, 则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2g(d(\varepsilon))=M$. 即对充分小的 $\varepsilon>0$, 有

$$\varepsilon^2g(d(\varepsilon))\geqslant\frac{M}{2}. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(n)})&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}\int_{d(\varepsilon)}^{\infty}g^{\delta}(x)g'(x)\Psi(\varepsilon\sqrt{g(x)})\mathrm{d}x\\
&=2\int_{\sqrt{\varepsilon^2g(d(\varepsilon))}}^{\infty}y^{2\delta+1}\Psi(y)\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2\int_{\sqrt{M/2}}^{\infty}y^{2\delta+1}\Psi(y)\mathrm{d}y\to 0,\qquad M\to\infty.\qquad\square
\end{aligned}$$

命题 14 在定理 2 的条件下, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 则

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}[|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}]=0.$$

证明: 在引理 9 中取 $x=\varepsilon\sqrt{ng(n)}$, $y=\varepsilon\sqrt{ng(n)}/3$, 由 $n>d(\varepsilon)$ 知 $\varepsilon^2 g(n)>M$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{2n\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathsf{E}|X_i|I[|X_i|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}/3]}{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}&\leqslant\frac{C\mathsf{E}|X_1|^2I[|X_1|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}/3]}{\varepsilon^2g(n)}\\&\leqslant\frac{C}{M}\to 0,\qquad M\to\infty.\end{aligned}$$

由引理 9, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}[|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}]\\&\leqslant\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)n\mathsf{P}\Big[|X_1|\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big]\\&\quad+C\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)n^{q/2}[\varepsilon\sqrt{ng(n)}]^{-q}\Big\{\mathsf{E}X_1^2I\Big[|X_1|\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big]\Big\}^{q/2}\\&\quad+C\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)n[\varepsilon\sqrt{ng(n)}]^{-q}\mathsf{E}|X_1|^qI\Big[|X_1|\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big]\\&=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3.\end{aligned}$$

首先, 估计 $\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_1$. 由 $xg'(x)\geqslant 0$ 在 $[n_1,\infty)$ 单调非升, 则对于充分大的 $x>0$, 存在正数 l 使得 $xg'(x)\leqslant l$. 对充分小的 $\varepsilon>0$, 则有

$$\begin{aligned}\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_1&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)\mathsf{P}\Big[|X_1|\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big]\\&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)\sum_{k\geqslant n}\mathsf{P}\Big[\frac{\varepsilon\sqrt{kg(k)}}{3}\leqslant|X_1|<\frac{\varepsilon\sqrt{(k+1)g(k+1)}}{3}\Big]\\&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\sum_{k>d(\varepsilon)}\mathsf{P}[kg(k)\leqslant 9\varepsilon^{-2}|X_1|^2<(k+1)g(k+1)]\sum_{d(\varepsilon)<n\leqslant k}g^{\delta}(n)\\&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\sum_{k>d(\varepsilon)}kg^{\delta}(k)\mathsf{P}[kg(k)\leqslant 9\varepsilon^{-2}|X_1|^2<(k+1)g(k+1)].\end{aligned}$$

因 $k>d(\varepsilon)=g^{-1}(M/\varepsilon^2)$, 则有 $g(k)>M/\varepsilon^2$, 即 $[g(k)]^{\delta-1}>(M/\varepsilon^2)^{\delta-1}$. 对 $0\leqslant\delta<1$, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_1&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\Big(\frac{M}{\varepsilon^2}\Big)^{\delta-1}\sum_{k>d(\varepsilon)}kg(k)\mathsf{P}[kg(k)\leqslant 9\varepsilon^{-2}|X_1|^2<(k+1)g(k+1)]\\&\leqslant\varepsilon^{2\delta+2}l\Big(\frac{M}{\varepsilon^2}\Big)^{\delta-1}9\varepsilon^{-2}\mathsf{E}|X_1|^2\\&\leqslant 9l\varepsilon^2M^{\delta-1}\mathsf{E}|X_1|^2\to 0,\qquad M\to\infty.\end{aligned}\tag{3}$$

其次, 估计 $\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_2$. 由 (2), $q>2\delta+2+\alpha$, $\alpha>0$, 则有

$$\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_2\leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\sum_{n>d(\varepsilon)}g^{\delta-q/2}(n)g'(n)\leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\int_{d(\varepsilon)}^{\infty}g^{\delta-q/2}(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\int_{g(d(\varepsilon))}^{\infty} y^{\delta-q/2}\mathrm{d}y \leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\Big(\varepsilon^{-2}\frac{M}{2}\Big)^{\delta-q/2+1} \\
&\leqslant CM^{\delta-q/2+1}\to 0, \qquad M\to\infty. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

最后, 估计 $\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_3$. 由 (2), $\mathsf{E}X_1^{2\delta+2+\alpha}<\infty$, $0\leqslant\delta<1/2$, $\alpha>0$, $q>2\delta+2+\alpha$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{2\delta+2}\mathrm{I}_3 \\
&\leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\sum_{n>d(\varepsilon)} g^{\delta-q/2}(n)g'(n)n^{1-q/2}\mathsf{E}|X_1|^{q-(2\delta+2+\alpha)}|X_1|^{2\delta+2+\alpha}I\Big[|X_1|\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big] \\
&\leqslant C\varepsilon^{2\delta+2-q}\sum_{n>d(\varepsilon)} g^{\delta-q/2}(n)g'(n)n^{1-q/2}\Big[\frac{\varepsilon\sqrt{ng(n)}}{3}\Big]^{q-(2\delta+2+\alpha)} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-\alpha}\sum_{n>d(\varepsilon)} g^{-1-\alpha/2}(n)g'(n)n^{-\delta-\alpha/2} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-\alpha}\int_{d(\varepsilon)}^{\infty} g^{-1-\alpha/2}(x)g'(x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant CM^{-\alpha/2}\to 0, \qquad M\to\infty. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

由 (3) – (5) 知命题 14 成立. □

因此, 由命题 11 – 14 知定理 2 成立.

§4. 定理 3 的证明

不失一般性, 不妨假设 $\sigma^2=1$, 记 $d(\varepsilon)=g^{-1}(M/\varepsilon^2)$, $M>2$.

命题 15 在定理 3 的条件下, 则

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0} g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant\varepsilon\sqrt{g(n)}\Big]=\frac{2}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2\delta+2}}.
$$

证明: 由引理 10, 对任意的 $m\geqslant 1$, $x>0$, 则有

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{2m+1}(-1)^k\mathsf{P}[|N|\geqslant(2k+1)x] &\leqslant \mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant x\Big] \\
&\leqslant 2\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\mathsf{P}[|N|\geqslant(2k+1)x].
\end{aligned}
$$

类似命题 11 的证明, 对任意的 $q>0$, 则

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant n_0} g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}[|N|\geqslant q\varepsilon\sqrt{g(n)}]=\frac{q^{-(2\delta+2)}}{\delta+1}\mathsf{E}|N|^{2\delta+2}.
$$

于是, 命题 15 成立. □

命题 16 在定理 3 的条件下, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\leqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\Big|\mathsf{P}\Big[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}\Big]-\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant\varepsilon\sqrt{g(n)}\Big]\Big|=0.$$

证明: 记 $\Delta_n'=\sup\limits_x\big|\mathsf{P}\big(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\sqrt{n}x\big)-\mathsf{P}\big[\max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant x\big]\big|$. 由引理 8 知 $\Delta_n'\to 0$, $n\to\infty$. 证明类似命题 12, 此处略. □

命题 17 在定理 3 的条件下, 则

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant\varepsilon\sqrt{g(n)}\Big]=0.$$

证明: 由引理 10, 对充分大的 $x>0$, 则 $\mathsf{P}\big[\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant x\big]\leqslant C\mathsf{P}(|N|\geqslant x)$. 对充分小的 $\varepsilon>0$, 则有

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|W(s)|\geqslant\varepsilon\sqrt{g(n)}\Big]\\ \leqslant\ & C\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}[|N|\geqslant\varepsilon\sqrt{g(n)}].\end{aligned}$$

剩下的证明类似命题 13, 此处略. □

命题 18 在定理 3 的条件下, 则

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant d(\varepsilon)}g^{\delta}(n)g'(n)\mathsf{P}\Big[\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon\sqrt{ng(n)}\Big]=0.$$

证明: 与命题 14 的证明一样, 此处略. □

因此, 由命题 15−18 知定理 3 成立.

参 考 文 献

[1] KOLMOGOROV A N, ROZANOV Y A. On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes [J]. *Theory Probab Appl*, 1960, **5(2)**: 204–208.

[2] BRADLEY R C. A central limit theorem for stationary ρ-mixing sequences with infinite variance [J]. *Ann Probab*, 1988, **16(1)**: 313–332.

[3] DEHLING H, DENKER M, PHILIPP W. Central limit theorems for mixing sequences of random variables under minimal conditions [J]. *Ann Probab*, 1986, **14(4)**: 1359–1370.

[4] IBRAGIMOV I A. A note on the central limit theorems for dependent random variables [J]. *Theory Probab Appl*, 1975, **20(1)**: 135–141.

[5] 邵启满. 关于 ρ-混合随机变量序列的不变原理的注记 [J]. 数学年刊 A 辑 (中文版), 1988, **9(4)**: 409–412.

[6] SHAO Q M. Maximal inequalities for partial sums of ρ-mixing sequences [J]. *Ann Probab*, 1995, **23(2)**: 948–965.

[7] UTEV S, PELIGRAD M. Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables [J]. *J Theoret Probab*, 2003, **16(1)**: 101–115.

[8] PELIGRAD M. Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences [J]. *Z Wahrsch Verw Gebiete*, 1985, **70(2)**: 307–314.

[9] HUANG W, JIANG Y, ZHANG L X. Precise asymptotics in the Baum-Katz and Davis laws of large numbers of ρ-mixing sequences [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2005, **21(5)**: 1057–1070.

[10] ZHAO Y X. Precise rates in complete moment convergence for ρ-mixing sequences [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **339(1)**: 553–565.

[11] 付宗魁, 吴群英. ρ-混合序列矩收敛的渐近性质 [J]. 应用数学学报, 2016, **39(3)**: 452–462.

[12] 付宗魁, 吴群英. ρ-混合序列完全矩收敛精确渐近性的一般结果 [J]. 数学物理学报, 2017, **37(3)**: 544–552.

[13] 张亚运, 吴群英. ρ-混合序列的重对数律矩收敛的精确渐近性 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2017, **52(4)**: 13–20.

[14] MENG Y J. General laws of precise asymptotics for sums of random variables [J]. *J Korean Math Soc*, 2012, **49(4)**: 795–804.

[15] BILLINGSLEY P. *Convergence of Probability Measures* [M]. New York: Wiley, 1968.

Precise Asymptotics for Partial Sums of ρ-Mixing Sequence

FU Rui

(*Institute of Logistics Technology, Zhejiang Technical Institute of Economics, Hangzhou, 310018, China*)

FEI Dandan FU Zongkui WANG Gaixia

(*School of Mathematics and Statistics, Xinyang University, Xinyang, 464000, China*)

Abstract: Let $\{X_n;\, n \geqslant 1\}$ be a sequence of strictly stationary ρ-mixing random variables with zero mean and finite variance. Using the weak convergence theorem and probability inequalities of ρ-mixing sequence, under some proper conditions, we obtained general laws of precise asymptotics for partial sums of ρ-mixing sequence.

Keywords: ρ-mixing sequence; partial sums; precise asymptotic

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15