应用概率统计　第 35 卷
第 5 期　2019 年 10 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Oct., 2019, Vol. 35, No. 5, pp. 508-524
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2019.05.006

汇率风险和方差保费准则下最优投资和再保险策略 *

黄　婵　　王　伟*
(宁波大学数学与统计学院, 宁波, 315211)

温利民
(江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌, 330022)

摘　要: 假定保险公司和再保险公司都采取方差保费准则收取保费, 保险公司不但可以投资本国无风险资产和风险资产, 还可以投资国外的风险资产. 首先我们用一几何布朗运动来刻画汇率风险, 同时为了控制保险风险, 假定保险公司将承担的保险业务分保给再保险公司. 接着利用随机动态规划原理研究了两种情形下的最优投资和再保险问题, 一种是索赔服从扩散近似模型; 另一种是经典风险模型, 分别得到了这两种情形下的最优投资和再保险策略, 并发现汇率风险对保险公司的投资策略有很大的影响, 但对再保险策略没有影响. 最后对相关参数进行了敏感性分析.

关键词: 方差保费准则; 汇率风险; 最优投资; 再保险

中图分类号: O211.9

英文引用格式: HUANG C, WANG W, WEN L M. Optimal investment-reinsurance strategy with exchange rate risk under variance premium principle [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(5): 508–524. (in Chinese)

§1. 引　言

保险业的迅猛发展, 给保险公司带来巨额收入, 大大增强了保险业的资金实力, 使它们成为资本市场上非常重要的投资者. 另外, 保险公司通过承担保险风险为投保人提供保护, 但很多时候从资金和风险的角度出发, 保险公司不得不把承担的保险业务的一部分转让给再保险公司, 让再保险公司承担一部分的保险风险. 然而, 再保险公司一般情况下收取的保费会比保险公司的保费要更高, 也就是说再保费是不便宜的, 因此对保险公司来说需要对风险和回报做出一定的权衡, 如何合理的投资以便能够更好的控制保险风险和获得更高的收益是保险公司面临的一个非常重要的问题.

近些年来, 保险公司的最优投资和再保险问题受到越来越多研究学者的关注. Browne [1] 假定风险资产价格满足几何布朗运动并用带漂移的布朗运动近似保险公司的盈余过程, 研究了最终财富的期望指数效用最大化和破产概率最小化问题. Yang 和 Zhang [2] 假定保险公司的盈余过程是一个跳扩散过程, 在效用函数是指数效用函数的情况下研究了保险

*浙江省自然科学基金项目 (批准号: LY17G010003)、国家自然科学基金项目 (批准号: 71761019)、教育部人文社科基金项目 (批准号: 18YJC910012) 和江西省自然科学基金项目 (批准号: 20171ACB21022) 资助.

*通讯作者, E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn.

本文 2018 年 7 月 7 日收到, 2018 年 8 月 15 日收到修改稿.

公司的最优投资策略问题. Wang[3] 假定保险公司的索赔过程是一个纯跳过程, 和 Yang 和 Zhang[2] 不同的是, 他假定市场中有多种风险资产可以投资, 研究了在指数效用下保险公司的最优投资问题. 然而, 保险公司不仅面临市场风险, 还面临着保险风险, 尤其一些巨灾保险, 索赔额很大, 保险公司从自身安全的角度来说, 不得不找一些再保险公司共同承担这类保险业务. 因此, Bai 和 Guo[4] 在 Wang[3] 的基础上, 进一步假定保险公司还可以购买比例再保险来转移保险风险, 在文章中他们利用一带漂移的布朗运动描述保险公司的盈余过程, 分别在最终财富的期望指数效用最大化和破产概率最小化这两个目标下得到了卖空限制时的最优投资和再保险问题. Bai 和 Guo[5] 与 Bai 和 Guo[4] 不同的是, 他们在这篇文章中考虑了超额损失再保险而不是购买比例再保险, 他们的结论是在最终财富的期望指数效用最大化和破产概率最小化这两个目标下, 购买超额损失再保险要比购买比例再保险要好. 上面这些文献都是假定风险资产价格满足几何布朗运动模型. 众所周知, 用几何布朗运动描述风险资产价格动态不能很好的解释波动率微笑现象. 因此, 文献 [6–8] 又研究了随机波动率模型下保险公司的最优投资和再保险问题. 前面提到的文章都是采用期望值保费准则, 然而保险公司采取的保费原理还有其他一些形式, 例如方差保费准则. Yuen 等[9] 假定保险公司的一些保险业务之间有相依关系, 且保费计算采用方差保费准则, 研究了保险公司以期望指数效用最大化为目标时的最优再保险问题. Zhang 等[10] 在广义的均值 – 方差保费准则和限制卖空情况下, 研究了保险公司的最优投资和再保险问题. 大量的实证表明股票的价格动态会受到经济周期的影响, 因此 Hamilton[11] 首次用状态转换模型来刻画风险资产的价格动态, 在该金融模型中利用一连续时间马尔科夫链来描述经济的状态. Chen 等[12] 假定再保险公司的保费采用方差保费准则, 不但用状态转换模型来描述市场中的风险资产价格动态, 还假定保险公司的索赔过程都依赖于经济状态, 利用随机动态规划原理得到了保险公司索赔过程满足扩散近似过程和经典风险过程这两种情况下保险公司的最优投资和再保险策略. 有关保险公司最优投资和再保险方面的研究还可以参考文献 [13, 14].

然而, 到目前为止, 在研究保险公司的最优投资和再保险问题方面, 将汇率风险因素考虑进去的很少. Guo 等[15] 假定保险公司不仅可以投资本国的风险资产, 也可以投资国外的风险资产, 首次考虑了汇率风险对保险公司最优投资和再保险策略的影响. 然而, 我们的文章和他们的文章还是有很大的不同. 首先, 他们的文章仅仅考虑了保险公司索赔由扩散过程来近似, 而我们不仅考虑了扩散近似过程的情况, 还考虑了经典风险模型; 第二个不同的是, 我们考虑的效用函数与他们的不一样, 他们考虑的是幂效用, 我们考虑的是指数效用; 第三个不同的是我们假定保险公司和再保险公司的保费都采用的是方差保费准则, 而他们采用的是均值保费准则; 最后由于再保险费用比保险公司收取的保费要高, 我们还考虑了保险公司购买再保险比例的一个限制情况. 本文结构如下: 第二节给出了金融和保险市场模型及相关的一些假设. 在第三节中给出了索赔满足扩散近似模型时最优投资和再保险策略. 第四节考虑了索赔满足经典风险模型下最优投资和再保险策略. 第五节通过数值结果讨论了市场中的参数对最优投资和再保险策略的影响. 第六节对整篇文章作了总结.

§2. 模　型

我们考虑一个完备的带滤流的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$, 其中 P 是原始测度, $T > 0$. 在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ 上, 我们定义如下随机过程和随机变量, 其中 $W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t), W_4(t))^{\intercal}$ 是四维标准布朗运动, $N(t)$ 是一个泊松过程, $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots}$ 是一列独立同分布的随机变量. 此外, $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$, $W_4(t)$, $N(t)$ 和 $\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots}$ 被假定是随机独立的. 我们假定本文所考虑的金融市场无摩擦且无套利, 市场中的投资者在 $[0,T]$ 时间段内可连续交易, 且金融市场包含有三种资产, 一种是无风险债券 B, 另外两种是股票 S^d 和 S^f, S^d 表示本国的股票, S^f 表示外国的股票. 假定无风险债券的价格过程 $B := \{B(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足如下微分方程:

$$\mathrm{d}B(t) = r_d B(t)\mathrm{d}t, \qquad B(0) = 1, \tag{1}$$

其中 $r_d > 0$ 表示国内的无风险利率, 且是一个常值. 股票 S^d 和 S^f 的价格过程分别满足如下随机微分方程

$$\mathrm{d}S^d(t) = S^d(t)[\mu_d\mathrm{d}t + \sigma_d\mathrm{d}W_1(t)], \qquad S^d(0) = s^d, \tag{2}$$

$$\mathrm{d}S^f(t) = S^f(t)[\mu_f\mathrm{d}t + \sigma_f\mathrm{d}W_2(t)], \qquad S^f(0) = s^f, \tag{3}$$

其中 μ_d 和 μ_f 分别是股票 S^d 和 S^f 的预期回报率, σ_d 和 σ_f 分别是股票 S^d 和 S^f 的波动率, $s^d > 0$, $s^f > 0$ 且为常值. 我们采用文献 [15] 中的汇率风险模型, 令 $Q := \{Q(t)\}_{t\in[0,T]}$ 表示汇率风险过程, 满足如下

$$\mathrm{d}Q(t) = Q(t)\big[(r_d - r_f)\mathrm{d}t + \rho_1\delta\mathrm{d}W_1(t) + \rho_2\delta\mathrm{d}W_2(t) + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\,\delta\mathrm{d}W_3(t)\big], \tag{4}$$

其中 r_f 表示国外无风险利率, $\delta > 0$ 是汇率 $Q(t)$ 的波动率, ρ_1 和 ρ_2 是相关系数, $\rho_1 \in (-1,1)$, $\rho_2 \in (-1,1)$.

令 $S(t) = S^f(t)Q(t)$, 它表示国外股票 S^f 用本币计算在 t 时刻的价值. 利用 Itô 公式可得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S(t) &= S^f(t)\mathrm{d}Q(t) + Q(t)\mathrm{d}S^f(t) + \mathrm{d}\langle S^f, Q\rangle_t \\ &= S(t)\big[\mu\mathrm{d}t + \rho_1\delta\mathrm{d}W_1(t) + (\sigma_f + \rho_2\delta)\mathrm{d}W_2(t) + \sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\,\delta\mathrm{d}W_3(t)\big],\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\langle S^f, Q\rangle$ 表示 S^f 和 Q 的可料二次斜变差过程, $\mu = r_d - r_f + \mu_f + \rho_2\delta\sigma_f$.

在经典的保险风险理论中, 保险公司的索赔过程 $C := \{C(t)\}_{t\in[0,T]}$ 由一复合泊松过程来刻画

$$C(t) := \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j, \tag{6}$$

其中 $N(t)$ 是参数为 $\lambda>0$ 的泊松过程, $Y_j>0$ 表示第 j 次索赔的额度, 其分布函数为 $F(y)$. 为了符号表述方便, 我们令 $\alpha=\lambda\mathsf{E}[Y_j]$, $\beta=\sqrt{\lambda\mathsf{E}[Y_j^2]}$, 这里 $\mathsf{E}[\cdot]$ 表示在概率测度 P 下的期望. 我们采用文献 [1] 中提到的方法, 利用扩散过程来近似索赔过程, 即

$$\mathrm{d}C(t)=\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j\approx\alpha\mathrm{d}t-\beta\mathrm{d}W_4(t). \tag{7}$$

假定保险公司能够通过购买再保险来控制风险, 在这篇文章中我们考虑比例再保险. 令 $q(t)$ 表示 t 时刻保险公司自留的比例, 也就是说再保险公司承担索赔中的比例为 $(1-q(t))$. 此外, 我们假定保险公司和再保险公司采用的都是方差保费准则收取保费, 则保险公司在 t 时刻的保费费率为 $\alpha+\eta\beta^2$, 保险公司付给再保险公司的保费在 t 时刻为 $[1-q(t)]\alpha+[1-q(t)]^2\theta\beta^2$, 其中 η 和 θ 分别为保险公司和再保险公司的相对安全负荷. 另外, 由于再保险公司收取的保费要高于保险公司, 我们假定 $\theta>\eta>0$. 因此, 当采用扩散过程来近似索赔过程时, 保险公司的盈余过程 $R(t)$ 满足如下微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R(t)&=(\alpha+\eta\beta^2)\mathrm{d}t-\{[1-q(t)]\alpha+[1-q(t)]^2\theta\beta^2\}\mathrm{d}t-q(t)[\alpha\mathrm{d}t-\beta\mathrm{d}W_4(t)]\\&=[\eta-\theta+2q(t)\theta-q(t)^2\theta]\beta^2\mathrm{d}t+q(t)\beta\mathrm{d}W_4(t).\end{aligned} \tag{8}$$

当索赔过程满足经典的复合泊松过程时, 保险公司的盈余过程 $\overline{R}(t)$ 满足如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overline{R}(t)&=(\alpha+\eta\beta^2)\mathrm{d}t-\{[1-q(t)]\alpha+[1-q(t)]^2\theta\beta^2\}\mathrm{d}t-q(t)\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j\\&=\{[\eta-\theta+2q(t)\theta-q(t)^2\theta]\beta^2+q(t)\alpha\}\mathrm{d}t-q(t)\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)}Y_j.\end{aligned} \tag{9}$$

对保险公司来说, 至少收取的保费要超过付给再保险公司的保费才是合理的, 因此

$$(\alpha+\eta\beta^2)-\{[1-q(t)]\alpha+[1-q(t)]^2\theta\beta^2\}\geqslant 0. \tag{10}$$

解上述不等式有 $q_0\leqslant q(t)\leqslant q_1$, 其中

$$q_0=\frac{2\theta\beta^2+\alpha-\sqrt{4\theta\eta\beta^4+4\alpha\theta\beta^2+\alpha^2}}{2\theta\beta^2}, \tag{11}$$

$$q_1=\frac{2\theta\beta^2+\alpha+\sqrt{4\theta\eta\beta^4+4\alpha\theta\beta^2+\alpha^2}}{2\theta\beta^2}. \tag{12}$$

很容易发现 $q_1>1$, 注意 $\theta>\eta$, 则 $0<q_0<1$, 故 $q_0\leqslant q(t)\leqslant 1$.

§3.　扩散近似模型

令 $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$ 分别表示投资到本国股票 S^d 和外国股票 S^f 占保险公司财富的比例, 则 $1-\pi_1(t)-\pi_2(t)$ 表示投资到无风险债券 B 上的比例. 令 $u:=\{u(t)=(\pi_1(t),\pi_2(t),$

$q(t))\}_{t\in[0,T]}$ 表示保险公司的最优投资和再保险策略. 因此, 通过式 (5) 和 (8), 财富过程 $X^u(t)$ 满足如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X^u(t) &= \frac{\pi_1(t)X^u(t)}{S^d(t)}\mathrm{d}S^d(t) + \frac{\pi_2(t)X^u(t)}{Q(t)S^f(t)}\mathrm{d}[Q(t)S^f(t)] \\
&\quad + \frac{[1-\pi_1(t)-\pi_2(t)]X^u(t)}{B(t)}\mathrm{d}B(t) + \mathrm{d}R(t) \\
&= X^u(t)[r_d + \pi_1(t)(\mu_d - r_d) + \pi_2(t)(\mu - r_d)]\mathrm{d}t \\
&\quad + X^u(t)[\pi_1(t)\sigma_d + \pi_2(t)\rho_1\delta]\mathrm{d}W_1(t) \\
&\quad + X^u(t)\big[\pi_2(t)(\sigma_f + \rho_2\delta)\mathrm{d}W_2(t) + \pi_2(t)\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\,\delta\mathrm{d}W_3(t)\big] \\
&\quad + [\eta - \theta + 2q(t)\theta - q(t)^2\theta]\beta^2\mathrm{d}t + q(t)\beta\mathrm{d}W_4(t).
\end{aligned} \tag{13}$$

定义 1 投资策略 $u=(\pi_1,\pi_2,q)^\intercal$ 称为可行的或可允许策略, 如果 $u(t)$ 是 $\mathscr{F}_t$ 循序可测的, $q_0 \leqslant q(t) \leqslant 1$, 且财富方程 (13) 有唯一强解.

令 Λ 表示所有可允许策略的集合. 本文考虑汇率风险影响下保险公司的最优投资和再保险问题, 寻找最优的可允许策略, 使得最终财富的期望效用达到最大, 即求解下面的最优化问题

$$\sup_{u\in\Lambda} \mathsf{E}[U(X^u(T))], \tag{14}$$

其中效用函数 $U(x)$ 是一连续可微且严格递增的凹函数.

定义问题 (14) 的最优值函数如下

$$V(t,x) = \sup_{u\in\Lambda} \mathsf{E}[U(X^u(T)) \,|\, X^u(t) = x], \tag{15}$$

其边界条件为 $V(T,x) = U(x)$.

由动态规划原理可得 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程如下

$$\sup_{u\in\Lambda}\{\mathscr{A}^u V(t,x)\} = 0, \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^u V(t,x) &= V_t + xV_x[r_d + \pi_1(t)(\mu_d - r_d) + \pi_2(t)(\mu - r_d)] \\
&\quad + V_x[\eta - \theta + 2q(t)\theta - q(t)^2\theta]\beta^2 + \frac{1}{2}V_{xx}x^2[\pi_1^2(t)\sigma_d^2 + 2\pi_1(t)\pi_2(t)\rho_1\sigma_d\delta] \\
&\quad + \frac{1}{2}V_{xx}x^2\pi_2^2(t)(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) + \frac{1}{2}V_{xx}q^2(t)\beta^2,
\end{aligned} \tag{17}$$

这里 V_t, V_x 是关于时间 t 和财富 x 的一阶导数, V_{xx} 是关于财富 x 的二阶导数.

利用文献 [2] 及 [16] 中的方法, 很容易得到下面的验证定理, 在这里我们就不再证明了.

定理 2 若函数 $G(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times R)$ 满足 HJB 方程 (16) 及边界条件 $V(T,x)=U(x)$, 则 $G(t,x)\geqslant V(t,x)$. 此外, 如果存在可允许策略 $u^*=(\pi_1^*,\pi_2^*,q^*)$, 使得

$$u^*\in\arg\sup_{u\in\Lambda}\mathscr{A}^{u^*}G(t,x),$$

则 $G(t,x)=V(t,x)$, 且 $u^*=(\pi_1^*,\pi_2^*,q^*)$ 是最优投资和再保险策略.

由定理 2 可知, 要想得到最优投资和再保险策略, 首先需要得到 HJB 方程 (16) 的解. 我们首先假定上式 $\pi_1^2(t)$, $\pi_2^2(t)$, $q^2(t)$ 的系数 $V_{xx}x^2\sigma_d^2/2$, $V_{xx}x^2(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)/2$, $(V_{xx}/2-V_x\theta)\beta^2$ 都是负的, 则对 HJB 方程 (16) 分别关于 $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$, $q(t)$ 求一阶导, 再利用一阶最优条件可得

$$\begin{cases}V_x(\mu_d-r_d)+V_{xx}x\pi_1(t)\sigma_d^2+V_{xx}x\pi_2(t)\rho_1\sigma_d\delta=0,\\ V_x(\mu-r_d)+V_{xx}x\pi_2(t)(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)+V_{xx}x\pi_1(t)\rho_1\sigma_d\delta=0,\\ V_x[2\theta-2q(t)\theta]\beta^2+V_{xx}q(t)\beta^2=0,\end{cases}\tag{18}$$

解上述方程组有

$$\begin{cases}\pi_1^*(t)=\dfrac{V_x[\rho_1\sigma_d\delta(\mu-r_d)-(\mu_d-r_d)(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)]}{V_{xx}x[\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+(1-\rho_1^2)\delta^2]\sigma_d^2},\\ \pi_2^*(t)=\dfrac{V_x[(\mu_d-r_d)\rho_1\delta-(\mu-r_d)\sigma_d]}{V_{xx}x[\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+(1-\rho_1^2)\delta^2]\sigma_d},\\ \widehat{q}(t)=\dfrac{2V_x\theta}{2V_x\theta-V_{xx}}.\end{cases}\tag{19}$$

为了符号方便和计算简单, 我们令

$$m=\frac{\rho_1\sigma_d\delta(\mu-r_d)-(\mu_d-r_d)(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)}{[\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+(1-\rho_1^2)\delta^2]\sigma_d^2},\tag{20}$$

$$n=\frac{(\mu_d-r_d)\rho_1\delta-(\mu-r_d)\sigma_d}{[\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+(1-\rho_1^2)\delta^2]\sigma_d},\tag{21}$$

则

$$\begin{cases}\pi_1^*(t)=\dfrac{V_x}{V_{xx}x}m,\\ \pi_2^*(t)=\dfrac{V_x}{V_{xx}x}n.\end{cases}\tag{22}$$

从第二节的分析可知再保险比例 $q_0\leqslant q^*(t)\leqslant 1$, 故 $q^*(t)$ 满足如下:

$$\begin{cases}q^*(t)=q_0, & \widehat{q}(t)<q_0;\\ q^*(t)=\widehat{q}(t), & q_0\leqslant\widehat{q}(t)\leqslant 1;\\ q^*(t)=1, & \widehat{q}(t)>1.\end{cases}\tag{23}$$

将方程 (22) 和 $q^*(t)$ 代入 HJB 方程 (16) 可得

$$\begin{aligned}&V_t+xV_xr_d+\frac{V_x^2}{V_{xx}}m(\mu_d-r_d)+\frac{V_x^2}{V_{xx}}n(\mu-r_d)+V_x[\eta-\theta+2q^*(t)\theta-q^*(t)^2\theta]\beta^2\\&+\frac{V_x^2m^2\sigma_d^2}{2V_{xx}}+\frac{V_x^2mn\rho_1\sigma_d\delta}{V_{xx}}+\frac{V_x^2n^2}{2V_{xx}}(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)+\frac{1}{2}V_{xx}q^*(t)^2\beta^2=0.\end{aligned}\tag{24}$$

从最优投资策略 (22) 和再保险策略 (23) 可知, 要想得到其最优投资策略和再保险策略显示解, 必须求出方程 (24) 中值函数 $V(t,x)$ 的显示表达式.

在本文我们假定保险公司采取的是指数效用, 这类效用函数在精算领域有着很重要的应用, 其效用函数 $U(x)$ 满足如下

$$U(x)=\varpi-\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x},\qquad \gamma>0,\tag{25}$$

其中 $\xi>0$, $\gamma>0$ 为绝对风险厌恶系数.

定理 3 扩散近似模型下保险公司的最优投资策略满足如下

$$\pi_1^*(t)=-\frac{m}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)},\tag{26}$$

$$\pi_2^*(t)=-\frac{n}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)},\tag{27}$$

最优再保险策略为

$$\begin{cases}q^*(t)=q_0, & \dfrac{2\theta}{2\theta+\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}<q_0;\\ q^*(t)=\dfrac{2\theta}{2\theta+\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}, & q_0\leqslant\dfrac{2\theta}{2\theta+\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}},\end{cases}\tag{28}$$

其中 m, n 分别满足式 (20) 和 (21). 此外, 最优值函数为

$$\begin{cases}V(t,x)=\varpi-\dfrac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}-\int_t^Tf_1(s)\mathrm{d}s}, & \dfrac{2\theta}{2\theta+\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}<q_0;\\ V(t,x)=\varpi-\dfrac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}-\int_t^Tf_2(s)\mathrm{d}s}, & q_0\leqslant\dfrac{2\theta}{2\theta+\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}},\end{cases}\tag{29}$$

其中 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 分别满足 (35) 和 (36).

证明: 首先我们猜测方程 (24) 有如下形式的解

$$V(t,x)=\varpi-\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}h(t),\tag{30}$$

因为 $V(T,x)=U(x)$, 故 $h(T)=1$.

对 $V(t,x)$ 关于变量 t 和 x 各求一阶导, 关于变量 x 求二阶导可得

$$V_t=-\xi r_dx\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}h(t)-\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}h_t,\tag{31}$$

$$V_x = \xi e^{r_d(T-t)} e^{-\gamma x e^{r_d(T-t)}} h(t), \tag{32}$$

$$V_{xx} = -\xi\gamma e^{2r_d(T-t)} e^{-\gamma x e^{r_d(T-t)}} h(t), \tag{33}$$

其中 h_t 是 $h(t)$ 关于变量 t 的一阶导数. 再由 (19) 可知, $\widehat{q}(t) = 2\theta/(2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)})$. 注意 $\theta > 0$, $\gamma > 0$, 故 $0 < \widehat{q}(t) < 1$, 再由 (23) 可得到 (28). 接着我们将 (31), (32), (33) 代入方程 (24) 有

$$\begin{aligned} &- m(\mu_d - r_d) - n(\mu - r_d) + \gamma e^{r_d(T-t)}[\eta - \theta + 2q^*(t)\theta - q^*(t)^2\theta]\beta^2 - \frac{1}{2}m^2\sigma_d^2 \\ &- mn\rho_1\sigma_d\delta - \frac{1}{2}n^2(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) - \frac{1}{2}\gamma^2 e^{2r_d(T-t)} q^*(t)^2\beta^2 = \frac{h_t}{h(t)}. \end{aligned} \tag{34}$$

为了符号方便, 我们记

$$\begin{aligned} f_1(t) = {}& m(\mu_d - r_d) + n(\mu - r_d) - \gamma e^{r_d(T-t)}(\eta - \theta + 2q_0\theta - q_0^2\theta)\beta^2 + \frac{1}{2}m^2\sigma_d^2 \\ &+ mn\rho_1\sigma_d\delta + \frac{1}{2}n^2(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) + \frac{1}{2}\gamma^2 e^{2r_d(T-t)} q_0^2\beta^2, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} f_2(t) = {}& m(\mu_d - r_d) + n(\mu - r_d) + mn\rho_1\sigma_d\delta - \gamma e^{r_d(T-t)} \\ &\times \Big[\eta - \theta + \frac{4\theta^2}{2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)}} - \frac{4\theta^3}{(2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)})^2}\Big]\beta^2 + \frac{1}{2}m^2\sigma_d^2 \\ &+ \frac{1}{2}n^2(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) + \frac{2\gamma^2 e^{2r_d(T-t)}\theta^2\beta^2}{(2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)})^2}. \end{aligned} \tag{36}$$

结合 $h(T) = 1$, 则方程 (34) 的解为

$$\begin{cases} h(t) = e^{-\int_t^T f_1(s)\mathrm{d}s}, & \dfrac{2\theta}{2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)}} < q_0; \\ h(t) = e^{-\int_t^T f_2(s)\mathrm{d}s}, & q_0 \leqslant \dfrac{2\theta}{2\theta + \gamma e^{r_d(T-t)}}. \end{cases} \tag{37}$$

因为 $h(t) > 0$, 再由 (32) 和 (33) 可知, $V_x > 0$, $V_{xx} < 0$. 故 HJB 方程 (16) 中 $\pi_1^2(t)$, $\pi_2^2(t)$, $q^2(t)$ 的系数 $V_{xx}x^2\sigma_d^2/2$, $V_{xx}x^2(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2)/2$, $(V_{xx}/2 - V_x\theta)\beta^2$ 都是负的, 于是式 (19) 中的 $\pi_1^*(t)$, $\pi_2^*(t)$ 和式 (23) 中的 $q^*(t)$ 是保险公司的最优投资和再保险策略. 再将 (32) 和 (33) 代入方程 (22) 即可获得最优投资策略 (26) 和 (27). 再通过 (30) 和 (37) 即可获得最优值函数 (29). □

注记 4　当保险公司不投资国外股票的情况下, 即 $\pi_2(t) = 0$, 由上述同样的方法可知投资股票 S^d 的最优比例为 $\pi_1^{0,*}(t) = [(\mu_d - r_d)/(\gamma\sigma_d^2 x)]e^{-r_d(T-t)}$.

§4.　经典风险模型

在上一节, 我们考虑了扩散近似模型下最优投资和再保险问题. 在这一节我们将进一步考虑经典风险模型下的最优投资和再保险问题. 为了方便起见, 这一节我们采用的数学

符号和第三节的数学符号一样. 在经典风险模型下, 由式 (5) 和 (9) 可得财富过程 $X^u(t)$ 满足如下

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X^u(t) &= \frac{\pi_1(t)X^u(t)}{S^d(t)}\mathrm{d}S^d(t) + \frac{\pi_2(t)X^u(t)}{Q(t)S^f(t)}\mathrm{d}[Q(t)S^f(t)] \\
&\quad + \frac{[1-\pi_1(t)-\pi_2(t)]X^u(t)}{B(t)}\mathrm{d}B(t) + \mathrm{d}\overline{R}(t) \\
&= X^u(t)[r_d + \pi_1(t)(\mu_d - r_d) + \pi_2(t)(\mu - r_d)]\mathrm{d}t \\
&\quad + X^u(t)[\pi_1(t)\sigma_d + \pi_2(t)\rho_1\delta]\mathrm{d}W_1(t) \\
&\quad + X^u(t)\big[\pi_2(t)(\sigma_f + \rho_2\delta)\mathrm{d}W_2(t) + \pi_2(t)\sqrt{1-\rho_1^2-\rho_2^2}\,\delta\mathrm{d}W_3(t)\big] \\
&\quad + \{[\eta - \theta + 2q(t)\theta - q(t)^2\theta]\beta^2 + q(t)\alpha\}\mathrm{d}t - q(t)\mathrm{d}\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j. \qquad (38)
\end{aligned}$$

我们要解决的问题仍然是问题 (14), 效用函数还是指数效用函数 (25), 不过问题 (14) 中的财富方程满足方程 38. 类似定理 2 我们可以给出索赔过程服从经典风险模型时的验证定理, 这里不再重复. 下面的定理 5 是这一节的主要结果.

定理 5 经典风险模型下保险公司的最优投资策略满足如下

$$\begin{aligned}
\pi_1^*(t) &= -\frac{m}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)}, \\
\pi_2^*(t) &= -\frac{n}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)},
\end{aligned}$$

其中 m, n 分别满足式 (20) 和 (21). 此外, 最优再保险策略 $q^*(t) = \max\{q_0, q(t)\}$, 其中 $q(t)$ 是如下方程的唯一解, 且 $q(t) \in (0,1)$,

$$\alpha + [2\theta - 2q(t)\theta]\beta^2 - \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{\gamma q(t) y \mathrm{e}^{r_d(T-t)}} y\mathrm{d}F(y) = 0. \qquad (39)$$

最优值函数 $V(t,x) = \varpi - (\xi/\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma x \mathrm{e}^{r_d(T-t)}}\mathrm{e}^{-\int_t^T f_3(s)\mathrm{d}s}$, 其中

$$\begin{aligned}
f_3(t) &= m(\mu_d - r_d) + n(\mu - r_d) - \gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\{[\eta - \theta + 2q^*(t)\theta - q^*(t)^2\theta]\beta^2 + q^*(t)\alpha\} \\
&\quad + \frac{1}{2}m^2\sigma_d^2 + mn\rho_1\sigma_d\delta + \frac{1}{2}n^2(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) + \frac{\lambda}{\gamma}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\gamma q^*(t) y \mathrm{e}^{r_d(T-t)}} - 1)\mathrm{d}F(y).
\end{aligned}$$

证明: 由动态规划原理可得 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程如下

$$\begin{aligned}
&V_t + \sup_{u\in\Lambda}\Big\{xV_x[r_d + \pi_1(t)(\mu_d - r_d) + \pi_2(t)(\mu - r_d)] + V_x\{[\eta - \theta + 2q(t)\theta - q(t)^2\theta]\beta^2 \\
&+ q(t)\alpha\} + \frac{1}{2}V_{xx}x^2[\pi_1^2(t)\sigma_d^2 + 2\pi_1(t)\pi_2(t)\rho_1\sigma_d\delta] + \frac{1}{2}V_{xx}x^2\pi_2^2(t) \\
&\times(\sigma_f^2 + 2\rho_2\sigma_f\delta + \delta^2) + \lambda\int_0^\infty[V(t, x - q(t)y) - V(t,x)]\mathrm{d}F(y)\Big\} = 0, \qquad (40)
\end{aligned}$$

这里 $V(T,x)=U(x)$, $F(y)$ 为 Y_j 的分布函数, V_t, V_x 是关于时间和财富的一阶导数, V_{xx} 是关于财富的二阶导数. 与第四节做法类似, 我们猜测上述 HJB 方程的解满足如下

$$V(t,x)=\varpi-\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}g(t), \tag{41}$$

其中 $g(T)=1$.

将 V_t, V_x, V_{xx} 代入 HJB 方程 (40) 可得

$$\begin{aligned}&-g_t+\gamma\sup_{u\in\Lambda}\Big\{g(t)\Big\{x\mathrm{e}^{r_d(T-t)}[\pi_1(t)(\mu_d-r_d)+\pi_2(t)(\mu-r_d)]+\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\{[\eta-\theta\\&+2q(t)\theta-q(t)^2\theta]\beta^2+q(t)\alpha\}-\frac{\gamma}{2}\mathrm{e}^{2r_d(T-t)}x^2[\pi_1^2(t)\sigma_d^2+2\pi_1(t)\pi_2(t)\rho_1\sigma_d\delta]\\&-\frac{\gamma}{2}\mathrm{e}^{2r_d(T-t)}x^2\pi_2^2(t)(\sigma_f^2+2\rho_2\sigma_f\delta+\delta^2)-\frac{\lambda}{\gamma}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{\gamma q(t)y\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}-1)\mathrm{d}F(y)\Big\}\Big\}=0.\end{aligned} \tag{42}$$

利用反证法, 从 (42) 可以很容易证明 $g(t)>0$. 另外, 方程 (42) 关于 $\pi_1(t)$, $\pi_2(t)$, $q(t)$ 各求二阶导, 可以发现它们的二阶导数都是负的. 再根据一阶最优条件可得

$$\pi_1^*(t)=-\frac{m}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)},$$
$$\pi_2^*(t)=-\frac{n}{\gamma x}\mathrm{e}^{-r_d(T-t)}.$$

另外, 方程 (42) 关于 $q(t)$ 的一阶最优条件为

$$\alpha+[2\theta-2q(t)\theta]\beta^2-\lambda\int_0^\infty\mathrm{e}^{\gamma q(t)y\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}y\mathrm{d}F(y)=0. \tag{43}$$

令 $H(q(t))=\alpha+[2\theta-2q(t)\theta]\beta^2-\lambda\int_0^\infty\mathrm{e}^{\gamma q(t)y\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}y\mathrm{d}F(y)$, 由于 $\alpha=\lambda\int_0^\infty y\mathrm{d}F(y)$, 则 $H(0)=\alpha+2\theta\beta^2-\lambda\int_0^\infty y\mathrm{d}F(y)=2\theta\beta^2>0$, $H(1)=\alpha-\lambda\int_0^\infty\mathrm{e}^{\gamma y\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}y\mathrm{d}F(y)<\alpha-\lambda\int_0^\infty y\mathrm{d}F(y)=0$. 接着我们对 $H(q(t))$ 关于 $q(t)$ 求一阶导可得

$$H_q=-2\theta\beta^2-\lambda\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\int_0^\infty y^2\mathrm{e}^{\gamma q(t)y\mathrm{e}^{r_d(T-t)}}\mathrm{d}F(y)<0.$$

因此, $H(q(t))$ 关于 $q(t)$ 是严格递减函数, 故方程 (39) 关于 $q(t)$ 有唯一解, 且该解 $q(t)\in(0,1)$. 将最优投资策略 $\pi_1^*(t)=-[m/(\gamma x)]\mathrm{e}^{-r_d(T-t)}$, $\pi_2^*(t)=-[n/(\gamma x)]\mathrm{e}^{-r_d(T-t)}$ 和再保险策略 $q^*(t)$ 代入方程 (42), 再结合边界条件 $g(T)=1$ 可得

$$g(t)=\mathrm{e}^{-\int_t^T f_3(s)\mathrm{d}s}. \tag{44}$$

结合上式和式(41)即完成了定理的全部证明. □

注记 6　从定理 3 和定理 5 可以发现索赔过程在扩散近似模型和经典复合泊松过程这两种情形下, 最优投资策略 $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ 是一样的, 最优投资策略与保险索赔和保费的参数无关.

在定理 5 中, 我们给出了保险损失索赔满足一般分布情况下的最优再保险策略 $q^*(t)=\max\{q_0,q(t)\}$, 其中 $q(t)$ 是方程 (39) 的唯一解, 但由于没有给出具体的概率分布 $F(y)$, 因此得不到显示解. 在下面的命题 7 中我们考虑一个特殊的分布 (指数分布), 其中指数分布的参数为 ζ, 并给出了相应的最优再保险策略的显示解. 此外, 为了使得方程 (39) 中的积分项有意义, 我们假定参数 $\zeta>\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}$.

命题 7 在索赔 $\{Y_i,\,i=1,2,3,\ldots\}$ 满足参数为 ζ 的指数分布的情况下, 最优再保险策略为

$$\begin{cases}q^*(t)=q_0, & q(t)<q_0;\\ q^*(t)=\overline{q}(t), & q_0\leqslant\overline{q}(t),\end{cases}\tag{45}$$

其中 $\overline{q}(t)$ 满足方程 (50), $a(t)=-2\theta\beta^2\gamma^2\mathrm{e}^{2r_d(T-t)}$, $b(t)=(\alpha+2\theta\beta^2)\gamma^2\mathrm{e}^{2r_d(T-t)}+4\theta\beta^2\gamma\cdot\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\zeta$, $c(t)=-2(\alpha+2\theta\beta^2)\gamma\mathrm{e}^{r_d(T-t)}\zeta-2\theta\beta^2\zeta^2$, $d(t)=(\alpha+2\theta\beta^2)\zeta^2-\lambda\zeta$, $k(t)=[3a(t)c(t)-b^2(t)]\,/\,[3a^2(t)]$, $l(t)=[27a^2(t)d(t)-9a(t)b(t)c(t)+2b^3(t)]\,/\,[27a^3(t)]$, $\Delta=[l(t)/2]^2+[k(t)/3]^3$.

证明: 当 Y 满足指数分布时, 方程 (39) 转化为

$$a(t)q^3(t)+b(t)q^2(t)+c(t)q(t)+d(t)=0.\tag{46}$$

因为 $a(t)\neq 0$, 对方程 (46) 两边同时除以 $a(t)$ 可得

$$q^3(t)+\frac{b(t)}{a(t)}q^2(t)+\frac{c(t)}{a(t)}q(t)+\frac{d(t)}{a(t)}=0.\tag{47}$$

令 $q(t)=p(t)-b(t)/[3a(t)]$, 则上式转换为

$$p^3(t)+k(t)p(t)+l(t)=0.\tag{48}$$

由卡丹公式法可知, 当 $\Delta>0$ 时, 有一个实根和两个复根; 当 $\Delta=0$ 时, 有三个实根, 当 $k(t)=l(t)=0$ 时, 有一个三重零根, 当 $k(t)\neq 0$, $l(t)\neq 0$ 时, 三个实根中有两个相等; 当 $\Delta<0$ 时, 有三个不等实根. 然而, 我们在定理 5 中已经证明了方程 (46) 只有一个实根, 故方程 (48) 只有一个实根. 令 $\overline{p}(t)$ 为方程 (48) 的根, 则根据卡丹公式法可得该方程的根为

$$\overline{p}(t)=\sqrt[3]{-\frac{l(t)}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{l(t)}{2}-\sqrt{\Delta}}.\tag{49}$$

令 $\overline{q}(t)$ 为方程 (46) 的根, 故

$$\overline{q}(t)=\overline{p}(t)-\frac{b(t)}{3a(t)}=-\frac{b(t)}{3a(t)}+\sqrt[3]{-\frac{l(t)}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{l(t)}{2}-\sqrt{\Delta}}.\qquad\square\tag{50}$$

注记 8 从定理 5 和命题 7 可以发现索赔过程满足扩散近似模型和经典复合泊松过程这两种情形下, 最优再保险策略 $q^*(t)$ 只和国内无风险利率、保险模型参数、风险厌恶系数 γ 及投资时间 T 有关, 但与股票模型及汇率模型中其他参数无关.

§5.　数值分析

在这一节, 我们通过一些数值例子来说明金融模型中的不同参数对最优投资和再保险策略的影响. 另外, 在数值结果中我们只考虑了扩散近似模型的情形, 因为经典风险模型下参数对最优投资和再保险策略的影响与扩散近似模型是一样的, 其经济解释也一样. 如无特别说明, 假定各参数的值为: $\alpha=0.1$, $\beta=0.8$, $r_d=0.05$, $r_f=0.03$, $\mu_f=0.1$, $\mu_d=0.08$, $\sigma_f=0.2$, $\sigma_d=0.15$, $\delta=0.1$, $\theta=1.8$, $\eta=1.2$, $\rho_1=0.2$, $\rho_2=-0.2$, $x=1$, $t=0$, $T=5$, $\gamma=3$. 通过计算可得 $q_0=0.1743$.

在图 1 和图 2 中我们分析了绝对风险厌恶系数 γ 对最优投资和再保险策略的影响. 从图 1 和图 2 可以看出, 随着 γ 值的增加, 保险公司对本国和国外风险资产的投资都会减少, 保险公司对保险业务的自留比例也相应减少, 而更愿意转让更多的保险业务给再保险公司. 造成这个结果的原因, 其实是非常明显的, 这是因为 γ 越大意味着保险公司对风险更加厌恶, 因此他们会尽量少投资风险资产和少承担保险业务. 此外, 在图 2 中我们也可以发现当 $\gamma\geqslant 14$ 时, 保险公司自留比例 q^* 一直保持不变等于 q_0. 这是因为再保险公司的保费比保险公司的保费要贵, 所以保险公司为了避免收取的保费不够支付再保险费用, 至少要承担 q_0 比例的保险业务.

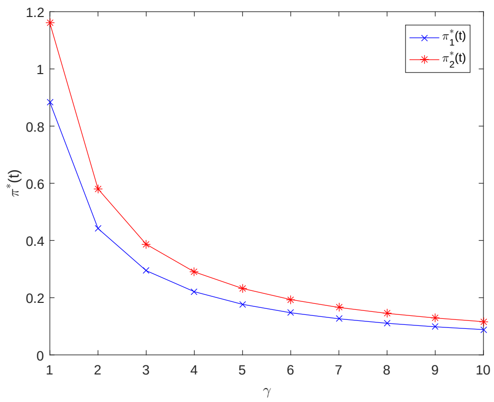

图 1　γ 对投资策略 $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ 的影响

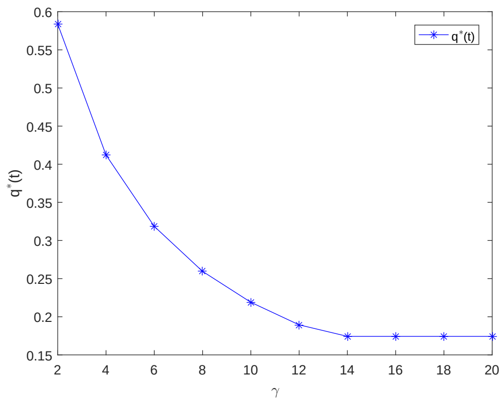

图 2　γ 对再保险策略 $q^*(t)$ 的影响

在图 3 和图 4 中, $\pi_1^{0,*}(t)$ 表示若保险公司只有本国风险资产可投资时的最优投资策略. 从图 3 和图 4 我们发现, 如果保险公司有国外风险资产可投资时, 投资国内风险资产的比例将会减少, 这个原因是当保险公司有多个资产可选择时, 会通过分散投资来降低风险, 因此 $\pi_1^*(t)>\pi_1^{0,*}(t)$. 当 γ 越来越大, 即保险人越厌恶风险; 当时间 T 越大, 不确定因素越多. 因此, 在这两种情况下, $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_1^{0,*}(t)$ 都越来越小, 这是因为风险越大, 投资人自然会降低风险资产的投资比例.

图 5 和图 6 研究了国外风险资产价格动态的参数对最优投资策略 $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ 的影

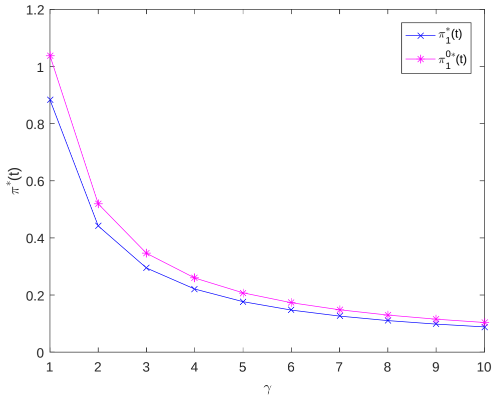

图 3　投资策略 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_1^{0,*}(t)$ 的比较

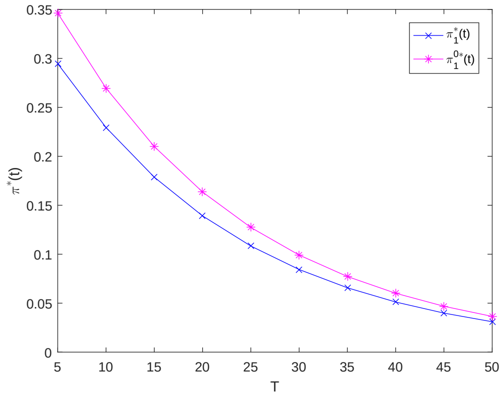

图 4　投资策略 $\pi_1^*(t)$ 和 $\pi_1^{0,*}(t)$ 的比较

响. 在图 5 中, 我们考虑了国外风险资产的回报率 μ_f 对 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响, 随着 μ_f 增大, $\pi_2^*(t)$ 的值增大而 $\pi_1^*(t)$ 在减小, 这是因为国外风险资产的回报率增大, 从收益的角度来说, 投资人投资该风险资产的比例当然增多, 因此相对来说自然会减少投资另一个风险资产也就是国内的风险资产. 在图 6 中, 我们考虑了国外风险资产的波动率 σ_f 对 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响, 由于波动率 σ_f 越大, 国外风险资产 S_f 收益的不确定性越大, 也就是说投资风险越大, 因此对保险公司来说, 当然会选择减少对国外风险资产的投资而多投资国内风险资产.

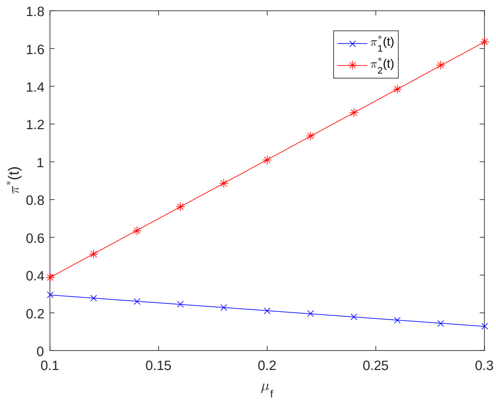

图 5　μ_f 对投资策略 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响

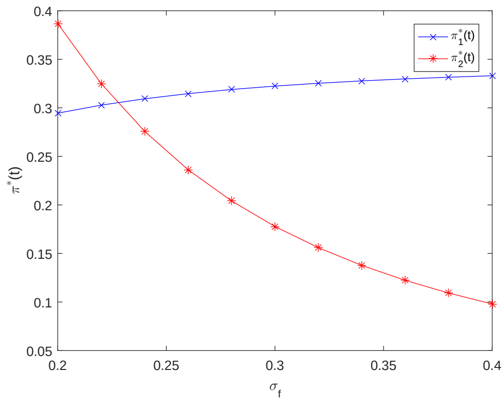

图 6　σ_f 对投资策略 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响

图 7 和图 8 揭示了汇率风险模型中的参数 δ 和 r_f 对投资策略 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响. δ 的增加表示汇率波动较大, 因此保险人对国外股票的投资兴趣降低是很显然的. 因为我们假定 $\rho_1 > 0$, 即本国股票价格与汇率是正相关的. 因此汇率的高波动会导致本国股票风险很大, 保险人会降低对本国股票的投资. 然而, 另一方面, 由于保险人会降低对国外股票的投资, 因此会增加对本国股票的投资兴趣. 这两个方面的综合影响决定了本国股票的投资比例, 主要看哪个影响会更加大一些, 因此我们可以发现当 δ 较小时, 随着 δ 增加, $\pi_1^*(t)$ 的

值减小; 然而当 δ 较大时, 随着 δ 增加, $\pi_1^*(t)$ 是增加的. 在图 8 中, 随着 r_f 的增加, 汇率是减小的, 故国外股票对投资者来说收益明显会降低, 因此保险人自然会降低对国外股票的投资兴趣. 另外, 由于国内股票价格与汇率是正相关的, 就像以进口为主的公司, 当汇率降低时自然会影响公司的股票价值, 所以从这个影响来说 $\pi_1^*(t)$ 是减小的, 但同样由于国外股票的收益价值降低更多, 也使得相对提高了保险人对本国股票的投资兴趣, 因此这两个因素综合影响使得 $\pi_1^*(t)$ 有稍许增加.

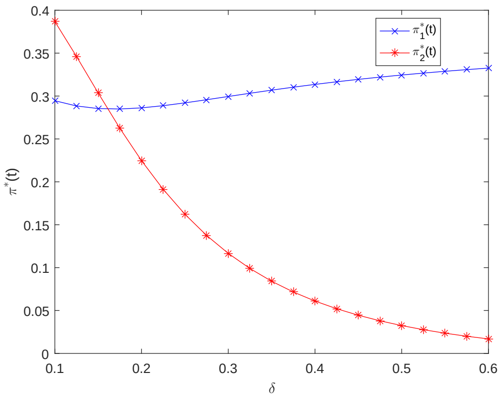

图 7　δ **对投资策略** $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ **的影响**

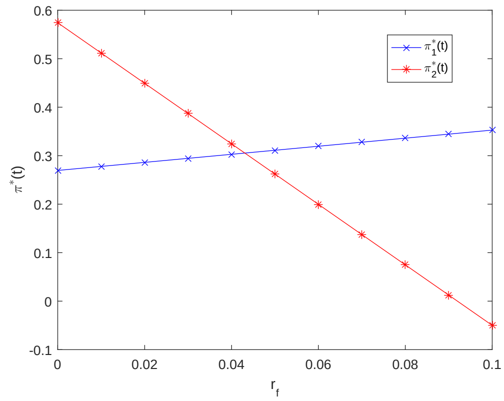

图 8　r_f **对投资策略** $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ **的影响**

图 9 我们研究了国内无风险利率 r_d 对最优投资策略 $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ 的影响. 随着 r_d 的增加, 相对无风险利率来说, 无论是国内股票还是国外股票的收益对保险人来说兴趣都会大大降低. 在图 10 中, 我们考虑了国内无风险利率 r_d 对再保险策略 $q^*(t)$ 的影响. 保险人从收益和风险角度来说, r_d 越大, 保险人越会把更多的钱投到无风险债券上而降低对股票的投资. 可以发现随着无风险利率 r_d 的增加, 保险公司对风险资产的投资很明显兴趣会减少, 而选择更高的无风险收益, 随着保险公司无风险收益的增加, 保险公司可以采取购买更多的再保险来降低保险风险, 因此 $q^*(t)$ 的值是减少的. 此外, 在图 10 中我们也可以发现随着 θ 的增加, $q^*(t)$ 的值是增加的, 这是因为 θ 是再保险公司的相对安全负荷, θ 越大意味着再保险公司的保费越贵, 这当然会使得保险公司选择更少的再保险业务, 即自留比例 $q^*(t)$ 更大.

图 11 和图 12 研究了时间 T 对最优投资策略 $(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t))$ 和再保险策略 $q^*(t)$ 的影响. T 的值越大, 对投资人来说, 未来的不确定性越多, 因此从风险的角度来说, 保险公司当然会减少对市场中风险资产的投资. 同样, T 越大, 未来保险业务的风险也越大, 因此保险公司更愿意转让更多的保险业务给再保险公司, 减少自留比例. 另外, 在图 12 中我们给出了当 $r_d=0.05$, $r_d=0.1$, $r_d=0.15$ 三种情形时最优再保险策略 $q^*(t)$ 的值, 和图 10 中一样, 随着无风险利率 r_d 的增加, $q^*(t)$ 的值是减少的. 此外, 由于保险公司不会做亏本的生意, 而再保险业务是不便宜的, 故保险公司对购买再保险业务作了一定的限制, 以免收取的保

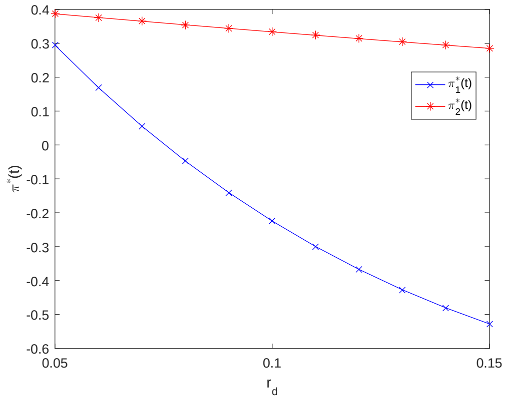

图 9　r_d 对投资策略 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响

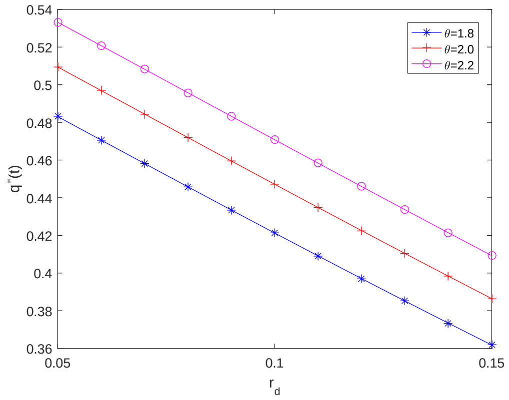

图 10　r_d 和 θ 对再保险策略 $q^*(t)$ 的影响

费不够支付再保险费用. 我们可以看到在 $T=12$, $r_d=0.15$ 和 $T=18$, $r_d=0.1$ 时对应的最优再保险策略 $q^*(t)=q_0=1.743$. 造成这个结果的原因就是再保险业务的限制.

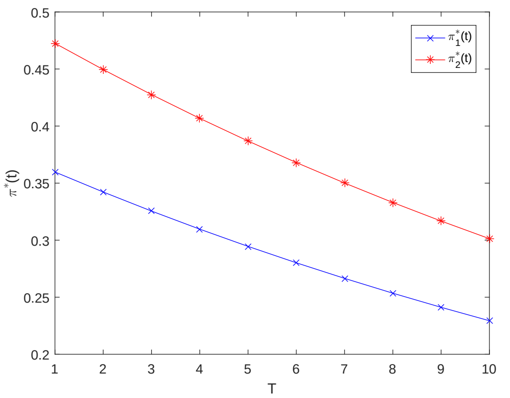

图 11　T 对投资策略 $(\pi_1^*(t), \pi_2^*(t))$ 的影响

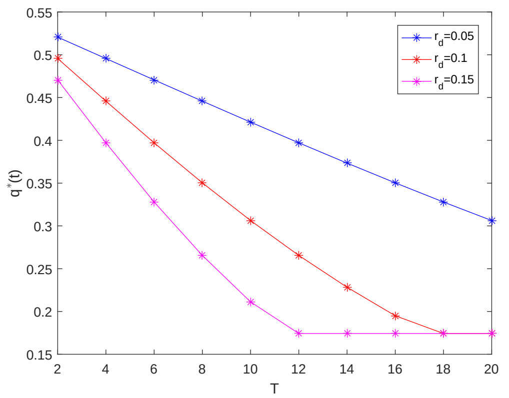

图 12　T 对再保险策略 $q^*(t)$ 的影响

§6.　结　　论

本文假定保险公司和再保险公司都采取方差保费准则收取保费, 由于再保险不是便宜的, 因此对保险公司的自留比例作了一定的限制, 以免保险公司收取的保费不够支付购买再保险的业务费用. 另外, 由于保险公司存有大量的闲置资金, 本文不但考虑了保险公司可以投资本国风险资产, 还可以投资国外风险资产. 因此, 进一步考虑了汇率风险的存在, 并研究了扩散近似模型和经典风险模型这两种情形下保险公司的最优投资和再保险问题, 通过 HJB 方程得到了最优投资和再保险策略, 并发现汇率风险会影响最优投资策略, 但不会影响再保险策略. 特别的, 这两种情形下的最优投资策略是一样的, 也就是说保险业务对保

险公司的最优投资没有影响. 最后, 我们利用数值结果分析了模型参数对最优投资和再保险策略的影响, 数值结果也说明了考虑汇率风险对保险公司的投资来说是很重要的.

参 考 文 献

[1] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin [J]. *Math Oper Res*, 1995, **20(4)**: 937–958.

[2] YANG H L, ZHANG L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process [J]. *Insurance Math Econom*, 2005, **37(3)**: 615–634.

[3] WANG N. Optimal investment for an insurer with exponential utility preference [J]. *Insurance Math Econom*, 2007, **40(1)**: 77–84.

[4] BAI L H, GUO J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint [J]. *Insurance Math Econom*, 2008, **42(3)**: 968–975.

[5] BAI L H, GUO J Y. Optimal dynamic excess-of-loss reinsurance and multidimensional portfolio selection [J]. *Sci China Math*, 2010, **53(7)**: 1787–1804.

[6] LIN X, LI Y F. Optimal reinsurance and investment for a jump diffusion risk process under the CEV model [J]. *N Am Actuar J*, 2011, **15(3)**: 417–431.

[7] LI Z F, ZENG Y, LAI Y Z. Optimal time-consistent investment and reinsurance strategies for insurers under Heston’s SV model [J]. *Insurance Math Econom*, 2012, **51(1)**: 191–203.

[8] YI B, LI Z F, VIENS F G, et al. Robust optimal control for an insurer with reinsurance and investment under Heston’s stochastic volatility model [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **53(3)**: 601–614.

[9] YUEN K C, LIANG Z B, ZHOU M. Optimal proportional reinsurance with common shock dependence [J]. *Insurance Math Econom*, 2015, **64**: 1–13.

[10] ZHANG X, MENG H, ZENG Y. Optimal investment and reinsurance strategies for insurers with generalized mean-variance premium principle and no-short selling [J]. *Insurance Math Econom*, 2016, **67**: 125–132.

[11] HAMILTON J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. *Econometrica*, 1989, **57(2)**: 357–384.

[12] CHEN L, QIAN L Y, SHEN Y, et al. Constrained investment-reinsurance optimization with regime switching under variance premium principle [J]. *Insurance Math Econom*, 2016, **71**: 253–267.

[13] GUAN G H, LIANG Z X. Optimal reinsurance and investment strategies for insurer under interest rate and inflation risks [J]. *Insurance Math Econom*, 2014, **55**: 105–115.

[14] LI D P, RONG X M, ZHAO H. Time-consistent reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer under stochastic interest rate model and inflation risk [J]. *Insurance Math Econom*, 2015, **64**: 28–44.

[15] GUO C, ZHUO X Y, CONSTANTINESCU C, et al. Optimal reinsurance-investment strategy under risks of interest rate, exchange rate and inflation [J]. *Methodol Comput Appl Probab*, 2018, **20(4)**: 1477–1502.

[16] FLEMING W H, SONER H M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.

Optimal Investment-Reinsurance Strategy with Exchange Rate Risk under Variance Premium Principle

HUANG Chan WANG Wei

(*School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo, 315211, China*)

WEN Limin

(*School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330022, China*)

Abstract: It is assumed that both an insurance company and a reinsurance company adopt the variance premium principle to collect premiums. Specifically, an insurance company is allowed to investment not only in a domestic risk-free asset and a risky asset, but also in a foreign risky asset. Firstly, we use a geometry Brownian motion to model the exchange rate risk, and assume that the insurance company could control the insurance risk by transferring the insurance business into the reinsurance company. Secondly, the stochastic dynamic programming principle is used to study the optimal investment and reinsurance problems in two situations. The first is a diffusion approximation risk model and the second is a classical risk model. The optimal investment and reinsurance strategies are obtained under these two situations. We also show that the exchange rate risk has a great impact on the insurance company's investment strategies, but has no effect on the reinsurance strategies. Finally, a sensitivity analysis of some parameters is provided.

Keywords: variance premium principle; exchage rate risk; optimal investment; reinsurance

2010 Mathematics Subject Classification: 91G80