应用概率统计 第 36 卷
第 1 期 2020 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2020, Vol. 36, No. 1, pp. 1-10
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.01.001

两服务台串联排队系统的逗留时间的强逼近 *

郭永江⋆ 张玉艳

(北京邮电大学理学院, 北京, 100876) (上海公安学院, 上海, 200137)

摘 要: 本文考虑了两服务台串联排队, 证明了重话务条件 (即服务强度 $\rho_1 = \rho_2 = 1$) 下逗留时间的强逼近, 此处的逗留时间指的是一个顾客从到达系统到离开系统的这段时间, 其强逼近是一个布朗运动的过程.

关键词: 两服务台串联排队; 流逼近; 强逼近; 布朗运动

中图分类号: O226

英文引用格式: GUO Y J, ZHANG Y Y. Strong approximation of the sojourn time for a two-stage tandem queue [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(1): 1–10. (in Chinese)

§1. 引 言

本文考虑一个两服务台串联排队系统, 顾客由系统外部到达系统, 依次经过串联的两个服务台, 在分别进行一次服务后, 离开系统. 顾客从系统外部达到, 按照先到先服务的服务规则接受服务. 我们关注顾客在排队系统中的逗留时间, 即考虑一个顾客从进入系统时刻到离开系统时刻的这段时间, 证明了重话务条件 (即服务强度 $\rho_1 = \rho_2 = 1$) 下逗留时间的强逼近, 此处的强逼近是一个布朗运动系统.

随机排队网络是描述计算机通信, 交通运输和流水生产线等网络的一种数学模型, 见文献 [1]. 串联排队网络是一种特殊的随机排队网络, 见文献 [2–5] 等. 串联排队模型方面的研究备受欢迎, 这是因为: 一方面, 串联模型拓扑结构简单, 相关串联模型的研究可以扩宽管理者的视野; 另一方面, 串联排队网络系统在港口运输、计算机通讯、交通控制、生产流程等领域中都有应用, 见文献 [6].

随机排队网络的强逼近可以说是建立在流体逼近的基础上的一种更强的逼近, 以流逼近为中心, 利用随机的布朗运动来逼近网络. 对于流逼近, 前人做了很多的工作, 比如: Chen 和 Mandelbaum [7] 得到了推广了的 Jackson 网络的流逼近, Whitt [8] 则给出了多服务员排队 GI/G/n 的流模型, Liu 和 Whitt [9] 得到了带有不耐烦顾客的多服务员排队的流模型, Dai [10] 用流体模型证明了随机排队网络的正 Harris 常返性, Guo 等 [6] 则利用流模型

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11871116) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: yongerguo@bupt.edu.cn.

本文 2018 年 1 月 20 日收到, 2018 年 7 月 20 日收到修改稿.

证明了一种具有无限供应源的重入型流水生产线排队网络的稳定性. Chen 和 Yao[11]则对 GI/G/1 排队和推广了的 Jackson 网络等流模型做了一个很好的综述. 对于强逼近, Zhang 和 Xu[12] 研究了 Jackon 网络的强逼近, 得出了队长强逼近的结果. Chen 和 Shen[13] 也在此基础上研究了先到先服务与优先服务规则相结合的单服务员向前排队网络的强逼近, 还有学者用强逼近的方法研究了 $\mathrm{GI/GI}/\infty$[14] 排队以及 Jackson 排队网络模型[15] 等, 而强逼近的应用可参考文献 [3, 4, 16].

为让读者对强逼近有个直观的认识, 下面通过一个更新过程来简述强逼近. 令 $N(t)$ 为一更新过程, 其间隔时间是一列独立同分布的随机变量序列 $\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$, 均值 $\mathsf{E}(\xi_1)=1/\gamma$, 方差是 $\mathsf{Var}(\xi_1)$, 平方变异系数 $c_N^2=\mathsf{Var}(\xi_1)/\mathsf{E}(\xi_1)^2$. 假设 $\mathsf{E}(\xi_1)^r<\infty$, $r>2$. 令 $\widetilde{N}(t)=\gamma t+\gamma^{1/2}c_N W_N(t)$, 其中 $W_N(t)$ 是一维标准布朗运动, 则 $\widetilde{N}(t)$ 为更新过程的强逼近, 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|N(t)-\widetilde{N}(t)|=o(L^{1/r}),\tag{1}$$

其中 o 表示: 如果 $\lim\limits_{t\to\infty}|f(t)/g(t)|=0$, 则 $f(t)=o(g(t))$. 更新过程的强逼近说明逼近偏差 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant L}|N(t)-\widetilde{N}(t)|$ 随 L 的增长速度小于 $L^{1/r}$ $(r>2)$, 即可以由 $L^{1/r}$ 界定增长速度.

本文研究在服务强度 $\rho_1=\rho_2=1$ 情况下两服务台串联排队系统中的逗留时间的强逼近, 据我们所知, 前人关于随机排队网络的强逼近结果仅限于队长、负荷、忙期、闲期等过程, 没有考虑逗留时间的强逼近. 我们的结果补充了前人的结果, 并为其他模型中逗留时间的强逼近研究提供一个启发.

文章安排如下: 第二节给出模型描述, 第三节给出强逼近结果和证明. 本文使用的一些符号: 所有的随机变量和随机过程都定义在一个共同的概率空间内 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$. $\mathsf{E}(X)$ 表示随机变量 X 的均值, $\mathsf{Var}(X)$ 表示其方差. "$\equiv$" 表示一种定义. 对于 $a\in\mathbb{R}$, $[a]^+\equiv\max\{a,0\}$. 任给 $a,b\in\mathbb{R}$, 令 $a\vee b=\max\{a,b\}$, $a\wedge b=\min\{a,b\}$. $\mathbb{D}[a,b]$ 表示一维在 $[a,b)$ 上右连续在 $(a,b]$ 上具有左极限的函数空间, 对于函数 f_n, $f\in\mathbb{D}[0,+\infty)$, $n=1,2,\cdots$, 定义 $\|f\|_L\equiv\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant L}|f(t)|$. "u.o.c." 是 "uniformly on compact set" 的缩写, 表示在紧集上一致收敛. 如果当 $n\to\infty$ 时, $\|f^n-f\|_L\to 0$, 记为 $f^n\to f$, u.o.c. 用 w.p.1 表示以概率 1. $e(t)\equiv t$ 表示恒同映射.

§2. 模型描述

两服务台串联的排队模型由两个服务台 $k=1,2$ 组成, 每个服务台上只有一个服务员. 顾客由系统外部到达系统, 按照先到先服务的服务规则接受服务, 先到先服务的服务规则是指顾客到达一个服务台, 若服务员忙, 则在队尾等待, 否则进入服务. 这种服务规则是非闲的, 即若有顾客等待接受服务, 则服务员不闲. 顾客依次经过两个服务台, 分别进

行一次服务后, 离开系统. 我们用 $u(n)$ 表示第 $n-1$ 个顾客和第 n 个顾客的到达间隔时间, 用 $v_k(n)$ 表示第 k 个服务台服务第 n 个顾客被服务的时间, $k=1,2$. 假设 $u\equiv\{u(n), n=1,2,\cdots\}$, $v_k\equiv\{v_k(n), n=1,2,\cdots\}$ 是相互独立的独立同分布的非负随机变量序列, 并且有 $\mathsf{E}[u(1)]\equiv 1/\lambda$, $\mathsf{E}(v_k)\equiv 1/\mu_k$, 平方变异系数 $c_a^2\equiv \mathsf{Var}\,[u(1)]/\{\mathsf{E}[u(1)]\}^2$, $c_{s,k}^2\equiv \mathsf{Var}\,[v_k(1)]/\{\mathsf{E}[v_k(1)]\}^2$. 设 $c_a>0$, $c_{s,k}>0$. 下面定义服务强度:

$$\rho_1\equiv\frac{\lambda}{\mu_1},\qquad \rho_2\equiv\frac{\lambda\wedge\mu_1}{\mu_2}. \tag{2}$$

定义间隔时间和服务时间的部分和序列 $U(n)\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}u(i)$, $V_k(n)\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}v_k(i)$, $n=1,2,\cdots$, 相应的两个更新过程为

$$A(t)\equiv\max\{n\geqslant 0: U(n)\leqslant t\},\qquad S_k(t)\equiv\max\{n\geqslant 0: V_k(n)\leqslant t\},$$

$A(t)$ 表示在 $(0,t]$ 时间内到达的顾客数, $S_k(t)$ 表示第 k 个服务台在 $(0,t]$ 时间一直忙所服务完的顾客数.

定义系统指标过程: 逗留时间过程 $\mathscr{S}(t)$, 表示 t 时刻进入系统的顾客在系统中停留的时间; 负荷过程 $Z_k(t)$, 表示若 t 时刻之后不再有到达, 第 k 个服务台服务完当前顾客所需时间; 队长过程 $Q_k(t)$, 表示第 k 个服务台在时刻 t 的顾客数, 包括正在接受与等待的顾客; 忙期过程 $T_k(t)$, 表示时间 $(0,t]$ 内第 k 个服务台服务顾客的时间总累计, 闲期过程 $I_k(t)=t-T_k(t)$, 表示时间 $(0,t]$ 内第 k 个服务台闲置时间累计; 离去过程 $D_k(t)=S_k(T_k(t))$, 表示在 t 之前从服务台 k 离开的顾客数. 假设 $Q_k(0)=0$, $k=1,2$, 即系统初始时为空. 由系统的行为得到系统方程:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{S}(t)=Z_1(t)+Z_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+v_1^*+v_2^*,\\
&Z_k(t)=V_k(D_{k-1}(t))-T_k(t)=V_k(Q_k(t)+D_k(t))-T_k(t),\\
&Q_k(t)=D_{k-1}(t)-D_k(t)=X_k(t)+\mu_k I_k(t),\\
&X_1(t)=(\lambda-\mu_1)t+[A(t)-\lambda t]-[S_1(T_1(t)-\mu_1T_1(t))],\\
&X_2(t)=[\mu_1T_1(t)-\mu_2t]+[S_1(T_1(t))-\mu_1T_1(t)]-[S_2(T_2(t))-\mu_2T_2(t)],\\
&T_k(t)=\int_0^t\mathbf{1}_{\{Q_k(s)>0\}}\mathrm{d}s,\qquad \int_0^{+\infty}Q_k(t)\mathrm{d}I_k(t)=0,\qquad k=1,2,
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $D_0(t)\equiv A(t)$, v_k^* 是相互独立, 且与 v_k 独立同分布的随机变量, 表示服务员 k 服务顾客的服务时间.

注记 1 (对 (3) 中各方程的解释) (3) 的第一个方程是指如果一个顾客在 t 时刻到来, 那么他在由两个串联服务台组成的排队系统内的逗留时间包括以下四部分: 等待第一个服务台服务的时间; 等待第二个服务台的服务时间; 在第一个服务台接收服务的时间和在第

二个服务台接收服务的时间, 其中 $t+Z_1(t)+v_1^*$ 是指顾客离开第一个服务台的时间. (3) 的后面六个方程遵从流守恒规律, 第七个方程告诉了我们一种服务机制: 只要队长不为 0, 则服务员是忙碌的. 第七个方程同样可以用下面表达式来表示

$$Q_k(t)=\Phi(X_k)(t), \qquad \mu_k I_k(t)=\Psi(X_k)(t), \tag{4}$$

并且 (Ψ,Φ) 定义为

$$\Psi(x)(t)=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}[-x(s)]^+, \qquad \Phi(x)(t)=x(t)+\Psi(x)(t), \tag{5}$$

此关系式被称为一维斜反射映射 (详见文献 [1]).

首先建立流逼近, 定义流变换过程如下:

$$\overline{\mathscr{S}}^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}\mathscr{S}(nt), \quad \overline{Z}_k^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}Z_k(nt), \quad \overline{Q}_k^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}Q_k(nt), \quad \overline{X}_k^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}X_k(nt),$$
$$\overline{I}_k^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}I_k(nt), \quad \overline{T}_k^{(n)}(t)\equiv\frac{1}{n}T_k(nt), \quad k=1,2.$$

根据更新过程的强大数定律, 我们得到流逼近的结果, 证明略.

引理 2 (排队的 FSLLN [10]) 假设 $\mathsf{E}[u(1)]<\infty$, $\mathsf{E}[v_k(1)]<\infty$, $k=1,2$. 若系统内初始为 0, 则对于 $k=1,2$, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$(\overline{\mathscr{S}}^{(n)},\overline{Z}_k^{(n)},\overline{Q}_k^{(n)},\overline{X}_k^{(n)},\overline{T}_k^{(n)},\overline{I}_k^{(n)})\to(\overline{\mathscr{S}},\overline{Z}_k,\overline{Q}_k,\overline{X}_k,\overline{T}_k,\overline{I}_k), \quad \text{u.o.c., w.p.1}, \tag{6}$$

其中, $\overline{\mathscr{S}}(t)=\overline{Z}_1(t)+\overline{Z}_2(t+\overline{Z}_1(t))$, 且

$$\begin{aligned}
&\overline{Z}_k(t)=\overline{Q}(t)/\mu_k, \qquad \overline{Q}_k(t)=\Phi(\overline{X}_k)(t), \qquad \overline{I}_k(t)=\Psi(\overline{X}_k)(t),\\
&\overline{T}_k(t)=t-\overline{I}_k(t), \qquad \overline{X}_1(t)=(\lambda-\mu_1)t, \qquad \overline{X}_2(t)=(\lambda\wedge\mu_1-\mu_2)t,
\end{aligned}$$

Φ, Ψ 见定义 (5).

注记 3 (流模型解) 引理 2 中的流模型具有下面的流模型解. 若 $\rho_1\leqslant 1$, 则 $\overline{Z}_1(t)=\overline{Q}_1(t)=0$, $\overline{T}_1(t)=\rho_1 t=t-\overline{I}_1(t)$, 当 $\rho_2\leqslant 1$, $\overline{\mathscr{S}}(t)=\overline{Z}_2(t)=0$, 否则 $(\rho_2-1)t>0$. 若 $\rho_1>1$, 则 $\overline{Z}_1(t)=\overline{Q}_1(t)/\mu_1=(\rho_1-1)t$, 并且

$$\overline{Z}_2(t)=\frac{\overline{Q}_2(t)}{\mu_2}=\begin{cases}0, & \text{当 } \rho_2=\mu_1/\mu_2<1;\\(\rho_1-1)t, & \text{当 } \rho_2=\mu_1/\mu_2=1;\\(\rho_2-1)t, & \text{当 } \rho_2=\mu_1/\mu_2>1,\end{cases}$$

$$\overline{\mathscr{S}}(t)=\begin{cases}\overline{Z}_1(t), & \text{当 } \rho_2=\mu_1/\mu_2<1;\\\overline{Z}_1(t)+\overline{Z}_2(t+\overline{Z}_1(t)), & \text{当 } \rho_2=\mu_1/\mu_2\geqslant 1\end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\rho_1 - 1)t, & \text{当 } \rho_2 = \mu_1/\mu_2 < 1; \\ (\rho_1 - 1)t + (\rho_1 - 1)\rho_1 t, & \text{当 } \rho_2 = \mu_1/\mu_2 = 1; \\ (\rho_1 - 1)t + (\rho_2 - 1)\rho_1 t, & \text{当 } \rho_2 = \mu_1/\mu_2 > 1. \end{cases}$$

§3. 强 逼 近

强逼近是用布朗运动来逼近离散随机过程的方法. 例如 Q, 由两个连续函数的和组成: (i) 确定性的流逼近 $\overline{Q}$, (ii) 标准布朗运动, 流逼近用来刻画平均值的大小, 布朗运动用来反映随机过程在平均值上下的波动幅度. 下面给出当服务强度 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 时, 两个串联服务台排队系统的逗留时间的强逼近 $\mathscr{S}$.

首先给出队长、负荷、忙期和闲期过程的强逼近, 即引理 4, 这是证明定理 5 的基础.

引理 4　假设服务强度 $\rho_1 = \rho_2 = 1$, 如果满足 $\mathsf{E}[u(1)^r] < \infty$, $\mathsf{E}[v_k(1)^r] < \infty$, $r > 2$, 则, $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &\|Z_k - \widetilde{Z}_k\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \|Q_k - \widetilde{Q}_k\|_L = o(L^{1/r}), \\ &\|T_k - \widetilde{T}_k\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \|I_k - \widetilde{I}_k\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中,

$$\begin{aligned} &\widetilde{Z}_k(t) = \frac{1}{\mu_k}\widetilde{Q}_k(t), \qquad (\widetilde{Q}_k, \mu_k \widetilde{I}_k) = (\Phi, \Psi)(\widetilde{X}_k), \\ &\widetilde{T}_k(t) = t - \widetilde{I}_k(t), \qquad \widetilde{X}_1(t) = \lambda^{1/2} c_a W_a(t) - \mu_1^{1/2} c_{s,1} W_{s,1}(\overline{T}_1(t)), \\ &\widetilde{X}_2(t) = \mu_1 \widetilde{T}_1(t) - \mu_2 t + \mu_1^{1/2} c_{s,1} W_{s,1}(\overline{T}_1(t)) - \mu_2^{1/2} c_{s,2} W_{s,2}(\overline{T}_2(t)), \end{aligned} \tag{8}$$

W_a 和 $W_{s,k}$ 分别是描述到达过程和服务过程的、相互独立的标准布朗运动, Φ 和 Ψ 见 (5).

证明见文献 [11,13], 省略.

定理 5　假设服务强度 $\rho_1 = \rho_2 = 1$, 如果满足 $\mathsf{E}[u(1)^r] < \infty$, $\mathsf{E}[v_k(1)^r] < \infty$, $r > 2$, 则, $k = 1, 2$,

$$\|\mathscr{S} - \widetilde{\mathscr{S}}\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1}, \tag{9}$$

其中 $\widetilde{\mathscr{S}}(t) = \widetilde{Z}_1(t) + \widetilde{Z}_2(t)$.

证明:　首先指出, 如果 $\mathsf{E}[u(1)^r] < \infty$, $\mathsf{E}[v_k(1)^r] < \infty$, $r > 2$, 则存在相互独立的标准布朗运动 W_a, $W_{s,k}$, $k = 1, 2$, 满足

$$\begin{aligned} &\|A - \lambda \mathrm{e} - \lambda^{1/2} c_a W_a\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \|S_k - \mu_k \mathrm{e} - \mu_k^{1/2} c_{s,k} W_{s,k}\|_L = o(L^{1/r}), \\ &\Big\| V_k - \frac{1}{\mu_k}\mathrm{e} + \frac{1}{\mu_k^{1/2}} c_{s,k} W_{s,k}\Big(\frac{1}{\mu_k}\mathrm{e}\Big)\Big\|_L = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1}. \end{aligned} \tag{10}$$

通过 (3) 得

$$\begin{aligned}
&Z_2(t+Z_1(t)+v_1^*)\\
={}&V_2(Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)))-T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)\\
={}&\Big[V_2(Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)))\\
&-\frac{1}{\mu_2}Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\frac{1}{\mu_2}S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))\\
&+\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)))\Big)\Big]\\
&+\frac{1}{\mu_2}\big[Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Q}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)\big]\\
&+\frac{1}{\mu_2}\big[\widetilde{Q}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Q}_2(t+\overline{Z}_1(t))\big]+\frac{1}{\mu_2}\widetilde{Q}_2(t+\overline{Z}_1(t))\\
&+\frac{1}{\mu_2}\big[S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))-\mu_2T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))\big]\\
&+\frac{1}{\mu_2}\mu_2^{1/2}c_{s,2}\big[W_{s,2}(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))-W_{s,2}(\overline{T}_2(t+\overline{Z}_1(t)))\big]\\
&+\Big[\frac{1}{\mu_2}\mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(\overline{T}_2(t+\overline{Z}_1(t)))-\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(\mu_1(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))))\Big)\Big]\\
&-\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}\Big[W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(S_1(T_1(t+Z_1(t)+v_1^*)))\Big)-W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(\mu_1(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))))\Big)\Big],
\end{aligned}\tag{11}$$

当 $\rho_1=\rho_2=1$ 时, (11) 中第二个等号的第七项为 0, 即

$$\frac{1}{\mu_2}\mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(\overline{T}_2(t+\overline{Z}_1(t)))-\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(\mu_1(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))))\Big)=0.$$

(11) 中第二个等号的第一项, 因为对于足够大的 t, 有

$$\begin{aligned}
&Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))\\
={}&S_1(T_1(t+Z_1(t)+v_1^*))\leqslant A(t+Z_1(t)+v_1^*)\leqslant A(t+V_1(A(t))+v_1^*)\\
\leqslant{}&A\Big(t+\frac{1}{\mu_1}2\lambda t\Big)\leqslant 2\lambda\Big(t+\frac{1}{\mu_1}2\lambda t\Big)=2(\lambda+2\lambda\rho_1)t,\qquad\text{w.p.1},
\end{aligned}\tag{12}$$

所以通过 (10), 有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}\Big|V_2(Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)))\\
&-\frac{1}{\mu_2}Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\frac{1}{\mu_2}S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))\\
&+\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)+S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)))\Big)\Big|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 2(\lambda+2\lambda\rho_1)L}\left|V_2(t)-\frac{1}{\mu_2}t+\frac{1}{\mu_2^{1/2}}c_{s,2}W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}t\Big)\right|=o(L^{1/r}),\qquad \text{w.p.1.} \tag{13}$$

对于 (11) 的第二个等号的第二项, 因为当 t 足够大时, $t+Z_1(t)+v_1^*\leqslant(1+2\rho_1)t$, 有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|Q_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Q}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant(1+2\rho_1)L}|Q_2(t)-\widetilde{Q}_2(t)|=o(L^{1/r}).$$

对于 (11) 第二个等号的第三项, 因为

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|(t+Z_1(t)+v_1^*)-(t+\overline{Z}_1(t))|=\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|Z_1(t)+v_1^*-\overline{Z}_1(t)|\\ \leqslant&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|Z_1(t)-\overline{Z}_1(t)|+\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|v_1^*|=O(\sqrt{L\ln\ln L}),\qquad\text{w.p.1,}\end{aligned}\tag{14}$$

有

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\widetilde{Q}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Q}_2(t+\overline{Z}_1(t))|\\
=&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\Phi(\widetilde{X}_2)(t+Z_1(t)+v_1^*)-\Phi(\widetilde{X}_2)(t+\overline{Z}_1(t))|\\
\leqslant&\,2\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\widetilde{X}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{X}_2(t+\overline{Z}_1(t))|\\
\leqslant&\,2\mu_1\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\widetilde{I}_1(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{I}_1(t+\overline{Z}_1(t))|\\
&+2\sup_{0\leqslant t\leqslant L}\mu_1^{1/2}c_{s,1}|W_{s,1}(\overline{T}_1(t+Z_1(t)+v_1^*))-W_{s,1}(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t)))|\\
&+2\sup_{0\leqslant t\leqslant L}\mu_2^{1/2}c_{s,2}|W_{s,2}(\overline{T}_2(t+Z_1(t)+v_1^*))-W_{s,2}(\overline{T}_2(t+\overline{Z}_1(t)))|\\
=&\,2\mu_1\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\Psi(\widetilde{X}_1)(t+Z_1(t)+v_1^*)-\Psi(\widetilde{X}_1)(t+\overline{Z}_1(t))|\\
&+2\mu_1^{1/2}c_{s,1}\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|W_{s,1}(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_{s,1}(t+\overline{Z}_1(t))|\\
&+2\mu_2^{1/2}c_{s,2}\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|W_{s,2}(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_{s,2}(t+\overline{Z}_1(t))|,\end{aligned}$$

上述方程第二个等号的第二项和第三项, 根据 (14) 和文献 [11] 中引理 6.21, 得

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|W_{s,1}(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_{s,1}(t+\overline{Z}_1(t))|=o(L^{1/r}),\qquad\text{w.p.1,}\\
&\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|W_{s,2}(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_{s,2}(t+\overline{Z}_1(t))|=o(L^{1/r}),\qquad\text{w.p.1,}\end{aligned}$$

并且第二个等号的第一项

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|\Psi(\widetilde{X}_1)(t+Z_1(t)+v_1^*)-\Psi(\widetilde{X}_1)(t+\overline{Z}_1(t))|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant L} |\widetilde{X}_1(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{X}_1(t+\overline{Z}_1(t))| \\
&\leqslant \lambda^{1/2}c_a \sup_{0\leqslant t\leqslant L} |W_a(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_a(t+\overline{Z}_1(t))| \\
&\quad + \mu_1^{1/2}c_{s,1} \sup_{0\leqslant t\leqslant L} |W_{s,1}\overline{T}_1(t+Z_1(t)+v_1^*)-W_{s,1}\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))| \\
&= o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1.}
\end{aligned}
$$

根据 (14) 式, 且 $\overline{T}_1(t)=t$, 对于所有的 $t\geqslant 0$, 有

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant L} |\widetilde{Q}_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Q}_2(t+\overline{Z}_1(t))| = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1.} \tag{15}
$$

对于式 (11) 的第二个等号的第五项, 因为当 t 足够大时,

$$
t+Z_1(t)+v_1^* \leqslant t+V_1(A(t))+v_1^* \leqslant 2(1+\rho_1)t, \qquad \text{w.p.1,} \tag{16}
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant L} |S_2(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)) - \mu_2 T_2(t+Z_1(t)+v_1^*) - \mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*))| \\
\leqslant &\sup_{0\leqslant t\leqslant 2(1+\rho_1)L} |S_2(T_2(t))-\mu_2T_2(t)-\mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(T_2(t))| \\
\leqslant &\sup_{0\leqslant t\leqslant 2(1+\rho_1)L} |S_2(t)-\mu_2 t-\mu_2^{1/2}c_{s,2}W_{s,2}(t)| = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1.}
\end{aligned} \tag{17}
$$

对于式 (11) 的第二个等号的第六项, 根据 (14) 和文献 [11] 中引理 6.21, 有

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant L} |W_{s,2}(T_2(t+Z_1(t)+v_1^*)) - W_{s,2}(\overline{T}_2(t+\overline{Z}_1(t)))| = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1.} \tag{18}
$$

同理, (11) 的第二个等号的第八项, 可通过文献 [11] 中的引理 6.21 和

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant L} \Big|\frac{1}{\mu_2}(S_1(T_1(t+Z_1(t)+v_1^*))) - \frac{1}{\mu_2}(\mu_1(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))))\Big| = O(\sqrt{L\ln\ln L}\,), \qquad \text{w.p.1,}
$$

得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant t\leqslant L} \Big|W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(S_1(T_1(t+Z_1(t)+v_1^*)))\Big) - W_{s,2}\Big(\frac{1}{\mu_2}(\mu_1(\overline{T}_1(t+\overline{Z}_1(t))))\Big)\Big| \\
&= o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1.}
\end{aligned} \tag{19}
$$

综合 (11), (13), (15), (17), (18) 和 (19), 得

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant L} |Z_2(t+Z_1(t)+v_1^*) - \widetilde{Z}_2(t+\overline{Z}_1(t))| = o(L^{1/r}), \qquad \text{w.p.1,}
$$

其中, 因为 $\rho_1=\rho_2=1$ 时 $\overline{Z}_1(t)=0$, 所以 $\widetilde{Z}_2(t+\overline{Z}_1(t))=\widetilde{Z}_2(t)$.

结合 (3) 和引理 4,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{S}-\widetilde{\mathscr{S}}\|_L&=\|\mathscr{S}-\widetilde{Z}_1-\widetilde{Z}_2\|_L\\&\leqslant\|Z_1-\widetilde{Z}_1\|_L+\sup_{0\leqslant t\leqslant L}|Z_2(t+Z_1(t)+v_1^*)-\widetilde{Z}_2(t)|+v_1^*+v_2^*\\&=o(L^{1/r}),\qquad \text{w.p.1},\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\mathscr{S}}=\widetilde{Z}_1+\widetilde{Z}_2$. $\square$

§4. 小　结

本文考虑了两服务台串联排队, 证明了重话务条件 (即服务强度 $\rho_1=\rho_2=1$) 下逗留时间的强逼近. 逗留时间的强逼近依赖于负荷过程, 进而依赖于队长, 忙期和闲期过程的流逼近和强逼近, 证明过程中我们没有对队长, 忙期和闲期过程的流逼近和强逼近做过多详述, 而是直接基于前人的结果给出证明. 另外需要指出的是, 我们仅仅考虑重话务临界态 $\rho_1=\rho_2=1$ 的情况, 对于其他情况, 我们指出上述证明过程不适用.

参 考 文 献

[1] HARRISON J M. Brownian models of queueing networks with heterogeneous customer populations [M] // FLEMING W, LIONS P L. (eds.) *Stochastic Differential Systems, Stochastic Control Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag, 1988: 147–186.

[2] BLANC J P C, IASNOGORODSKI R, NAIN P. Analysis of the M/Gi/1 → /M/1 queueing model [J]. *Queueing Syst*, 1988, **3(2)**: 129–156.

[3] GUO Y J, LI Z Z. Asymptotic variability analysis for a two-stage tandem queue, part I: the functional law of the iterated logarithm [J]. *J Math Anal Appl*, 2017, **450(2)**: 1479–1509.

[4] GUO Y J, LI Z Z. Asymptotic variability analysis for a two-stage tandem queue, part II: the law of the iterated logarithm [J]. *J Math Anal Appl*, 2017, **450(2)**: 1510–1534.

[5] HARRISON J M. Assembly-like queues [J]. *J Appl Probab*, 1973, **10(2)**: 354–367.

[6] GUO Y J, LEFEBER E, NAZARATHY Y, et al. Stability of multi-class queueing networks with infinite virtual queues [J]. *Queueing Syst*, 2014, **76(3)**: 309–342.

[7] CHEN H, MANDELBAUM A. Discrete flow networks: bottleneck analysis and fluid approximation [J]. *Math Oper Res*, 1991, **16(2)**: 408–446.

[8] WHITT W. Fluid models for multiserver queues with abandonments [J]. *Oper Res*, 2006, **54(1)**: 37–54.

[9] LIU Y A, WHITT W. The $G_t/GI/s_t+GI$ many-server fluid queue [J]. *Queueing Syst*, 2012, **71(4)**: 405–444.

[10] DAI J G. On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: a unified approach via fluid limit models [J]. *Ann Appl Probab*, 1995, **5(1)**: 49–77.

[11] CHEN H, YAO D D. *Fundamentals of Queueing Networks: Performance, Asymptotics, and Optimization* [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

[12] ZHANG H Q, XU G H. Strong approximations for the open queueing network in heavy traffic [J]. *Sci China Ser A*, 1992, **35(5)**: 521–535.

[13] CHEN H, SHEN X Y. Strong approximations for multiclass feedforward queueing networks [J]. *Ann Appl Probab*, 2000, **10(3)**: 828–876.

[14] GLYNN P W, WHITT W. A new view of the heavy-traffic limit theorem for infinite-server queues [J]. *Adv Appl Probab*, 1991, **23(1)**: 188–209.

[15] CHEN H. MANDELBAUM A. Hierarchical modeling of stochastic networks, part II: strong approximations [M] // YAO D D. (ed.) *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*. New York: Springer-Verlag, 1994: 107–131.

[16] 郭永江, 黄军飞. 带有反馈机制的单服务台排队系统的泛函重对数律 [J]. 应用数学学报, 2012, **35(4)**: 586–594.

Strong Approximation of the Sojourn Time for a Two-Stage Tandem Queue

GUO Yongjiang

(*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing, 100876, China*)

ZHANG Yuyan

(*Shanghai Police College, Shanghai, 200137, China*)

Abstract: We obtain the strong approximation of the sojourn time progress for a two-stage tandem queue in heavy traffic, that is, the traffic intensity $\rho_1 = \rho_2 = 1$. The sojourn time is the period from a customer's arrival to her departure, and the strong approximation is a function of Brownian motion.

Keywords: two-stage tandem queue; fluid approximation; strong approximation; Brownian motion

2010 Mathematics Subject Classification: 60K25; 90B22