

基于时间变换和分数型过程下的期权定价及模拟分析*

郭精军* 宋彦玲

(兰州财经大学统计学院, 兰州, 730020)

摘要: 由布朗运动驱动的期权定价模型是最为经典的模型, 但该模型不能准确地描述资产价格的长相依性和短时间的不变性. 本文提出了时间变换下的次分数布朗运动支付红利期权定价模型. 首先, 建立了次分数布朗运动扩散 B-S 模型, 获得了带红利的欧式期权定价公式. 其次, 利用金融实际数据进行统计模拟, 研究表明新模型能够反映金融资产真实值.

关键词: 期权定价; 次分数布朗运动; 时间变换; 统计模拟

中图分类号: F830.59; O211.6

英文引用格式: GUO J J, SONG Y L. Option pricing based on time-transform and fractional process and simulation analysis [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(1): 59–70. (in Chinese)

§1. 引言

期权定价是金融工程研究的核心内容之一. 自 1973 年经典 Black-Scholes (简记为 B-S)^[1] 期权定价模型建立之后, 该模型成了期权定价最普遍的方法之一. 在该模型中通常假设股票价格 $X(t)$ 服从几何布朗运动, 即

$$X(t) = X(0) \exp\{(\mu - q)t + \sigma B(t)\}, \quad X(0) = X_0 > 0, \quad (1)$$

其中, $B(t)$ 是标准布朗运动, μ 表示股票的期望回报率, q 是红利率以及波动项系数 σ . $X(t)$ 也可由如下方程的解给出

$$dX(t) = \left(\mu - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad X(0) = X_0 > 0. \quad (2)$$

B-S 模型被广泛应用于金融市场, 然而近年来对资本市场的大量实证研究表明: 金融资产的对数收益率并非服从正态分布, 而是服从一种“尖峰厚尾”的分布; 资产价格存在长记忆性和自相似性等特征. 因此, 一些学者引入分数过程对 B-S 模型进行了改进. 首先, 提出了用分数布朗运动来刻画金融资产的价格^[2]

$$X(t) = X(0) \exp\{(\mu - q)t + \sigma B_H^t\}, \quad X(0) = X_0 > 0,$$

*国家自然科学基金项目 (批准号: 71561017、71961013) 资助.

*通讯作者, E-mail: guojj@lzufe.edu.cn.

本文 2018 年 5 月 11 日收到, 2018 年 12 月 12 日收到修改稿.

其中, μ , q 和 σ 的定义同 (1) 式, $B_H(t)$ 是赫斯特指数 $H \in (1/2, 1)$ 的标准分数布朗运动. 不过, 应用分数 B-S 模型到金融市场时会产生套利机会^[3] 或自融资策略不符合经济学理论^[4]. 其次, 学者又引进次分数布朗运动来对分数 B-S 模型进行改进^[5], 即用次分数布朗运动代替 (1) 式中的布朗运动得到如下次分数 B-S 模型

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(0) \exp\{(\mu - q)t + \sigma \xi_H(t)\}, \quad \bar{X}_0 > 0, \quad (3)$$

或表示为

$$d\bar{X}(t) = [\mu - q + H\sigma^2(2 - 2^{2H-1})t^{2H-1}]\bar{X}(t)dt + \sigma\bar{X}(t)d\xi_t^H, \quad \bar{X}_0 > 0, \quad (4)$$

(3)、(4) 式中 $\xi_H(t)$ 表示赫斯特指数 $H \in (1/2, 1)$ 的次分数布朗运动. 事实上, 次分数布朗运动不仅保持了分数布朗运动的自相似性、长记忆性等性质, 而且较分数布朗运动有更快的退化速度^[6]. 从而, (3) 式的解能更好的刻画资产价格.

虽然上述改进后的 B-S 模型克服了传统 B-S 模型的一些不足, 但又遇到了一些新问题. 一些学者发现金融市场标的资产价格会在某些较短的持续时间内变动很小, 或者保持不变^[7]. 该现象在投资者和交易量数目都比较少的新生市场尤为明显. 为此文献 [8] 引入了时间变换过程来解决该问题, 即利用扩散几何布朗运动模型 $X_\alpha = X(T_\alpha(t))$ 来刻画资产价格变化过程中出现的价格保持不变的持续时间, 其中 $X(\tau)$ 满足 (1) 式, $T_\alpha(t)$ 是参数 $\alpha \in (0, 1)$ 的逆稳定从属子. 同时, 经典的 B-S 模型中, 假设资产是不支付红利的, 但现实中每次股票交易都需支付红利.

为解决上述问题, 在充分考虑传统的 B-S 期权定价模型的不足和借鉴最近研究成果的基础上, 本文提出了具有时间变换的次分数 B-S 欧式期权定价模型, 即

$$S_t = \bar{X}(T_\alpha(t)) = S_0 \exp\{(\mu - q)T_\alpha(t) + \sigma \xi_H(T_\alpha(t))\}, \quad S_0 = \bar{X}(0) > 0. \quad (5)$$

行文安排如下: 第 2 部分在介绍有关时间变换的次分数布朗运动 B-S 模型性质的基础上, 给出几个必要引理; 第 3 部分中研究离散时间环境下带红利的欧式期权定价公式. 最后一部分利用金融数据和统计模拟方法分析新模型的有效性.

§2. 时间变换的次分数布朗运动

假设 $U_\alpha(\tau)$ 表示 α -稳定从属子, 本文考虑的时间变换过程 $T_\alpha(t)$ 是 $U_\alpha(\tau)$ 的逆过程, 即 $T_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t\}$. $U_\alpha(\tau)$ 是严格单调递增 α 平稳 Lévy 过程^[9], 并且有拉普拉斯变换 $E(e^{-uU_\alpha(\tau)}) = e^{-\tau u^\alpha}$, 稳定指数 $\alpha \in (0, 1)$. $U_\alpha(\tau)$ 和 $T_\alpha(t)$ 分别是 $1/\alpha$ 和 α 自相似过程, 即对 $\forall c > 0$, $U_\alpha(ct) \stackrel{d}{=} c^{1/\alpha}U_\alpha(t)$, $T_\alpha(t) \stackrel{d}{=} c^\alpha T_\alpha(t)$, 这里 “ $\stackrel{d}{=}$ ” 表示有相同的有限维分布. 特别地, 当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, $T_\alpha(t)$ 退化为客观时间 t , 本文讨论 α 不趋近于 1 的情况.

对 $\forall n \in N$, 有 $E[T_\alpha^n(t)] = t^{n\alpha}n!/\Gamma(n\alpha + 1)$ ^[10]. 从而有

$$E[\Delta T_\alpha(t)] = E[T_\alpha(t + \Delta t) - T_\alpha(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}[(t + \Delta t)^\alpha - t^\alpha] = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta t.$$

假设分数布朗运动 $B_H(t)$ 与时间变换过程 $T_\alpha(t)$ 相互独立, 则由文献 [11,12] 知

$$\mathbb{E}\{[\Delta B_H(T_\alpha(t))]^2\} = \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{2H} (\Delta t)^{2H}.$$

考虑从属过程 $Z_{\alpha,H}(t) = \zeta_H(T_\alpha(t))$, 其中 $\zeta_H(\tau)$ 是次分数布朗运动, 并假设 $T_\alpha(t)$ 独立于 $\zeta_H(\tau)$, 得到扩散过程 $Z_{\alpha,H}(t)$.

下面介绍几个有关 α -稳定从属子增量以及次分数扩散过程的引理.

引理 1 [13-15] 对 $\forall \varepsilon \in (0, \alpha H)$, 有 $\Delta T_\alpha(t) = o(\Delta t^{\alpha-\varepsilon})$, $\Delta M_{\alpha,H}(t) = o(\Delta t^{\alpha H-\varepsilon})$, 且对 $\forall n \in N, 0 \leq s < t < \infty$, 都有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|T_\alpha(t) - T_\alpha(s)|^n] &\leq \frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} (t-s)^{\alpha n}, \\ \mathbb{E}[|M_{\alpha,H}(t) - M_{\alpha,H}(s)|^n] &\leq (n-1)!! \left[\frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)}\right]^H (t-s)^{H\alpha n}, \end{aligned}$$

这里的 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数, $M_{\alpha,H}(t) = B_H(T_\alpha(t))$. 当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, $T_\alpha(t)$ 和 $M_{\alpha,H}(t)$ 分别退化为 t 和 $B_H(t)$, 有 $\mathbb{E}[\Delta M_{1,H}(t)] = \sqrt{2/\pi} \Delta t^H$, 从而得 $\mathbb{E}[\Delta M_{\alpha,H}(t)] = \sqrt{2/\pi} (\Delta T_\alpha(t))^H$.

引理 2 令 $\alpha \in (1/2, 1)$, $n \in N$, 对任意的正数 $a \neq 1$ 和 $T \in R$, 都有 $a^{|M_{\alpha,H}(t)|n}$ 存在, 并且 $a^{|M_{\alpha,H}(t)|n}$ 与 n 的次序无关在 $t \in [0, T]$ 上一致有界.

引理 3 [16] 对 $\forall x, y \in R, x \geq 0$ 且 $y \geq 0$, 若 $1 \leq n < \infty, n \in N$, 则

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

§3. 带红利的欧式期权定价

该部分给出了次分数布朗运动驱动的欧式期权定价模型及其验证过程. 先给出一个重要的引理和一些必要的市场假设.

引理 4 对 $\forall 0 < \varepsilon < H\alpha$, 有 $\Delta Z_{\alpha,H}(t) = o(\Delta t^{H\alpha-\varepsilon})$. 对 $\forall n \in N, 0 \leq s < t < +\infty$, 都有

$$\mathbb{E}[|Z_{\alpha,H}(t) - Z_{\alpha,H}(s)|^n] \leq 2^{n/2} (n-1)!! \left[\frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)}\right]^H (t-s)^{H\alpha n}.$$

证明: 由文献 [16] 知次分数布朗运动 $\xi^H = \{\xi_t^H; t \geq 0\}$ 可由分数布朗运动 B_H^t 表示出来, 即 $\xi_t^H = (B_H^t + B_H^{-t})/\sqrt{2}$, 再根据引理 2 和引理 3 得

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[|Z_{\alpha,H}(t) - Z_{\alpha,H}(s)|^n] \\ &= \mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}[B_H(T_\alpha(t)) + B_H(T_\alpha(-t))] - \frac{1}{\sqrt{2}}[B_H(T_\alpha(s)) + B_H(T_\alpha(-s))]\right|^n\right\} \\ &\leq 2^{-n/2} \mathbb{E}\{[|B_H(T_\alpha(t)) - B_H(T_\alpha(s))| + |B_H(T_\alpha(-t)) - B_H(T_\alpha(-s))|]^n\} \\ &\leq 2^{-n/2} 2^{n-1} \mathbb{E}\{[|B_H(T_\alpha(t)) - B_H(T_\alpha(s))|]^n + [|B_H(T_\alpha(-t)) - B_H(T_\alpha(-s))|]^n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{n/2-1}(n-1)!! \left[\frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} \right]^H (t-s)^{H\alpha n} + 2^{n/2-1}(n-1)!! \left[\frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} \right]^H (-s-(-t))^{H\alpha n} \\ &= 2^{n/2}(n-1)!! \left[\frac{n!}{\Gamma^n(\alpha+1)} \right]^H (t-s)^{H\alpha n}. \end{aligned}$$

特别地, 当 $n = 1, t - s = \Delta t \rightarrow 0$ 时,

$$Z_{\alpha,H}(t) - Z_{\alpha,H}(s) = \Delta Z_{\alpha,H}(t) = o(\Delta t^{H\alpha-\varepsilon}).$$

证毕. \square

为得到新的欧式期权定价公式, 做如下四点假设:

(a) 时刻 t 时的标的股票价格 S_t 可以根据式 (5) 表示如下

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - q)T_\alpha(t) + \sigma Z_{\alpha,H}(t)\}, \quad S_0 > 0, \quad (6)$$

这里的 S_0, μ, q 和 σ 都是常数, $T_\alpha(t)$ 是参数 $\alpha \in (1/2, 1)$ 的逆稳定从属子, $Z_{\alpha,H}(t) = \xi_t^H(T_\alpha(t))$ 表示赫斯特指数 $H \in (1/2, 1)$ 的次扩散过程;

(b) 股票是连续支付红利的, 但不考虑交易费用; 所有的债券完全可分, 且在短期利率下允许买空和卖空; 该模型与 B-S 模型的资产评估政策相同;

(c) 构造买入一份期权 V 和卖空 X_t 份股票 S 的资产组合 Π , 即 $\Pi = V - XS$, $Q(t)$ 表示无风险资产的价格, 且 $Q(t)$ 满足随机微分方程 $dQ(t) = rQ_t dt$, r 为无风险利率; 假设市场是风险中性的;

(d) 每间隔 Δt 投资组合调整一次, 这里 Δt 是固定的足够小的时间间隔.

令 $V = V(t, S_t)$ 是 t 时刻欧式期权的价格, 设到期时间为 T , 执行价格为 K , 且 $V(t, S_t)$ 的各阶偏微分都是连续函数. 基于上面的假设 (a)–(d), 可以得到下面的定理.

定理 5 若股票在 t 时刻的价格 S_t 满足 (6) 式, 则与此对应的带红利欧式期权的价格 $V = V(t, S_t)$ 满足偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0. \quad (7)$$

在边界条件 $V(T, S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ 下, 则带红利的欧式看涨期权定价公式为

$$V(t, S_t) = e^{-q(T-t)} S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \quad (8)$$

其中, T 表示到期日, K 表示执行价格, $\Phi(\cdot)$ 表示累积正态密度函数,

$$d_t = \frac{\ln(S_t/K) + [r + \tilde{\sigma}(t)^2/2](T-t)}{\tilde{\sigma}(t)\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}(t)\sqrt{T-t}, \quad (9)$$

$$\tilde{\sigma}(t)^2 = \sigma^2 W_{\alpha,H}(t, \Delta t) \Delta t^{-1}. \quad (10)$$

证明: 考虑 S_t 在间隔为 Δt 的区间 $[t, t + \Delta t]$ 上的变化量 ΔS_t , 利用 Wick-Itô 积分得

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\{(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma[\xi_H(T_\alpha(t + \Delta t)) - \xi_H(T_\alpha(t))]\}, \quad (11)$$

则由 (11) 式以及指数函数的泰勒级数得

$$\begin{aligned} \Delta S_t &= S_{t+\Delta t} - S_t \\ &= S_t(e^{(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)} - 1) \\ &= S_t\left\{(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t) + \frac{1}{2}[(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)]^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{6}S_t e^{\theta(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\theta\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)}[(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)]^3, \end{aligned}$$

其中 $\theta(t, \Delta t) \in (0, 1)$ 是对应于过程 S_t 的随机变量.

根据高阶无穷小的性质以及引理 1、引理 2 和引理 4, 有

$$\begin{aligned} [(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)]^3 &= [o(\Delta t^{\alpha-\varepsilon}) + o(\Delta t^{H\alpha-\varepsilon})]^3 \\ &= o(\Delta t^{3H\alpha-3\varepsilon}). \end{aligned} \quad (12)$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}e^{\theta(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\theta\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)} &\leq \frac{1}{6}e^{(\mu-q)T_\alpha(T)}e^{\sigma|Z_{\alpha,H}(t)|} \\ &\leq \frac{1}{6}e^{(\mu-q)T_\alpha(T)}e^{\sigma|Z_{\alpha,H}(t)|}e^{\sigma|Z_{\alpha,H}(t+\Delta t)|}. \end{aligned}$$

又对 $\forall n \in N$, 有

$$\begin{aligned} E(e^{n(\mu-q)T_\alpha(T)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n(\mu-q)]^k}{k!} E[T_\alpha(T)^k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n(\mu-q)]^k}{k!} \frac{k!T^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \\ &= E_{\alpha,1}(n(\mu-q)T^\alpha) < +\infty, \end{aligned} \quad (13)$$

这里 $E_{\alpha,1}(\cdot)$ 表示 Mittag-Leffler 函数, 且有 $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \{z^k / [\Gamma(k\alpha + \beta)]\}$.

由引理 1、引理 2 和引理 4 以及 (12) 和 (13) 式得

$$\Delta t^{2\varepsilon} \frac{1}{6}e^{\theta(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\theta\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)} = o(\Delta t^\varepsilon),$$

从而有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6}e^{\theta(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\theta\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)}[(\mu - q)\Delta T_\alpha(t) + \sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)]^3 \\ &= \Delta t^{-2\varepsilon} o(\Delta t^\varepsilon) o(\Delta t^{3H\alpha-3\varepsilon}) = o(\Delta t). \end{aligned}$$

进一步得

$$\Delta S_t = (\mu - q)S_t \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t \Delta Z_{\alpha,H}(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + o(t). \quad (14)$$

同理

$$\begin{aligned} (\Delta S_t)^2 &= S_t^2 (e^{2(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+2\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)} - 2e^{(\mu-q)\Delta T_\alpha(t)+\sigma\Delta Z_{\alpha,H}(t)} + 1) \\ &= S_t^2 \sigma^2 (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + o(\Delta t^{H\alpha+\alpha-2\varepsilon}) \\ &= S_t^2 \sigma^2 (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (15)$$

运用泰勒级数将 $V(t, S_t)$ 展开有

$$\begin{aligned} \Delta V(t, S_t) &= \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S_t} \Delta S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \Delta S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S_t} \Delta t \Delta S_t + o(\Delta t^{3H\alpha-\varepsilon}) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S_t} \Delta S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \Delta S_t^2 + o(t), \end{aligned}$$

将 (14) 和 (15) 式代入上式得

$$\begin{aligned} \Delta V(t, S_t) &= \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + (\mu - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \Delta T_\alpha(t) + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \Delta Z_{\alpha,H}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (16)$$

构建一个买入一份期权 V 和卖空 X_t 份股票 S 的资产组合 Π , 即

$$\Delta \Pi_t = V - X_t S,$$

从而, 依据假设 (b) 和 (c) 得到时间段 $[t, t + \Delta t]$ 内投资组合的变化量

$$\Delta \Pi_t = \Delta V - X_t \Delta S_t - X_t q S_t + o(t). \quad (17)$$

股票的份数 X_t 在时间间隔 Δt 内是确定的, 且 $X_t = \partial V / \partial S_t$. 将 (14) 和 (16) 式代入 (17) 式有

$$\Delta \Pi_t = \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t - q S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (\Delta Z_{\alpha,H}(t))^2 + o(\Delta t). \quad (18)$$

选取适当的 X_t 使得资产组合 Π 在 $[t, t + \Delta t]$ 上是无风险的, 又无风险资产满足如下随机微分方程

$$\Delta Q(t) = rQ(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

从而

$$\Delta \Pi_t = r\Pi_t \Delta t + o(t) = r(V - X_t S_t) \Delta t + o(\Delta t), \quad (19)$$

为消除随机项的影响, 令 $X_t = \partial V / \partial S_t$. 再用 (19) 式减去 (18) 式有

$$\Pi_t - \Pi_t = \left(rV - rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + qS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 (\Delta Z_{\alpha, H}(t))^2 + o(\Delta t). \quad (20)$$

最后, 依据等式 (20) 可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta \Pi_t - \Delta \Pi_t) \\ &= \left[rV - (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 (\Delta t)^{-1} W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) \right] \Delta t \\ &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

这里 $W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) = \mathbb{E}[\Delta Z_{\alpha, H}(t)]^2$. 因为 $B_H(t)$ 与 $T_\alpha(t)$ 相互独立, 再根据分数布朗运动 $B_H(t)$ 的平稳增量性以及协方差函数, 得到

$$\begin{aligned} & W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) \\ &= \mathbb{E}[\Delta Z_{\alpha, H}(t)]^2 \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2} [\Delta B_H(T_\alpha(t))]^2 + \frac{1}{2} [\Delta B_H(T_\alpha(-t))]^2 + \Delta B_H(T_\alpha(t)) \Delta B_H(T_\alpha(-t)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} (\Delta t)^{2H} + \frac{1}{2} \left[\frac{(-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} (\Delta t)^{2H} - \mathbb{E}[\Delta B_H(T_\alpha(t)) \Delta B_H(T_\alpha(-t))] \\ &= \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} (\Delta t)^{2H} - \text{Cov} [\Delta B_H(T_\alpha(t)) \Delta B_H(T_\alpha(-t))] - \mathbb{E}[\Delta M_{\alpha, H}(t)] \mathbb{E}[\Delta M_{\alpha, H}(-t)] \\ &= \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right]^{2H} (\Delta t)^{2H} - \frac{1}{2} \mathbb{E}[|\Delta T_\alpha(t)|^{2H} + |\Delta T_\alpha(-t)|^{2H} - |\Delta T_\alpha(t) - \Delta T_\alpha(-t)|^{2H}] \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \mathbb{E}[\Delta T_\alpha(t)^H] \mathbb{E}[\Delta T_\alpha(-t)^H]. \end{aligned}$$

从而, 由 (21) 式得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 (\Delta t)^{-1} W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) - rV = 0.$$

令

$$[W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) \Delta t^{-1}]^{1/2} \sigma = \tilde{\sigma}(t), \quad \tilde{\sigma}(t)^2 = W_{\alpha, H}(t, t + \Delta t) \Delta t^{-1} \sigma^2.$$

显然, $\tilde{\sigma}(t)$ 在时间区间 $[t, t + \Delta t)$ 确定时仍为常数, 从而得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}(t)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - rV = 0.$$

根据热传导方程经典解理论, 解得

$$V(t, S_t) = e^{-q(T-t)} S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2),$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + [r + \tilde{\sigma}(t)^2/2](T-t)}{\tilde{\sigma}(t)\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}(t)\sqrt{T-t},$$

证毕. \square

§4. 模拟分析

4.1 欠扩散过程的样本路径模拟

下面介绍如何对次分数欠扩散过程 $Y(t) = S(T_\alpha(t))$ 的样本变化路径进行数值模拟. 最核心的方法是基于 $Y(t)$ 的从属定义, $Y(t)$ 轨迹上的每一点都是由相互独立的 $S(\tau)$ 和 $T_\alpha(t)$ 叠加而得到. 假设在区间 $[0, T]$ 上模拟 $Y(t)$ 的轨迹, 则模拟步骤如下:

第一步, 用以下近似过程来逼近逆从属子 $T_\alpha(t)$ 的轨迹,

$$T_{\alpha, \Delta t}(t) = [\min\{n \in N : U_\alpha(n\Delta t) > t\} - 1]\Delta t, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

其中 Δt 是步长, $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 满足 $\sup_{t \in [0, T]} |T_{\alpha, \Delta t}(t) - T_\alpha(t)| \leq \Delta t$. 因此选择的步长越小, 近似结果就越好. 由 (22) 式可知, 要对 $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 进行数值模拟, 先生成 $U_\alpha(n\Delta t)$, 而该过程可通过迭加勒维过程 $U_\alpha(t)$ 的独立平稳增量来得到

$$U_\alpha(0) = 0,$$

$$U_\alpha(n\Delta t) = U_\alpha([n-1]\Delta t) + U_n,$$

这里 U_i 是互相独立的 α -稳定随机变量, 且都有相同的 Laplace 变换 $E(e^{-kU_i}) = e^{-k^\alpha \Delta t}$.

于是 U_i 可表达为

$$U_n = (\Delta t)\zeta_n,$$

其中 $\zeta_n, n \in N$, 独立同分布,

$$\zeta_n = \frac{\sin(\alpha(V + c_1))}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left[\frac{\cos(V - \alpha(V + c_1))}{W} \right]^{(1-\alpha)/\alpha},$$

这里 $c_1 = \pi/2$, V 是服从均匀分布的随机变量, 有 $V \sim U[-\pi/2, \pi/2]$, W 是服从指数分布的随机变量. 对 $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 样本路径的近似逼近是有效的, 因为 $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 的近似过程其实就是一个连续时间的随机游走, 每次跳跃的步长为 Δt , 第 i 次的持续时间由 U_i 给出.

第二步, 对随机微分方程

$$dS(\tau) = [\mu + H(2 - 2^{2H-1})\sigma^2\tau_{k-1}^{2H-1}]S(\tau)d\tau + \sigma S(\tau)d\xi^H(\tau)$$

给出的扩散过程进行模拟. 由第一步近似模拟的 $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 只取这些值: $k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N$. $N = T_{\alpha, \Delta t}(t)/\Delta t$. 故必须在时间点 $\tau_k = k\Delta t$ ($k = 0, 1, \dots, N$) 上对扩散过程 $S(\tau)$ 进行近似模拟, 该步骤可依据欧拉方法完成, 即

$$S(0) = 0,$$

$$S(\tau_k) = S(\tau_{k-1}) \left\{ 1 + [\mu + H(2 - 2^{2H-1})\sigma^2\tau_{k-1}^{2H-1}]\Delta t + \sigma\varepsilon_k \sqrt{2H(2 - 2^{2H-1})\tau_{k-1}^{2H-1}\Delta t} \right\},$$

这里 $\varepsilon_k \sim N(0, 1)$, 是相互独立的标准正态随机变量.

第三步, 运用线性内插法将第一步得到的 $T_{\alpha, \Delta t}(t)$ 的近似轨迹, 与第二步得到的 $S(\tau)$ 的近似轨迹叠加在一起, 最终得到次分数欠扩散过程 $Y(t) = S(T_{\alpha}(t))$ 的近似轨迹.

根据图 1 和图 2 可以看出, 次分数欠扩散模型确实能对标的资产在较短时间内出现的价格变动很小, 甚至保持不变的情况进行较好描述. 与次分数 B-S 模型的轨迹相比, 次分数从属扩散能够捕获资产价格保持不变的一些时间段, 而这正是新兴金融市场的特征. 利用逆从属子, 可以将资产价格所具有的后尾特征描述出来, 这里假设 $\alpha = 0.8$, $\mu = 0.0002$, $H = 0.83$, $S_0 = 8.46$.

基于次分数布朗运动的扩散运动

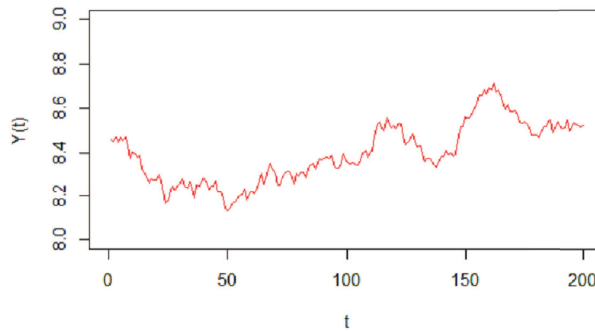


图 1 标准扩散路径图

基于次分数布朗运动的从属扩散

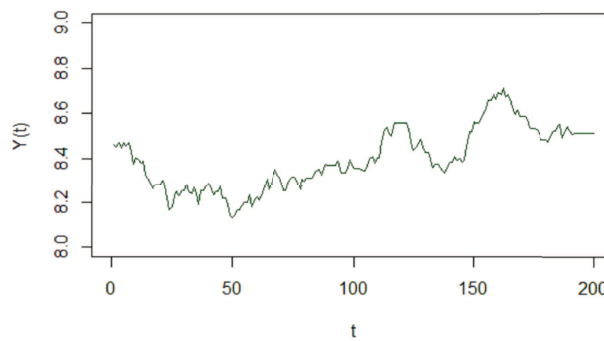


图 2 从属扩散路径图

4.2 参数估计

选取上证 50ETF 在 2016 年 10 月 19 日到 2017 年 12 月 21 日的历史数据 (总共有 290 个交易数据), 先对模型中的未知参数 μ 、 σ 与 H 分别进行估计. 记收集到的 $X + 1$ 个标的资产的历史数据为

$$\{S_{-i\Delta t} = 1, 2, \dots, X, X + 1\},$$

时间间隔为 Δt . 对标的资产价格方程进行离散化^[17], 得

$$\begin{aligned} & S_{t+(i+1)\Delta t} - S_{t+i\Delta t} \\ &= \mu S_{t+i\Delta t} \Delta t + \sigma S_{t+i\Delta t} \varepsilon_1 \sqrt{2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\Delta t}, \quad t = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (23)$$

由于标的资产的收益率 R_t 满足

$$R_t = \frac{S_{t+(i+1)\Delta t} - S_{t+i\Delta t}}{S_{t+i\Delta t}} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\Delta t},$$

故有

$$R_t \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 2Ht^{2H-1}(2 - 2^{2H-1})\Delta t). \quad (24)$$

基于收集到的 $X + 1$ 个标的资产的历史数据, 得到收益率 R_t 的 X 个样本

$$R_i = \frac{S_{-i\Delta t} - S_{-(i+1)\Delta t}}{S_{-(i+1)\Delta t}}, \quad i = 1, 2, \dots, X.$$

采用矩估计法得到期望回报率 μ 与波动率 σ 的估计量分别为

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{R}}{\Delta t}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{(X-1)\Delta t} \sum_{i=1}^X (R_i - \bar{R})^2},$$

其中, $\bar{R} = X^{-1} \sum_{i=1}^X R_i$ 是 R_i 的样本均值. 将 $X + 1$ 个历史数据带入到参数的估计量中, 得到其参数值 $\mu = 0.00056$, $\sigma = 0.0073$. 采用 R/S 算法得到赫斯特指数 H 的估计值为 0.76.

4.3 标的资产价格走势的模拟

基于离散化期权定价公式, 分别对服从次分数布朗运动和分数布朗运动的标的资产价格路径进行模拟, 令初始值 $i = 1$, 取标的资产上证 50ETF 在 2016 年 10 月 19 日的收盘价 2.279 元作为初值 S_t , 利用 R 语言求得 $S_{t+\Delta t}$, 再由 $S_{t+\Delta t}$ 得 $S_{t+2\Delta t}$, 依次类推, 直到 $S_{t+n\Delta t} = S_T$, 从而得到标的资产的离散时间序列 $\{S_{t+i\Delta t}, i = 1, 2, \dots, n\}$. 将这些模拟出的离散数据导入 Excel 软件, 最终模拟出标的资产的价格走势图. 同样将 290 个真实交易数据导入, 得到模型与真实值的变动比较图 3.

由图 3 可以看出, 次分数布朗运动驱动下的模型模拟出来的标的资产价格较分数布朗运动模型更加贴近真实值, 从而说明了该模型的有效性和必要性.

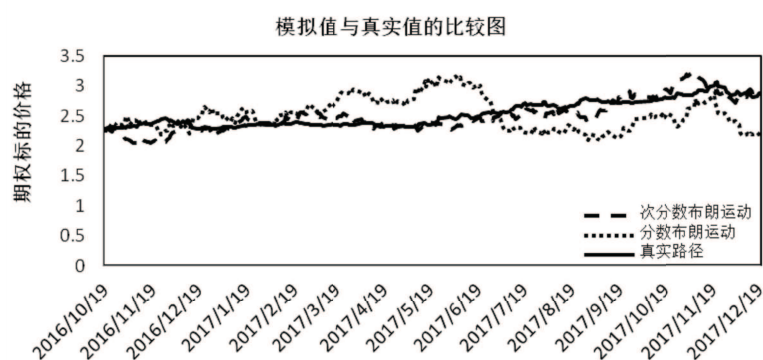


图 3 模型模拟的资产价格与真实价格走势比较图

§5. 结 束 语

考虑到金融市场不仅存在长记忆性, 而且在某段持续时间内资产价格可能保持稳定等因素, 经典 B-S 定价模型就显得具有一定的局限性了. 分数型过程的定价模型是 B-S 模型改进之一, 它既可体现资产的长相依性, 又可防止出现套利机会. 于是, 本文考虑了包含资产长相依性、支付红利等因素的期权定价扩展模型. 对次分数布朗运动下的标准扩散和欠扩散模型分别进行路径模拟, 发现该模型能够描述资产价格保持稳定的特点; 采用上证 50ETF 数据, 验证了所建立的模型是有效的. 新模型提供了刻画金融资产价格新方法, 可以很好解决金融资产的长相依问题, 又可以反映资产交易时需要支付红利的真实情况, 具有一定的现实意义.

参 考 文 献

- [1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *J Polit Econ*, 1973, **81(3)**: 637–654.
- [2] WANG X T, WU M, ZHOU Z M, et al. Pricing European option with transaction costs under the fractional long memory stochastic volatility model [J]. *Phys A*, 2012, **391(4)**: 1469–1480.
- [3] ROGERS L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion [J]. *Math Finance*, 1997, **7(1)**: 95–105.
- [4] BJÖRK T, HULT H. A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model [J]. *Finance Stoch*, 2005, **9(2)**: 197–209.
- [5] TUDOR C. Some properties of the sub-fractional Brownian motion [J]. *Stochastics*, 2007, **79(5)**: 431–448.
- [6] 肖炜麟, 张卫国, 徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价 [J]. *中国管理科学*, 2004, **22(5)**: 1–7.
- [7] 胡源龙. 基于调和欠扩散的 Black-Scholes 公式及其计算模拟 [D]. 广州: 华南理工大学, 2011.
- [8] MAGDZIARZ M. Black-Scholes formula in subdiffusive regime [J]. *J Stat Phys*, 2009, **136(3)**: 553–564.

- [9] 吴恒煜, 朱福敏, 胡根华, 等. 基于参数学习的 GARCH 动态无穷活动率 Lévy 过程的欧式期权定价 [J]. 系统工程理论与实践, 2014, **34**(10): 2465–2482.
- [10] GU H, LIANG J R, ZHANG Y X. Time-changed geometric fractional Brownian motion and option pricing with transaction costs [J]. *Phys A*, 2012, **391**(15): 3971–3977.
- [11] LIANG J R, WANG J, LÜ L J, et al. Fractional Fokker-Planck equation and Black-Scholes formula in composite-diffusive regime [J]. *J Stat Phys*, 2012, **146**(1): 205–216.
- [12] JANICKI A, WERON A. *Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes* [M]. New York: Marcel Dekker, 1994.
- [13] BOJDECKI T, GOROSTIZA L G, TALARCZYK A. Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times [J]. *Statist Probab Lett*, 2004, **69**(4): 405–419.
- [14] 郭精军, 张亚芳. 次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价 [J]. 应用数学, 2017, **30**(3): 503–511.
- [15] 程志勇, 郭精军, 张亚芳. 次分数布朗运动下支付红利的欧式期权定价 [J]. 应用概率统计, 2018, **34**(1): 37–48.
- [16] 方艳, 张元玺, 乔明哲. 上证 50ETF 期权定价有效性的研究: 基于 B-S-M 模型和蒙特卡罗模拟 [J]. 运筹与管理, 2017, **26**(8): 157–166.
- [17] 杨兴林, 王鹏. 基于时变波动率的 50ETF 参数欧式期权定价 [J]. 数理统计与管理, 2018, **37**(1): 162–178.

Option Pricing Based on Time-Transform and Fractional Process and Simulation Analysis

GUO Jingjun SONG Yanling

(School of Statistics, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou, 730020, China)

Abstract: Model of option pricing driven by Brownian motion is the most classical model. However, it can not describe long-term property and invariance in a short period of time of asset price. In this article, option pricing model driven by sub-fractional Brownian motion is studied under time-transform with dividend-paying. Firstly, the model of diffusion B-S model of sub-fractional Brownian motion is build, and get option pricing formula with dividends. Secondly, statistical simulation is used by real data in finance and show that new model can reflect real financial assets.

Keywords: option pricing; sub-fractional Brownian motion; time-transform; statistical simulation

2010 Mathematics Subject Classification: 60G22; 91G10; 91G60