

ESTAR-GARCH 模型的单位根检验^{*}

庞莹莹 陈振龙^{*} 郑昌梅 张巧艳

(浙江工商大学统计与数学学院, 杭州, 310018)

摘要: ESTAR-GARCH 模型的单位根检验所选取的统计量通常需要估计方差, 因此本文提出了经验似然比统计量, 避免了方差计算带来的误差, 并推导出了该统计量的极限分布. 通过模拟其临界值, 对比研究了经验似然比统计量和基于 QML 法的 KSS 型检验统计量 $t(\tilde{\delta})$ 的检验功效. Monte Carlo 模拟证实, 本文提出的经验似然比统计量比检验统计量 $t(\tilde{\delta})$ 具有更好的检验水平和更高的检验功效. 因此本文提出的统计量通过避免方差的计算而提高了检验的准确性. 最后, 通过上证指数的实证分析, 进一步说明了该统计量具有良好的检验功效.

关键词: ESTAR-GARCH 模型; 单位根检验; 经验似然比统计量; 检验功效

中图分类号: O212.1

英文引用格式: PANG Y Y, CHEN Z L, ZHENG C M, et al. The unit root test of ESTAR-GARCH model [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(5): 441-452. (in Chinese)

§1. 引言

近年来, 中国经济发展模式转型升级, 经济发展从高速转变为中高速, 因此宏观经济变量呈现出明显的非线性和时变性特征. 对时间序列数据进行计量建模和参数估计时, 考虑到变量的非线性特征, 运用非线性回归模型进行拟合与预测更为准确. 根据转换区制的不同, 目前常见的非线性时间序列模型可分为门限自回归模型 (TAR)、平滑转换自回归模型 (STAR) 和马尔科夫机制转化模型 (MRS). 特别地, STAR 模型给出了区制转换的具体形式, 能够很好地描述时间序列条件均值的非线性特征, 因而应用最为广泛. 自 Teräsvirta^[1] 1994 年提出 STAR 模型以来, 该模型得到了多方面的拓展. Van Dijk 等^[2] 将 STAR 模型由二机制拓展为四机制, 同时证明多机制的 STAR 模型同样适用于经济数据的波动率刻画; Lundbergh 等^[3] 将时间变量引入 STAR 模型, 使其具有时变非线性特征; Lundbergh 和 Teräsvirta^[4] 放宽了扰动项服从独立同分布的假定, 提出了 STAR-GARCH 模型, 该模型同时描述了条件均值和条件方差的非线性特征, 能够更好地拟合数据, 进而也越来越受到重视.

另一方面, 在对时间序列进行建模之前, 传统的计量经济方法一般假设该序列是平稳过程, 在此情况下利用最小二乘法、最大似然估计法和中心极限定理等进行参数估计. 在

^{*}国家自然科学基金项目 (批准号: 11971432) 和教育部人文社会科学规划项目 (批准号: 18YJA910001) 资助.

^{*}通讯作者, E-mail: zlchenv@163.com.

本文 2019 年 1 月 20 日收到, 2019 年 9 月 23 日收到修改稿.

1974 年, Granger 与 Newbold^[5] 提出了虚假回归问题, 并指出两个没有任何因果关系的变量却有可能表现出较高相关性的情况, 因此, 传统方法已不再适用于研究非平稳时间序列. 在实际生活中较多的金融和经济时间序列都不具有平稳性, 均存在各类形式的非平稳序列, 如均值非常数类、周期类、异方差类等. 变量平稳与否所蕴含统计意义完全不同, 且会直接影响实证结果是否准确. 因此, 检验时间序列究竟是平稳还是单位根过程具有重要意义.

对于非线性模型的单位根检验, 国内外学者已经进行了大量的研究和讨论. 这些研究主要集中在平滑转换自回归模型 (STAR) 模型上, 该模型通常选用的转换函数有逻辑转换函数和指数转换函数, 对应的模型分别是 LSTAR 模型和 ESTAR 模型. Kapetanios 等^[6] 给出了对 STAR 模型的 ADF 型单位根检验 (KSS 检验), 主要针对 ESTAR 进行研究, 对一阶 ESTAR 模型的滞后项、位置参数进行了规定. Kruse^[7] 取消了文献 [6] 中对未知参数的约束, 对任意的位置参数的模型进行了单位根检验, 提出了 Wald 型统计量. 张凌翔和张晓峒^[8] 也讨论了局部的 Wald 类检验统计量, 提出了在局部平稳性未知的条件下的线性检验方法. 然而, 这些单位根检验的研究均假定模型扰动项独立同分布. 实际上, 金融数据的方差往往存在非线性和时变性特征, 考虑这些特征提出的 STAR-GARCH 模型的单位根检验却少有涉及. Li 和 Shukur^[9] 利用小波分析方法, 讨论了以时间为转移变量的一阶 LSTAR-GARCH 模型中均值方程的单位根检验. 汪卢俊^[10] 针对 LSTAR-GARCH 模型在传统 t 统计量的基础上进行改进, 在极大似然估计的基础上提出统计量 t_{NG} . 而针对 ESTAR-GARCH 模型, 胡俊娟^[11] 提出的基于 QML 法的 ESTAR-GARCH 模型的单位根检验统计量 $t(\tilde{\delta})$, 推出其极限分布, 提高了检验效果. 但是在使用 t_{NG} 和 $t(\tilde{\delta})$ 进行假设检验时, 依然需要计算样本的方差, 增加了计算的复杂性和检验的不稳定性, 导致检验效果并不理想.

Yuan 和 Zhang^[12] 在文中提出了检验具有条件方差时变性的线性的 AR-GARCH 模型的检验似然比检验统计量, 有效地避免计算统计量的估计方差, 从而提高单位根检验的效果. 鉴于此, 本文将经验似然比的使用从线性模型的单位根检验拓展到非线性模型. 针对 ESTAR-GARCH 模型的单位根检验, 本文提出经验似然比统计量 $l(\delta)$, 推导出了 $l(\delta)$ 的极限分布, 通过蒙特卡洛模拟方法得到 $l(\delta)$ 的临界值, 并通过对比分析 $l(\delta)$ 和胡俊娟^[11] 提出的基于 QML 法的 KSS 型统计量 $t(\tilde{\delta})$, 验证了 $l(\delta)$ 具有更高的检验功效.

§2. ESTAR-GARCH 模型的单位根检验

2.1 ESTAR-GARCH 模型的平稳性条件

首先, 根据 STAR 模型, 可以得到一阶 ESTAR-GARCH 模型:

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= \varphi y_{t-1} + \gamma y_{t-1}(1 - \exp\{-\theta y_{t-d}^2\}) + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \eta_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\eta \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$, $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, 且本文假定 ESTAR-GARCH 模型中局部参数 φ 为零.

为得到一致与渐近有效性的估计参数, 首先需要对模型进行平稳性判定. 通常使用的“弱平稳”指的是协方差平稳, 即二阶矩平稳. 刘雪燕和张晓峒^[13]指出非线性的特征大部分都是体现在高阶矩的特征上, 而二阶矩无法排除高阶矩的非平稳. 利用二阶矩平稳判定的方法已经不再适用, 因此需要对“平稳”和“非平稳”进行重新界定.

根据文献 [6] 中的研究, ESTAR(1) 模型在限制条件 φ 下可表示为

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1}(1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}) + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Kapetanios 等^[6]证明了当 $-2 < \gamma < 0$ 时, 模型 (2) 是严平稳过程, 即检验原假设 $H_0: \theta = 0$, 备择假设 $H_1: \theta > 0$. 然而, 在此模型下需要估计参数 γ , 若设定参数 $\gamma = 0$, 那么模型 (2) 就为随机游走过程, 无法直接检验原假设 $H_0: \theta = 0$. 为了避免估计参数 γ , Kapetanios 等^[6]对转换函数 $G(y_{t-1}; \theta) = 1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}$ 进行一阶泰勒展开, 从而得到辅助方程为

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \text{error}, \quad (3)$$

其中 $\delta = \gamma\theta$, 即 $\theta = \delta/\gamma$, 那么对于模型 (3), 原平稳性条件 $-2 < \gamma < 0$, $\theta = 0$ 等同于 $\delta = 0$, 原备择假设 $-2 < \gamma < 0$, $\theta > 0$ 等同于 $\delta > 0$. 根据文献 [12] 中的研究, 当模型 (3) 中的误差项为 GARCH 模型时, 平稳性条件依然成立.

综上, 若假定模型 (3) 中的误差项为 ε_t , 即 ε_t 服从 GARCH 分布, 那么对于 ESTAR-GARCH 模型可以表示为

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \quad (4)$$

而模型 (4) 进行单位根检验的原假设为 $H_0: \delta = 0$, 备择假设为 $H_1: \delta > 0$.

2.2 经验似然比统计量的提出

对于 ESTAR-GARCH 模型的单位根检验, 传统的统计量往往需要计算样本的方差, 导致检验效果不佳. 为此, 本文构建了检验似然比统计量, 该统计量不需要计算方差, 简化计算的同时提高了检验功效.

在 Yuan 和 Zhang^[12]的研究中, 针对含有 GARCH 的时间序列讨论了经验似然比统计量的构建. 针对 ESTAR-GARCH 模型, 当参数 δ 存在, 则有约束条件 $E[y_{t-1}^3(\Delta y_{t-1} - \delta y_{t-1}^3)] = 0$, 基于这种约束方程式, 可将经验似然函数定义为

$$L(\delta) = \sup \left\{ \prod_{t=1}^n p_t : \sum_{t=1}^n p_t = 1, \sum_{t=1}^n p_t y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta y_{t-1}^3) = 0 \right\}.$$

根据拉格朗日乘数法, 就有

$$p_t = \frac{1}{n} [1 + \lambda y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta y_{t-1}^3)]^{-1}, \quad (5)$$

其中 λ 满足

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta y_{t-1}^3)}{1 + \lambda y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta y_{t-1}^3)} = 0. \quad (6)$$

经验似然比统计量是

$$l(\delta) = 2 \sum_{t=1}^n \ln \{1 + \lambda y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta y_{t-1}^3)\}.$$

2.3 经验似然比统计量的极限分布及证明

在推导经验似然比统计量的极限分布之前, 根据文献 [12] 中的研究, 首先做出以下的假设:

假设 1 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是严格的平稳序列, 二阶矩 $E\varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, 公式 (1) 中的 η_t 满足 $E(\eta_t^2) = 1$, $\alpha + \beta < 1$, 且

$$S_n = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t, \quad V_n^2 = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2, \quad s_n^2 = E(S_n^2) = E(V_n^2),$$

那么对于满足上面假设的 $\{\varepsilon_t\}$, 有 $s_n^2 = n\sigma_\varepsilon^2$.

引理 2 若假设 1 成立, 则 $V_n^2/s_n^2 \rightarrow 1$, a.s.

证明: 取 $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = h_t(\eta_t^2 - 1)$. 根据 ESTAR-GARCH 模型中的 GARCH 项 $\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}$, $h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2$, 有

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_{t-1}^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t,$$

其中 $\alpha(L) = \alpha L$, $\beta(L) = \beta L$, L 是延迟算子.

又根据 $\sigma_\varepsilon^2 = E\varepsilon_t^2 = \omega/(1 - \alpha L - \beta L)$, 所以

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1 - \beta L}{1 - \alpha L - \beta L} v_t = \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i v_{t-i}.$$

根据假设 1 中的 $\alpha + \beta < 1$, 以及 $\sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i L_i = (1 - \beta L)/(1 - \alpha L - \beta L)$ 和 $\sum_{i=0}^{\infty} |\Psi_i| < \infty$ 的条件, 有

$$V_n^2 = n\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{t=1}^n \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i v_{t-i} = n\sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \sum_{t=1}^n v_{t-i},$$

用符号 A_n 表示上式最后一项, 即 $V_n^2 = n\sigma_\varepsilon^2 + A_n$.

根据假设的条件, 有 $s_n^2 = n\sigma_\varepsilon^2$, 那么引理 2 的证明就转化为在 $n \rightarrow \infty$ 时, $A_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 根据文献 [12] 中定理 5.1 的证明方法, 可以推出如下的结论:

对于任意的 $i \geq 0$, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{t=0}^n v_{t-i} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{E}(v_t) = 0.$$

结合 $\sum_{i=0}^{\infty} |\Psi_i| < \infty$ 的条件, 有 $A_n/n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{E}(v_t) \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i = 0$. 引理 2 得证. \square

引理 3 若假设 1 成立, 则对于所有的 $\varepsilon \geq 0$, 有

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{t=1}^n \mathbf{E}(\varepsilon_t^2 I_{(|\varepsilon_t| > \varepsilon s_n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

引理 3 的详细证明见文献 [12].

根据引理 2 和引理 3 以及 Yuan 和 Zhang^[12] 的研究, 可得下面结论.

引理 4 若假设 1 成立, 则

$$s_{[nt]}/s_n \Rightarrow W(t), \quad 0 < t < 1,$$

其中 $[x]$ 是小于 x 的最大整数, $W(t)$ 是一个标准布朗运动.

我们不妨假设序列 $\{y_t\}$ 的初始值为 $o_p(\sqrt{n})$, 该初始值统计量渐近分布的影响是可以忽略的. 以下是本文的主要结论.

定理 5 若假设 1 成立, 则 ESTAR-GARCH 模型的经验似然比统计量的极限分布为

$$l(\delta) \xrightarrow{d} \left[\int_0^1 W^3(r) dW(r) \right]^2 / \left[\int_0^1 W^6(r) dr \right].$$

证明: 令 $\bar{\lambda} = s_n^3 \lambda$, $g_t(\delta) = s_n^{-3} y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta_n y_{t-1}^3)$, 则 (6) 式可改写为

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta)}{1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)} = 0. \quad (7)$$

又令 $\bar{\lambda} = \theta \lambda_0$, 其中 $\theta > 0$ 且 $\|\lambda_0\| = 1$, 根据 (5) 式有

$$p_t = \frac{1}{n} [1 + \lambda y_{t-1}^3 (\Delta y_t - \delta_n y_{t-1}^3)]^{-1} = \frac{1}{n} [1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)]^{-1}.$$

因为 $p_t \geq 0$, 且有

$$[1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)]^{-1} = [1 + \theta \lambda_0 g_t(\delta)]^{-1} \geq \left[1 + \max_{1 \leq t \leq n} \theta \lambda_0 g_t(\delta) \right]^{-1},$$

把 $\bar{\lambda} = \theta \lambda_0$ 代入 (6) 式, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta)}{1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)} \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta)}{1 + \theta \lambda_0 g_t(\delta)} \right| = \frac{1}{n} \left| \lambda_0 \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta)}{1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)} \right| \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\theta \lambda_0^2 g_t^2(\delta)}{1 + \theta \lambda_0 g_t(\delta)} - \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \lambda_0 g_t(\delta) \right| \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\theta \lambda_0^2 g_t^2(\delta)}{1 + \theta \max_{1 \leq t \leq n} |g_t(\delta)|} - \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \lambda_0 g_t(\delta) \right|. \quad (8)$$

将 (8) 式整理, 提取 θ 可以得到

$$\theta \left[\frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \lambda_0^2 g_t^2(\delta) \right| - \max_{1 \leq t \leq n} |g_t(\delta)| \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \lambda_0 g_t(\delta) \right| \right] \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n \lambda_0 g_t(\delta) \right|. \quad (9)$$

根据文献 [14] 的多项式分解定理, 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^3 \varepsilon_t &= \varphi^3(1) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \left(\sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i \right)^3 + \sum_{t=1}^n \varepsilon_t (\eta_{t-1} - \eta_0)^3 \\ &\quad + 3\varphi^2(1) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \left(\sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i \right)^2 (\eta_{t-1} - \eta_0) + 3\varphi(1) \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \left(\sum_{i=1}^{t-1} \varepsilon_i \right) (\eta_{t-1} - \eta_0)^2 \\ &:= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4, \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j, \quad \eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad a_j = - \sum_{i=j+1}^{\infty} \varphi_i \quad \text{且} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty.$$

因为 $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, $E(S_n^2) = n\sigma_\varepsilon^2$ 且 $E|\eta_{t-1} - \eta_0| < \infty$, 通过遍历性定理可以得到 Q_2 、 Q_3 、 Q_4 为 $o_p(1)$. 再根据假设 1, 可以得到 $s_n = \sigma_\varepsilon \sqrt{n}$, 将其代入 $g_t(\delta)$ 有

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\delta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^3}{s_n^3} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi^3(1) \sigma_\varepsilon \sum_{t=1}^n \frac{S_{t-1}^3}{s_n^3} \frac{\varepsilon_t}{s_n} + o_p(1).$$

由文献 [15] 中关于 $n^{-2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^2 \varepsilon_t$ 极限分布的研究, 有

$$\sum_{t=1}^n \frac{S_{t-1}^3}{s_n^3} \frac{\varepsilon_t}{s_n} \xrightarrow{d} \int_0^1 W^3(r) dW(r),$$

所以

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n g_t(\delta) \right| = O_p(n^{-1/2}), \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq t \leq n} |g_t(\delta)| &\leq \max_{1 \leq t \leq n} \left| \frac{y_{t-1}^3}{s_n^3} \right| \max_{1 \leq t \leq n} \left| \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}} \right|, \\ \max_{1 \leq t \leq n} \left| \frac{y_{t-1}^3}{s_n^3} \right| &= O_p(1), \quad \max_{1 \leq t \leq n} \left| \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}} \right| = \max_{1 \leq t \leq n} \sigma_\varepsilon \left| \frac{\varepsilon_t}{s_n} \right| \leq o_p(1). \end{aligned}$$

所以有

$$\max_{1 \leq t \leq n} |g_t(\delta)| = o_p(n^{-1/2}), \quad (11)$$

其中 ε_t^2 的期望为 0, 那么 ε_t^2 可以表示成 $\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_t^2$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^6}{s_n^6} \varepsilon_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^6}{s_n^6} (\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_t^2) + \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^6}{s_n^6} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{y_{t-1}^6}{s_n^6}. \end{aligned}$$

类似地, 根据文献 [14] 的多项式分解定理, 又可以将 $n^{-1} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta)$ 分解为

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) = \sigma_\varepsilon^2 \varphi^6(1) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{S_{t-1}^6}{s_n^6} + o_p(1).$$

同样地, 根据文献 [15] 中的研究, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{S_{t-1}^6}{s_n^6} \xrightarrow{d} \int_0^1 W^6(r) dr,$$

那么

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) = O_p(1). \quad (12)$$

由 (9)、(10)、(11)、(12) 可以得到 $\|\bar{\lambda}\| = O_p(n^{-1/2})$, 再根据 (6) 中关于 λ 的定义, 可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta)}{1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)} = \sum_{t=1}^n g_t(\delta) - \sum_{t=1}^n \bar{\lambda} g_t^2(\delta) + \sum_{t=1}^n \frac{g_t(\delta) [\bar{\lambda} g_t(\delta)]^2}{1 + \bar{\lambda} g_t(\delta)} \\ &= \sum_{t=1}^n g_t(\delta) - \sum_{t=1}^n \bar{\lambda} g_t^2(\delta) + O_p(1). \end{aligned}$$

将上述式子进行整理可以得到

$$\bar{\lambda} = \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) \right]^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t(\delta) \right] + O_p(n^{-1/2}),$$

进而可以得到经验似然比统计量为

$$l(\delta) = \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n g_t(\delta) \right]^2 + o_p(1),$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^3 \varepsilon_t &= \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_{t-1}}{\sqrt{n}} \right)^3 \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{n}} \\ &= \varphi^3(1) \sigma_\varepsilon \sum_{t=1}^n \left(\frac{S_{t-1}}{s_n} \right)^3 \frac{\varepsilon_t}{s_n} \xrightarrow{d} \varphi^3(1) \sigma_\varepsilon \int_0^1 W^3(r) dW(r), \\ \frac{1}{n^4} \sum_{t=1}^n y_{t-1}^6 \varepsilon_t^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_{t-1}}{\sqrt{n}} \right)^6 (\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_t^2)^2 + \frac{1}{n} \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \sum_{t=1}^n \left(\frac{y_{t-1}}{\sqrt{n}} \right)^6 \end{aligned}$$

$$= \varphi^6(1)\sigma_\varepsilon \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{S_{t-1}}{s_n} \right)^6 \xrightarrow{d} \varphi^6(1)\sigma_\varepsilon^2 \int_0^1 W^6(r)dr.$$

可得经验似然比统计量的极限分布为

$$\begin{aligned} l(\delta) &= \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g_t^2(\delta) \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n g_t(\delta) \right]^2 + o_p(1) \\ &\xrightarrow{d} \left[\int_0^1 W^3(r)dW(r) \right]^2 / \left[\int_0^1 W^6(r)dr \right]. \end{aligned}$$

定理 5 得证. \square

§3. Monte Carlo 模拟

由于经验似然比统计量 $l(\delta)$ 的极限分布不是简单的 χ^2 分布或布朗运动, 所以本文采用 Monte Carlo 模拟来得到经验似然比统计量 $l(\delta)$ 的临界值, 再利用临界值进行假设检验. 数据生成过程如下:

$$\Delta y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1},$$

其中 $\eta_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$. 参数 (ω, α, β) 的取值 $(0.1, 0.1, 0.7)$ 和 $(0.2, 0.1, 0.8)$ 分别记为情形一和情形二. 由于 Monte Carlo 模拟得到的临界值的有效性与渐进分布的存在性有关, 以及样本容量的大小与结果的可信度有较强关系, 故设定样本容量为 1000, 模拟次数为 50000, 得到统计量 $l(\delta)$ 的渐进临界值如表 1 所示.

表 1 $l(\delta)$ 统计量的渐进临界值

显著性水平 (%)	情形一	情形二
1	0.001614	0.001055
5	0.012727	0.015266
10	0.446820	0.064241

为了评价 $l(\delta)$ 统计量的检验功效, 本文将备择假设成立时的数据生成过程设定为:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \gamma y_{t-1}(1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}) + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \eta_t \sqrt{h_t}, \quad h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \end{aligned}$$

设置样本量为 100 和 200, 为考查检验统计量的实际检验水平, 对不同样本量的检验统计量的值进行比较, 过程重复 2 万次. 模拟结果显示, 在小样本量的情况下, 实际检验水平与名义检验水平均接近. 这说明, 样本容量的变化对临界值造成的影响可忽略不计, 所以渐进临界值可以用来对不同的样本进行检验.

为了探究参数不同时统计量的检验功效的变化情况, 本文考虑在两种情形 (情形一和情形二) 下, γ 分别为 $-1.5, -1, -0.5$ 和 θ 分别为 $0.001, 0.01$ 和 0.1 时不同的数据生成过程, 且设定名义检验水平为 5% , 模拟次数为 $10\,000$. 为了比较小样本下检验功效的变化, 设定样本数量分别为 100 和 200 , 并在不同情况下与胡俊娟提出的基于 QML 的检验统计量 $t(\tilde{\delta})$ 进行比较, 结果如表 2 所示.

表 2 统计量 $l(\delta)$ 和统计量 $t(\tilde{\delta})$ 的检验功效

参数		$(\omega, \alpha, \beta) = (0.1, 0.1, 0.7)$				$(\omega, \alpha, \beta) = (0.2, 0.1, 0.8)$			
		$T = 100$		$T = 200$		$T = 100$		$T = 200$	
		$l(\delta)$	$t(\tilde{\delta})$	$l(\delta)$	$t(\tilde{\delta})$	$l(\delta)$	$t(\tilde{\delta})$	$l(\delta)$	$t(\tilde{\delta})$
$\theta = 0.001$	$\gamma = -1.5$	0.9954	0.2930	0.9998	0.5075	0.9999	0.6465	0.9999	0.9548
	$\gamma = -1$	0.9923	0.1819	0.9996	0.2714	0.9989	0.5253	0.9997	0.8643
	$\gamma = -0.5$	0.9859	0.2121	0.9984	0.1358	0.9971	0.4040	0.9996	0.5678
$\theta = 0.01$	$\gamma = -1.5$	0.9978	0.8889	1.0000	0.9851	0.9946	1.0000	1.0000	1.0000
	$\gamma = -1$	1.0000	0.7879	1.0000	0.9900	1.0000	0.9798	1.0000	1.0000
	$\gamma = -0.5$	1.0000	0.5051	1.0000	0.8844	1.0000	0.8990	1.0000	1.0000
$\theta = 0.1$	$\gamma = -1.5$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	$\gamma = -1$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	$\gamma = -0.5$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9899	1.0000	1.0000

从表 2 可以看出, 整体上检验统计量 $l(\delta)$ 的检验功效普遍高于 $t(\tilde{\delta})$. 当 $\theta = 0.1$ 的时候, 这两个统计量的检验功效都非常好, 都等于 1 或接近 1, 这是因为这两个统计量都侧重于对 θ 的检验. 而当 θ 取值越小, 检验统计量 $l(\delta)$ 和 $t(\tilde{\delta})$ 功效对比就越明显. 例如, 当 $\theta = 0.01$, $\gamma = -0.5$, $(\omega, \alpha, \beta) = (0.2, 0.1, 0.8)$, 且样本数量为 100 的情况下, 检验统计量 $l(\delta)$ 的检验功效 1.0000, 而统计量 $t(\tilde{\delta})$ 的检验功效则为 0.8990; 当 $\theta = 0.01$, $\gamma = -0.5$, $(\omega, \alpha, \beta) = (0.1, 0.1, 0.7)$, 且样本数量为 100 的情况下, 检验统计量 $l(\delta)$ 的检验功效 1.0000, 而统计量 $t(\tilde{\delta})$ 的检验功效只有 0.5051. 当 $\theta = 0.001$ 时, 无论在哪种情形下, 检验统计量 $l(\delta)$ 的检验功效都接近 1, 而统计量 $t(\tilde{\delta})$ 则不一定. 例如, 当参数 $(\omega, \alpha, \beta) = (0.1, 0.1, 0.7)$ 且样本取值为 100 的情况下, $\theta = 0.001$ 且 $\gamma = -1.5$ 时, 检验统计量 $l(\delta)$ 的检验功效为 0.9954, 而统计量 $t(\tilde{\delta})$ 的检验功效则只有 0.2930. 因此, 经验似然比统计量可以通过避免计算方差而提高检验功效.

§4. 实证分析

自 2008 年金融危机以来, 我国股市一直回暖缓慢. 而近几年来, 在国家宏观经济政策的良性影响下, 股市发生了较大的变化. 2014 年下半年开始, 我国的股市重返“牛市”, 上

证指数从 2014 年 7 月 1 日的 2050 点迅速到了 2015 年 6 月 12 日的 5166 点, 涨至金融危机以来的最高水平. 随即, 2015 年下半年开始, 股市突然由“牛市”变为“熊市”, 大量的投资者被套牢, 基金净值缩水严重. 直至 2016 年 1 月, 股市停止大幅下跌, 上证指数一直在 3000 点上下小幅震荡. 本文基于此背景, 研究我国股市中最具代表性指数——上证指数收盘点数, 分别利用传统 ADF 统计量和本文提出的经验似然比统计量 $l(\delta)$ 进行平稳性判别, 进一步说明在非线性数据下, 尤其是尖峰厚尾的数据类型下, 经验似然比统计量 $l(\delta)$ 具有更高的准确性. (本文数据来源于网易财经)

本文选取的数据为 2014 年 7 月至 2017 年 5 月的上证指数日收盘数据, 并计算其对数收益率, 序列图如图 1 所示, 上证指数的对数收益率的基本描述性统计量如表 3 所示.

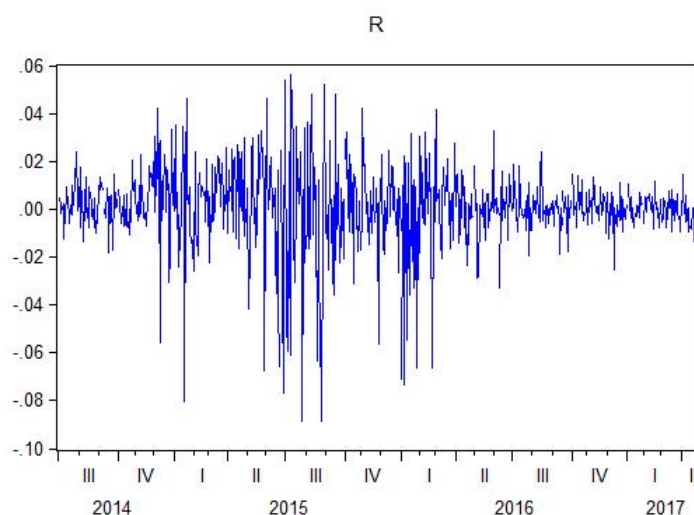


图 1 对数收益率序列图

表 3 对数收益率的基本描述性统计量

统计量	均值	中位数	最大值	偏度	峰度	J-B 统计量
样本	0.000618	0.001387	0.056036	-1.243650	8.247689	965.3752

通过观察图 1, 可以直观地看出样本数据是非线性的, 表 3 中峰度和 J-B 统计量则显示出样本数据尖峰厚尾的分布形态. 对该样本数据分别利用 ADF 统计量和经验似然比统计量 $l(\delta)$ 进行单位根检验, 结果如下表 4 所示.

从表 4 可以看出, 传统 ADF 统计量对原始数据平稳性的判别结果为非平稳, 而对一阶差分数据的判别结果则为平稳, 统计量 $t(\tilde{\delta})$ 对原始数据的检验结果也为平稳. 相较于 ADF 统计量, 经验似然比统计量对原始数据进行单位根检验的结果为平稳. 另一方面, 从图 1 来

表 4 单位根检验

	ADF 检验			经验似然比检验		
	统计量	5% 临界值	结论	统计量 $l(\delta)$	5% 临界值	结论
原始数据	-2.267198	-2.865555	非平稳	0.340301	0.001526	平稳
一阶差分数据	-10.98326	-2.865561	平稳			

看, 数据显然有非线性特征, 又考虑到金融数据的条件异方差性, 因此用非线性模型去拟合更合适. 而传统 ADF 统计量是基于线性模型提出的, 如果利用该统计量对呈尖峰厚尾的数据进行检验, 容易造成过分接受非线性假设的问题. 因此, 对于非线性数据进行单位根检验时, 经验似然比统计量 $l(\delta)$ 的检验效果更好.

§5. 结 论

本文借鉴 Yuan 和 Zhang^[12] 在对时间序列进行平稳性检验时避免计算样本方差的思想, 针对 ESTAR-GARCH 模型构建了用于单位根检验的经验似然统计量 $l(\delta)$, 推导了检验统计量 $l(\delta)$ 的极限分布, 采用了 Monte Carlo 随机模拟方法得到了该统计量的临界值, 在此基础上计算出该统计量在参数不同情况下的检验功效, 并与需要计算样本方差的统计量 $t(\tilde{\delta})$ 进行对比分析. 结果表明在有限小样本下, 无论参数取值如何, 经验似然统计量 $l(\delta)$ 的检验功效均明显高于统计量 $t(\tilde{\delta})$. 最后, 通过上证指数的实证研究, 进一步说明在非线性数据下, 经验似然比统计量具有更高的检验功效. 因此, 在采用统计量对时间序列的平稳性进行检验时, 若能有效避免样本方差的计算, 使得计算更简便的同时也能大大提高检验功效.

参 考 文 献

- [1] TERÄSVIRTA T. Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models [J]. *J Amer Statist Assoc*, 1994, **89**(425): 208–218.
- [2] VAN DIJK D, FRANSES P H, LUCAS A. Testing for smooth transition nonlinearity in the presence of outliers [J]. *J Bus Econom Statist*, 1999, **17**(2): 217–235.
- [3] LUNDBERGH S, TERÄSVIRTA T, VAN DIJK D. Time-varying smooth transition autoregressive models [J]. *J Bus Econom Statist*, 2003, **21**(1): 104–121.
- [4] LUNDBERGH S, TERÄSVIRTA T. Modelling economic high-frequency time series with STAR-STGARCH models [R]. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 291, Stockholm School of Economics, 1998.
- [5] GRANGER C W J, NEWBOLD P. Spurious regressions in econometrics [J]. *J Econometrics*, 1974, **2**(2): 111–120.
- [6] KAPETANIOS G, SHIN Y, SNELL A. Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework [J]. *J Econometrics*, 2003, **112**(2): 359–379.

- [7] KRUSE R. A new unit root test against ESTAR based on a class of modified statistics [J]. *Statist Papers*, 2011, **52**(1): 71–85.
- [8] 张凌翔, 张晓峒. 局部平稳性未知条件下 STAR 模型的线性性检验 [J]. 数量经济技术经济研究, 2012, (1): 100–117.
- [9] LI Y S, SHUKUR G. Testing for unit root against LSTAR model: wavelet improvement under GARCH distortion [J]. *Comm Statist Simulation Comput*, 2010, **39**(2): 277–286.
- [10] 汪卢俊. LSTAR-GARCH 模型的单位根检验 [J]. 统计研究, 2014, **31**(7): 85–91.
- [11] 胡俊娟. 基于 STAR 模型的单位根检验 [D]. 杭州: 浙江工商大学, 2017.
- [12] YUAN Y Z, ZHANG R M. Estimation for nearly unit root processes with GARCH errors [J]. *Appl Math J Chinese Univ Ser B*, 2010, **25**(3): 297–306.
- [13] 刘雪燕, 张晓峒. 非线性 LSTAR 模型中的单位根检验 [J]. 南开经济研究, 2009, (1): 61–74.
- [14] PHILLIPS P C B, SOLO V. Asymptotics for linear processes [J]. *Ann Statist*, 1992, **20**(2): 971–1001.
- [15] HANSEN B E. Convergence to stochastic integrals for dependent heterogeneous processes [J]. *Econometric Theory*, 1992, **8**(4): 489–500.

The Unit Root Test of ESTAR-GARCH Model

PANG Yingying CHEN Zhenlong ZHENG Changmei ZHANG Qiaoyan

(School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou, 310018, China)

Abstract: The existing statistics in unit root tests of ESTAR-GARCH model often need to calculate the variance of specimen. In this paper, the empirical likelihood ratio statistics are proposed to deduce the limiting distribution of them, so that the random errors caused by variance calculation are avoided. And then, a critical value of the statistics can be received through simulation, the power of the QML test and the empirical likelihood ratio statistics has been compared and studied. Monte Carlo simulation shows that compared with the QML test, the power and the criterion of tests is more fruitful and more scientific, through the empirical likelihood ratio statistics. Avoiding the random errors of the calculation of variance, the accuracy of tests is clearly increased by using the empirical likelihood ratio statistics. Finally, the empirical study of SSE can further illustrate the higher test efficiency of this statistic.

Keywords: ESTAR-GARCH model; unit root test; empirical likelihood ratio statistics; test efficiency

2010 Mathematics Subject Classification: 62N03