应用概率统计　第 36 卷
第 6 期　2020 年 12 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Dec., 2020, Vol. 36, No. 6, pp. 605-618
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.06.004

基于贝叶斯推断的洪水损失分布与巨灾债券定价研究 *

欧　辉　　谢振东　　李俊雄⋆　　王秋灵

(湖南师范大学数学与统计学院, 长沙, 410081)

摘　要: 以我国洪水巨灾风险作为研究背景, 针对洪水损失 “低频高损” 的特点, 使用贝叶斯推断法进行损失分布拟合, 通过贝叶斯推断得出我国洪水的损失频数分布和损失额度分布, 在此基础上利用蒙特卡罗模拟法计算得出我国洪水年度损失在不同的触发条件下对应的概率分布, 进而运用 CAPM 对我国洪水巨灾债券进行定价研究, 得出结论: 在不同的触发条件下, 随着触发值逐渐增大, 对应的触发概率逐渐减小; 对比三种类型的债券可以发现债券的价格随着本金保证比例的降低而降低、随着本金损失比例的升高而降低, 即投资风险与收益成正比, 同时为我国发行洪水巨灾债券提供参考.

关键词: 巨灾债券定价; 贝叶斯推断; CAPM; 蒙特卡罗模拟

中图分类号: O212.8

英文引用格式: OU H, XIE Z D, LI J X, et al. Research on flood loss distribution and catastrophe bond pricing based on Bayesian inference [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(6): 605–618. (in Chinese)

§1.　引　　言

我国是世界上洪水灾害频发的国家之一, 由此造成的人员伤亡和财产损失逐年上升, 对经济的发展、社会的协调、人们的生活等各方面都产生了严重的影响. 巨灾不可避免, 但巨灾造成的损失又非常巨大, 在灾害的处理上, 目前主要是通过政府补偿、社会公益基金和热心人士的捐助、商业保险补偿等途径, 尽可能降低洪水巨灾损失. 但这些途径无法有效转移和分散风险, 建立专门的巨灾保险制度是非常必要的应对措施, 这样可以通过保险优势实现风险分散和灾害补偿. 国际资本市场自上世纪 90 年代开始利用创新型证券化产品为巨灾风险提供了灵活多样的解决方案. 这些产品中, 巨灾债券是当前应对巨灾风险最为成功的且交易最活跃最广泛的产品之一. 巨灾债券是一种发行收益与指定的巨灾损失相连结的债券, 将保险公司的部分巨灾风险转移给债券投资者. 它大大增强了保险业的承保能力, 为巨灾风险提供了可靠的转移途径, 也为资本市场的机构投资者提供了一种新的优良投资工具.

*湖南省哲学社会科学基金一般项目 (批准号: 17YBA291) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: lijunxiongmath@163.com.

本文 2019 年 7 月 8 日收到, 2020 年 3 月 6 日收到修改稿.

“保险证券化” 最早出现在 1973 年《构建再保险期货市场的可行性研究》, 相对于资本市场来说, 单次巨灾发生所造成的全部损失对庞大的资本市场来说是完全可以承受的. 目前, 国外的巨灾债券定价模型的研究已趋于成熟, 且已有成功推行相关巨灾债券的经验. Cox 和 Pedersen[1] 研究了灾难风险债券的定价问题, 运用均衡定价理论, 提出一个具有代表性的模型, 可用来评估灾难风险债券相对于传统违约证券的违约利差, Ma 和 Ma[2] 则提出了一个有债权模型, 用于灾难风险债券的定价, Braun[3] 提出了一个适用于所有地区、风险和触发类型的计量经济学 CAT 债券定价模型, 它在不同的校准子样本之间表现出强大的匹配性.

对国内而言, 解放以来, 我国逐步建立了洪涝灾害预警体系和数据的收集、分析体系, 进行了我国洪水灾害危险程度、地理分布情况和区域水灾风险评估等相关研究. 张行南等[4]根据对气象因素、径流因素和地形因素的分析, 并结合人口和耕地分布情况, 完成了我国洪水危害程度区域的划分. 刘新立[5] 构建了水灾风险评估的科学体系和数学模型, 选取洪水灾害数据对长江流域进行洪水风险评估. 这些资料丰富了对我国洪水损失程度的认识, 为实现今后发行巨灾债券提供了风险分析思路和评估方法. 张志海和王伟[6] 研究了我国发行洪水巨灾债券的可行性和运作机制, 王媛媛[7] 通过研究巨灾风险和巨灾风险证券化的定义及特征, 分析巨灾风险证券化在我国实施的可行性, 康晗彬和邢天才[8] 创新性的引入资产、负债和利率模型, 结合我国地震损失程度和频率分布对我国巨灾债券定价进行了实证研究, 并在资产负债管理视角下首次对多风险因素作用下的我国巨灾债券定价进行了量化研究. 其他学者也针对巨灾债券的理论和定价模型做了大量研究, 田玲和向飞[9] 在风险定价框架的基础上对巨灾债券定价模型做了比较研究. 翟鸿顺[10] 总结国外巨灾产品发行的经验, 结合我国具体国情尝试设计出一种符合我国实际的巨灾债券产品运行模式, 但总的来说, 国内对于巨灾债券的研究仍未形成一个系统的体系, 并不完善, 巨灾债券市场发展较为缓慢.

巨灾债券是一种金融工具, 如果要成功发行需要先判断债券的价格是否合理, 而价格的合理取决于是否能够如实反映巨灾损失分布, 对其进行可靠地计量. 现今, 损失分布法多受相关研究资料推崇, 基于历史数据拟合巨灾的两个属性也就是损失频数和损失额度的分布, 进而构建出总损失分布模型. 巨灾风险与一般风险相比, 其特殊表现在: 损失频率低、损失程度高, 这些损失的极值概率高于一般风险损失的极值概率, 并且其极值概率随着损失的增加而逐渐减小, 这说明了巨灾风险有明显的厚尾特征. 如果采用损失分布法, 收集历史数据直接构建损失分布模型, 显示的拟合效果会存在一定的偏差, 不太令人满意[11]. 又因为洪水损失的统计数据不太系统, 有效记录历史时间不长, 统计数据不够多, 在这种情况下本文使用贝叶斯推断法拟合损失分布, 得出的洪水巨灾损失分布模型的拟合效果比前者拟合的效果更准确和有效[12]. 然后通过运用蒙特卡罗模拟法计算得出我国洪水年度总损失在不同的触发条件下对应的概率分布情况, 进而运用资本资产定价模型和零息债券定价

公式对我国洪水巨灾债券进行初步设计.

§2. 贝叶斯推断

2.1 贝叶斯定理

贝叶斯定理的基本思想为: 存在任意一个未知量 θ, 把它看成是一个随机变量, 在抽样前用概率分布描述 θ 的未知状况, 这个概率分布被称之为先验分布 $\pi(\theta)$, 结合先验信息和样本信息得到后验分布, 进而估计出损失分布的参数.

假设存在某一总体的概率函数为 $p(x\,|\,\theta)$, $\theta\in\Theta$, 表示在参数空间 $\Theta=\{\theta\}$ 中与 θ 对应的分布, θ 为未知参数, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为取自该总体的样本. 参数 θ 存在先验分布的密度函数 $\pi(\theta)$, 则样本 $\boldsymbol{x}$ 与参数 θ 的联合密度分布为

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta), \tag{1}$$

其中 $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)$ 与 θ 有关, $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)$ 称为样本的联合密度函数即似然函数.

根据条件密度公式可以得到

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

其中 $m(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的边际密度函数, 有如下等式成立:

$$m(\boldsymbol{x})=\int_\Theta h(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta=\int_\Theta p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{3}$$

其中 $m(\boldsymbol{x})$ 与 θ 无关, 可以对 θ 作出统计推断的仅为 $\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})$, 有

$$\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})=\frac{h(\boldsymbol{x},\theta)}{m(\boldsymbol{x})}=\frac{p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta)}{\displaystyle\int_\Theta p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}. \tag{4}$$

上式就是密度函数形式的贝叶斯公式, 是集合总体信息、样本信息和先验信息才得到的结果, $\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})$ 被称为后验分布, 它是集中了总体、样本和先验三种信息后对于先验分布 $\pi(\theta)$ 的更新, 以期望得到参数 θ 更符合实际的分布. 由于 $m(\boldsymbol{x})$ 不依赖于 θ, 仅起到一个正化因子的作用, 所以可以改写为

$$\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})\propto p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta), \tag{5}$$

其中 $p(\boldsymbol{x}\,|\,\theta)\pi(\theta)$ 是后验分布 $\pi(\theta\,|\,\boldsymbol{x})$ 的核.

2.2 共轭先验分布

贝叶斯推断中, 应该首要解决先验分布的确定问题. 由于共轭先验分布易于理解, 方便计算, 能很好解释后验分布的一些参数, 故本文选择利用该方法进行贝叶斯推断.

假如由总体信息和样本信息算得的后验密度函数与 θ 的先验密度函数 $\pi(\theta)$ 有相同的函数形式, 则 $\pi(\theta)$ 称是 θ 的共轭先验分布.

本文收集了实际中常用的共轭先验分布, 如表 1 所示.

表 1 常用共轭先验分布

分布	参数	共轭先验分布
泊松分布 $\mathrm{P}(\lambda)$	λ	伽马分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$
二项分布 $\mathrm{B}(n,p)$	p	贝塔分布 $\mathrm{Be}(\alpha,\beta)$
指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$	λ	伽马分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$
正态分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ (σ^2 已知)	μ	正态分布 $\mathrm{N}(\mu,\tau^2)$
正态分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ (μ 已知)	σ^2	逆伽马分布 $\mathrm{IGa}(\alpha,\lambda)$

2.3 超参数的确定

超参数是指先验分布中所含的未知参数. 本文选择先验矩法来确定超参数.

假设从先验信息中获取关于 θ 的若干个估计值, 记为 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$, 一般它们来源于对历史数据的整理和加工, 由此算得先验均值 $\overline{\theta}$ 和先验方差 S_θ^2, 其中有

$$\begin{cases}\overline{\theta}=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}\theta_i,\\ s_\theta^2=\dfrac{1}{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}(\theta_i-\overline{\theta})^2.\end{cases} \tag{6}$$

接着分别令其等于先验分布的期望和方差, 算出超参数的估计值.

2.4 损失频数的共轭分布

假定存在一个离散型随机变量 N, 令 N 表示洪水的年损失频数, 有 $N\sim\mathrm{P}(\lambda)$, 服从泊松分布, 设 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 是取自总体的简单随机样本, 则样本 $\boldsymbol{n}$ 的似然函数为

$$p(\boldsymbol{n}\,|\,\lambda)=\frac{\mathrm{e}^{-k\lambda}\lambda^t}{\prod\limits_{i=1}^{k}n_i!}\propto \mathrm{e}^{-k\lambda}\lambda^t,\qquad t=\sum_{i=1}^{k}n_i. \tag{7}$$

由表 1 可知, 伽玛分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\mu)$ 是泊松分布参数 λ 的共轭先验分布, 假设 $\pi(\lambda)\sim\mathrm{Ga}(\alpha,\mu)$, 即

$$\pi(\lambda)\propto\lambda^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\mu\lambda},\qquad \lambda>0. \tag{8}$$

由公式 (5), 得到

$$\pi(\lambda\,|\,\boldsymbol{n}) \propto p(\boldsymbol{n}\,|\,\lambda)\pi(\lambda) = \lambda^{t+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(k+\mu)\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{9}$$

即 $\pi(\lambda\,|\,\boldsymbol{n}) \sim \mathrm{Ga}(t+\alpha, \mu+k)$, 故 $\mathrm{Ga}(\alpha,\mu)$ 是 λ 的共轭先验分布.

贝叶斯估计用的最多的是后验期望估计, 是使用后验分布的均值作为 λ 的点估计, 使得参数 λ 的贝叶斯估计为

$$\widehat{\lambda} = \mathsf{E}(\lambda\,|\,\boldsymbol{n}) = \frac{t+\alpha}{\mu+k}. \tag{10}$$

2.5 损失额度的共轭分布

假定存在一个离散随机变量 X, 设 X 表示洪水的损失额度, 有 $X \sim \mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$, 服从对数正态分布, 若 $Y=\ln X$, 则 $Y \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为取自总体的简单随机样本, 则该样本的联合密度函数为

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{y}\,|\,\mu,\sigma^2) &\propto \sigma^{-n}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\Big\} \\ &= \sigma^{-n}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)s^2+n(\overline{y}-\mu)^2]\Big\}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2. \end{cases} \tag{11}$$

当 μ, σ^2 未知时, μ, σ^2 的联合先验密度函数是

$$\pi(\mu,\sigma^2) \propto \sigma^{-1}(\sigma^2)^{-(v_0/2+1)}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_0\sigma_0^2+\kappa_0(\mu-\mu_0)^2]\Big\}. \tag{12}$$

这种形式的分布称为正态–倒伽玛分布, 记为 $\mathrm{N\text{-}IGa}(v_0,\mu_0,\sigma_0^2)$. 由于考虑到 μ 与 σ^2 之间会有相互影响, 即

$$\pi(\mu,\sigma^2) = \pi(\mu\,|\,\sigma^2)\pi(\sigma^2). \tag{13}$$

有 $\pi(\mu\,|\,\sigma^2) \sim \mathrm{N}(\mu_0,\sigma_0^2/\kappa_0)$, $\pi(\sigma^2) \sim \mathrm{Ga}(\nu_0/2,\nu_0\sigma_0^2/2)$, $\pi(\mu) \sim \mathrm{t}_{\nu_0}(\mu_0,\sigma_0^2)$, 得出在样本 y 给定下可得 (μ,σ^2) 的条件下后验密度为

$$\pi(\mu,\sigma^2\,|\,y) \propto \sigma^{-1}(\sigma^2)^{-(v_n/2+1)}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}[v_n\sigma_n^2+\kappa_n(\mu-\mu_n)^2]\Big\},$$

其中

$$\begin{cases} \kappa_n = \kappa_0+n, \\ \mu_n = \dfrac{\kappa_0}{\kappa_0+n}\mu_0 + \dfrac{n}{\kappa_0+n}\overline{y}, \\ v_n = v_0+n, \\ v_n\sigma_n^2 = v_0\sigma_0^2+(n-1)s^2+\dfrac{\kappa_0 n}{\kappa_0+n}(\mu_0-\overline{y})^2. \end{cases} \tag{14}$$

故 N-IGa(v_n, μ_n, σ_n^2) 是正态均值 μ 与正态方差 σ^2 的 (联合) 共轭先验分布[13]. 同理有

$$\pi(\mu, \sigma^2 \,|\, y) = \pi(\mu \,|\, \sigma^2, y)\pi(\sigma^2 \,|\, y), \tag{15}$$

其中 $\pi(\mu \,|\, \sigma^2) \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2/\kappa_n)$, $\pi(\sigma^2) \sim \mathrm{Ga}(\nu_n/2, \nu_n\sigma_n^2/2)$, $\pi(\mu) \sim \mathrm{t}_{\nu_n}(\mu_n, \sigma_n^2)$.

因此 μ 的后验均值为 μ_n, σ^2 的后验均值为 $(v_n\sigma_n^2/2)/(v_n/2-1)$, 使得参数 μ 和 σ^2 的贝叶斯估计为

$$\begin{cases} \widehat{\mu} = \mu_n, \\ \widehat{\sigma}^2 = \dfrac{v_n\sigma_n^2/2}{v_n/2-1}. \end{cases} \tag{16}$$

§3. 模型分布拟合

3.1 数据的收集及来源

从《中国防汛抗旱》和《中国水旱灾情公报》中收集了 1995 – 2017 年我国洪水巨灾的损失数据, 考虑经济发展性及通货膨胀的因素, 重新整理了数据, 选取直接经济损失在 1 亿元人民币及以上的洪水损失数据作为损失变量的样本.

3.2 数据预处理

对收集数据做初步的整理, 我国 1995 – 2017 年洪水损失数据的统计分析, 如表 2 所示.

表 2 我国 1995 – 2017 年的洪水损失数据的统计特征 (单位: 亿元)

总计	平均数	众数	最小值	最大值	标准差	偏度	峰度
498	50.455	5.0	1.0	2 484	139.36	11.693	189.55

可以看出, 偏度系数为 11.693, 峰度系数为 189.55, 与正态分布相比, 存在明显的右偏态分布, 同时实际损失分布更尖峭和尾部更粗, 体现出巨灾风险损失具有 “右偏、厚尾” 的分布特征.

根据贝叶斯推断的步骤, 将 1995 – 2009 年洪水损失的数据作为先验信息, 将 2010 – 2017 年的数据作为样本信息. 先利用先验信息分别得出损失频数和损失强度的先验分布, 确定超参数, 再结合样本信息算出各自的后验分布, 得到损失分布模型的参数估计.

3.3 损失频数分布估计

损失频数分布描述了一定时间内损失发生的频数及概率规律, 考虑对先验信息里的年损失频数进行泊松分布检验, 即单样本 K-S 检验, 如表 3 所示, P 值为 0.182, 大于显著性水平 0.05, 不拒绝原假设, 说明与泊松分布无显著差异.

表 3 单一样本 K-S 检验

泊松分布参数	最极端差异 (绝对)	K-S 检验	渐近显著性
23.07	0.283	1.095	0.182

现假设洪水损失频数 $n \sim \mathrm{P}(\lambda)$, 则 n 的均值为 $\mathsf{E}(n) = \lambda$, 参数 λ 的共轭先验分布是伽马分布.

伽玛分布中超参数的确定:

首先对 1995 – 2009 年这 15 年间的数据整理加工得出平均每年损失发生的频数, 作为先验数据, 然后进行间隔为 5 的移动平均, 得到参数 λ 的 11 个估计值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{11}$, 运算得出先验均值和先验方差为

$$\begin{cases} \overline{\lambda} = \dfrac{1}{11}\sum\limits_{i=1}^{11}\lambda_i = 22.45, \\ s_\lambda^2 = \dfrac{1}{11-1}\sum\limits_{i=1}^{11}(\lambda_i - \overline{\lambda})^2 = 12.26. \end{cases}$$

令 $\overline{\lambda}$ 和 s_λ^2 分别等于 $\mathrm{Ga}(\alpha, \mu)$ 的期望和方差, 有

$$\begin{cases} \widehat{\alpha} = \dfrac{(\overline{\lambda})^2}{s_\lambda^2}, \\ \widehat{\mu} = \dfrac{\overline{\lambda}}{s_\lambda^2}. \end{cases}$$

解得 $\widehat{\alpha} = 41.11$ 和 $\widehat{\mu} = 1.83$. 因此得到 $\pi(\lambda) \sim \mathrm{Ga}(41.11, 1.83)$.

利用 2010 – 2017 年这 8 年的 152 次损失事件, 结合 λ 共轭先验分布的信息, 得到参数 λ 的后验分布 $p(\lambda \,|\, n) \sim \mathrm{Ga}(t+\alpha, \mu+k)$, 其中 $t = 152$, $k = 8$, 得到

$$\mathsf{E}(\lambda \,|\, n) = \frac{t+\alpha}{\mu+k} = 19.654.$$

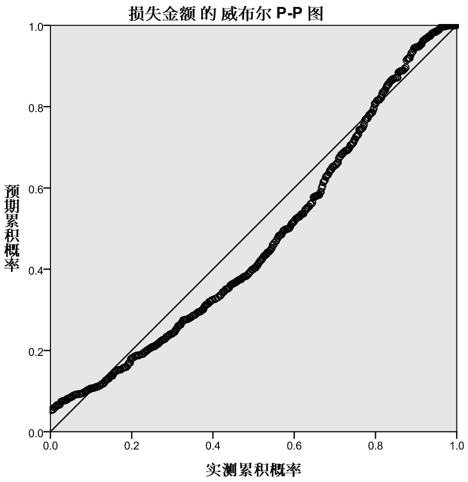
故我国的洪水年损失频数有 $n \sim \mathrm{P}(19.645)$.

3.4 损失额度分布估计

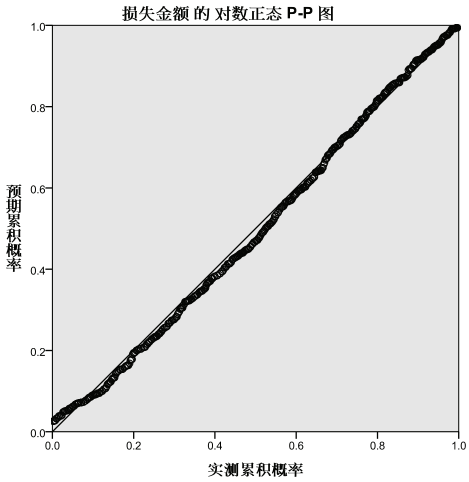
损失额度分布描述了所发生的损失大小及其概率规律, 假定我国洪水直接经济损失分布是连续型的, 选取韦布尔分布、对数正态分布、伽玛分布以及指数分布, 进行相关检验分布, P-P 图如图 1 所示.

由 P-P 图检验结果可知, (b) 图中数据分布基本贴近一条倾斜角为 45 度的向上直线, 说明对数正态分布对我国洪水损失额度分布的拟合效果最好.

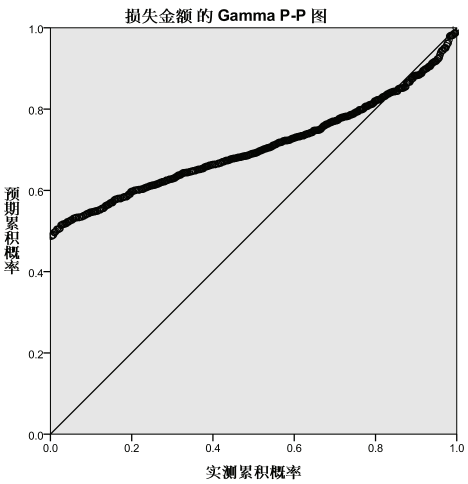
则假设洪水损失额度 $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, 服从对数正态分布, 即取对数后的 $\ln X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. 参数 μ 和 σ^2 的联合共轭先验分布为 $\text{N-IGa}(v_0, \mu_0, \sigma_0^2)$.



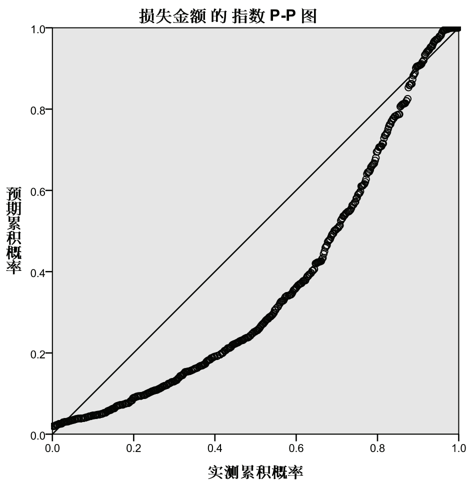
(a) 韦布尔分布 P-P 图



(b) 对数正态分布 P-P 图



(c) 伽玛分布 P-P 图



(d) 指数分布 P-P 图

图 1 损失程度的P-P检验图

(i) 正态–倒伽玛分布中超参数的确定

将 1995–2009 年的 346 个损失金额 (取对数后) 作为先验数据, 然后对其进行间隔为 5 的移动平均, 得到正态分布均值 μ 的 342 个估计值 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{342}$, 同理, 得到 σ^2 的 342 个估计值 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_{342}^2$, 进而得到 μ 的先验均值和先验方差以及 σ^2 的先验方差, 有

$$\begin{cases} \overline{\mu} = \dfrac{1}{342}\sum\limits_{i=1}^{342}\mu_i = 2.5990, \\ s_{\mu}^2 = \dfrac{1}{342-1}\sum\limits_{i=1}^{341}(\mu_i - \overline{\mu})^2 = 0.7684, \\ s_{\sigma^2}^2 = \dfrac{1}{342-1}\sum\limits_{i=1}^{341}(\sigma_i - \overline{\sigma}^2)^2 = 1.1284. \end{cases}$$

令 $\overline{\mu}$ 和 s_μ^2 分别等于 μ 的先验边际分布的期望和方差, $s_{\sigma^2}^2$ 等于 σ^2 的先验边际分布的方差, 即

$$\begin{cases}\mu_0=\overline{\mu},\\ \dfrac{v_0\sigma_0^2}{v_0-2}=s_\mu^2,\\ \Big(\dfrac{v_0\sigma_0^2}{2}\Big)^2\Big/\Big[\Big(\dfrac{v_0}{2}-1\Big)^2\Big(\dfrac{v_0}{2}-2\Big)\Big]=s_{\sigma^2}^2,\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}\widehat{\mu}_0=\overline{\mu},\\ \widehat{v}_0=\dfrac{2s_\mu^2}{s_{\sigma^2}^2}+4,\\ \widehat{\sigma}_0^2=s_\mu^2\Big(\dfrac{s_\mu^2}{s_{\sigma^2}^2}+1\Big)\Big/\Big(\dfrac{s_\mu^2}{s_{\sigma^2}^2}+2\Big).\end{cases}$$

解得

$$\widehat{v}_0=5.3619,\qquad \widehat{\mu}_0=2.5990,\qquad \widehat{\sigma}_0^2=0.4818,$$

故 μ 和 σ^2 的联合共轭先验分布为 N-IGa$(5.3619, 2.5990, 0.4818)$.

(ii) 正态分布参数的贝叶斯估计

综合 2010 年到 2017 年这 8 年的 152 次损失事件, 得到后验分布 N-IGa(v_n, μ_n, σ_n^2).

由公式 (14) 可以计算出 $\kappa_n=498$, $\mu_n=2.8063$, $v_n=157.3619$, $v_n\sigma_n^2=364.7015$, 则得到 μ 和 σ_n^2 的后验均值为

$$\begin{cases}\mu_n=2.8063,\\ \dfrac{v_n\sigma_n^2/2}{v_n/2-1}=2.3474.\end{cases}$$

得到我国洪水损失额度有 $X\sim \mathrm{LN}(2.8063, 2.3474)$.

§4.　洪水巨灾债券的定价研究

4.1　洪水巨灾债券的定义

洪水巨灾债券属于巨灾债券的一种, 所以和巨灾债券一样, 也具有相应的原始发行人, 即为保险公司或者是再保险公司; 对外发行人, 即 SPV (特殊目的机构); 投资者, 指与 SPV 签署巨灾债券的购买合同的人以及信托公司.

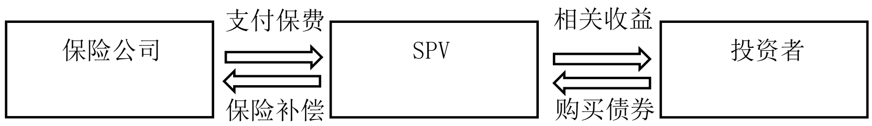


图 2　债券三方之间的联系

如图 2 所示, 三者的关系表现为: 保险公司以再保合同形式向SPV支付保险费, SPV 面对投资者发行巨灾债券, 从而募集资金, 当巨灾事件发生时, SPV 向发起人支付赔款, 而当

巨灾事件没有发生时, SPV 向投资者支付利息并且返还本金. SPV 就是专门的中间机构, 通过发行巨灾债券, 可以将保险公司的部分风险转移给债券投资者; SPV 既要确保当巨灾事件发生时保险公司能够得到保险补偿, 也要保障投资者获取与巨灾损失相关联的收益.

假设发行一年期的洪水巨灾债券, 债券收益率即票面利率为 R, 在不发生洪水巨灾的情况下, 投资者到期将获得收益率 R. 其触发点为 M (本文假设洪水巨灾保险的覆盖率为 30%, 因此 M 也设为我国洪水年度损失的 30%), 保险公司年度损失达到触发点 M 的概率为 P.

收益率取决于洪水巨灾损失是否达到触发点及其出现的概率, 而不同的触发条件对应的收益率也会有所不同. 本文根据资本资产定价模型来确定我国洪水巨灾债券的收益率 [14]. 资本资产定价模型的公式如下:

$$\mathsf{E}(R_f) = R_f + \beta_i[\mathsf{E}(R_m) - R_f], \tag{17}$$

$\mathsf{E}(R_f)$ 表示某一种资产的期望收益率, R_f 是无风险收益率, 是纯粹的货币时间价值, β_i 是证券的 Beta 系数, 是用以度量一项资产系统风险的指针, 表示了资产的收益率对市场的敏感程度, $\mathsf{E}(R_m)$ 是市场组合的期望收益率, $\mathsf{E}(R_m) - R_f$ 则表示市场溢价. 如果投资者需要承担额外的风险, 那么他将需要根据无风险回报赚取相应的溢价.

假定巨灾债券到期时的风险损失没有滞后, 在到期日 T, 所有的应付本金和利息的支付立即兑现. 考虑设计一类零息巨灾债券, 同零息债券类似, 是一种以贴现方式发行, 不附息票, 在到期日按票面值支付的巨灾债券. 记到期日为 T, 面值为 F, 价格支付函数 $V(T,F)$ 依赖于 T 和 F, 其公式 [15] 为

$$V(T,F) = [(1-A)\times P\times F + (1-P)\times F]\mathrm{e}^{-RT}, \tag{18}$$

其中, A 表示在巨灾损失达到触发点时的本金损失比率, P 表示巨灾损失达到触发点时的概率, F 为 100 的债券面值, 采用一年期限的债券, $T=1$.

4.2 洪水巨灾债券触发点的确定

所谓触发, 即指在巨灾事件发生之前先选定一个特定的指标作为参考, 当巨灾风险事件发生后, 巨灾债券的偿付条件是否得到触发取决于实际损失是否达到或者超过选定的参考指标. 巨灾债券常用的触发机制包括了实际损失触发机制、参数触发机制以及混合损失触发机制.

本文采用了实际损失触发机制, 原因是:

(i) 实际损失触发机制与传统的巨灾再保险最为接近, 不存在基差风险;

(ii) 洪水灾害损失主要是在一定期间内对某一地区造成的直接经济损失.

采用蒙特卡罗模拟法计算不同触发点所对应的概率, 具体操作步骤如下:

(i) 根据洪水损失频数的分布函数模拟生成服从 P(19.645) 的随机数;

(ii) 将 (i) 的数值作为迭代次数, 模拟生成服从 LN(2.8063, 2.3474) 的随机数, 进行加总, 就得到总损失值 SUM, 取 SUM 的 30% 记作 sum 大于 M, 记本次结果为 1, 反之记为 0;

(iii) 将以上步骤重复 N 次 (本文规定 $N = 10\,000$, 将所有输出结果相加的和记为 S, 因此得到概率 $P = S/N$).

得到我国洪水年度损失在不同触发点下所发生的概率, 如表 4 所示.

表 4　我国洪灾年度损失及其频率

洪灾损失	触发值 M	概率 P
500	150	0.9651
1 000	300	0.8565
1 500	450	0.7271
2 000	600	0.6138
3 000	900	0.4405
5 000	1 500	0.2527
7 000	2 100	0.1621
9 000	2 700	0.1083
10 000	3 000	0.0937

根据表 4 数据选取 (触发值, 概率) 分别为 (1 500, 0.2527)、(2 700, 0.1083)、(3 000, 0.0937) 三个点作为本金保证型洪水巨灾债券、本金 50% 保证型洪水巨灾债券和本金没收型洪水巨灾债券的触发点.

4.3　洪水巨灾债券收益率的确定

因为巨灾债券与其他金融市场产品之间的相关系数比较低, 且流动性也比较差, 所以投资者购买巨灾债券时会要求高于普通债券的收益率.

假定无风险利率 R_f 为 4%, 市场组合的期望收益率 $\mathsf{E}(R_m)$ 为 12%, 洪水巨灾债券 β_i 为 0.2. 因此, 不同类型洪水巨灾债券的票面利率为:

(A) 本金保证型洪水巨灾债券, 巨灾损失达到触发点时收益率为 0%, 有

$$\mathsf{E}(R) = R(1-P) + 0 \times P = R_f + \beta_i[\mathsf{E}(R_m) - R_f], \tag{19}$$

$$R = \frac{R_f + \beta_i[\mathsf{E}(R_m) - R_f]}{1-P} = \frac{4\% + 0.2 \times (12\% - 4\%)}{1 - 25.27\%} = 7.49\%.$$

(B) 本金 50% 保证型洪水巨灾债券, 巨灾损失达到触发点时收益率为 -50%, 有

$$\mathsf{E}(R)=R(1-P)+(-0.5)\times P=R_f+\beta_i[\mathsf{E}(R_m)-R_f], \tag{20}$$

$$R=\frac{R_f+\beta_i[\mathsf{E}(R_m)-R_f]+0.5P}{1-P}=\frac{4\%+0.2\times(12\%-4\%)+0.5\times 10.83\%}{1-10.83\%}$$
$$=12.35\%.$$

(C) 本金没收型洪水巨灾债券, 巨灾损失达到触发点时收益率为 -100%, 有

$$\mathsf{E}(R)=R(1-P)+(-1)\times P=R_f+\beta_i[\mathsf{E}(R_m)-R_f], \tag{21}$$

$$R=\frac{R_f+\beta_i[\mathsf{E}(R_m)-R_f]+P}{1-P}=\frac{4\%+0.2\times(12\%-4\%)+9.37\%}{1-9.37\%}=16.52\%.$$

4.4 洪水巨灾债券价格的确定

债券定价是当前金融市场研究的重要内容之一, 其价格的高低能够直接影响到发行人的融资成本和投资者的获利空间.

由公式 (18), 则不同类型的洪水巨灾债券价格如下:

(A) 本金保证型洪水巨灾债券, 票面利率为 $R=7.49\%$, 触发点为 $(1\,500, 0.2527)$.

$$V(T,F)=[(1-0)\times 0.2527\times 100+(1-0.2527)\times 100]\mathrm{e}^{-7.49\%}=92.78.$$

(B) 本金 50% 保证型洪水巨灾债券, 票面利率为 $R=12.35\%$, 触发点为 $(2\,700, 0.1083)$.

$$V(T,F)=[(1-0.5)\times 0.1083\times 100+(1-0.1083)\times 100]\mathrm{e}^{-12.35\%}=83.60.$$

(C) 本金没收型洪水巨灾债券, 票面利率为 $R=16.52\%$, 触发点为 $(3\,000, 0.0937)$.

$$V(T,F)=[(1-1)\times 0.0937\times 100+(1-0.0937)\times 100]\mathrm{e}^{-16.52\%}=76.83.$$

所以, 针对我国一年期的洪水巨灾债券的初步设计如表 5 所示.

表 5 我国一年期洪水巨灾债券具体条款

本金保证比例 (%)	触发值 (亿元)	触发概率 (%)	收益率 (%)	债券价格 (元)
100	1 500	25.27	7.49	92.78
50	2 700	10.83	12.35	83.60
0	3 000	9.37	16.52	76.83

以本金 50% 保证型洪水巨灾债券为例: 债券投资者以 83.60 元购买了面值为 100 元、本金保证比例为 50% 的洪水巨灾债券, 在一年内, 假若我国洪涝灾害累计造成的直接经济损失达到或超过 2 700 亿元, 则投资者在债券到期日时只能获得 50 元; 反之损失没有达到 2 700 亿元, 则投资者在债券到期日时能获得 100 元.

§5. 结 论

本文通过收集 1995 – 2017 年的我国洪水损失数据, 使用贝叶斯推断得到我国洪水巨灾的损失频数和损失程度的损失分布, 采用蒙特卡罗模拟计算得出我国洪水年度损失在不同的触发条件下对应的概率分布情况, 选取了 $(1\,500, 0.2527)$、$(2\,700, 0.1083)$、$(3\,000, 0.0937)$ 三个点分别作为本金保证型洪水巨灾债券、本金 50% 保证型洪水巨灾债券和本金没收型洪水巨灾债券的触发点, 并分别得出 7.49%、12.35%、16.52% 的票面利率, 最后参考零息债券一般定价法计算出本金保证型、本金 50% 保证型和本金没收型这三种债券的价格, 得到以下结论: (i) 我国洪水巨灾的损失频数服从泊松分布, 其参数为 19.645, 损失额度服从对数正态分布, 其参数为 2.8063 和 2.3474; (ii) 在不同的触发条件下, 随着触发值逐渐增大, 对应的触发概率在逐渐减小, 票面利率也随之升高; (iii) 从本金保证型洪水巨灾债券、本金 50% 保证型洪水巨灾债券和本金没收型洪水巨灾债券相对应的债券价格可以发现: 债券的价格随着本金保证比例的降低而降低、随着本金损失比例的升高而降低, 即投资风险会与收益成正比, 同时对于本金损失比例较高的债券, 触发值较高, 对应的触发概率较低, 这将有益于债券的发行.

不足之处: (i) 运用贝叶斯推断估计损失分布模型的参数时没有考虑专家对分布给出的意见, 可能导致其估计存在一定的偏差; (ii) 只参考了零息债券一般定价法对我国洪水巨灾债券定价, 没有考虑违约风险和道德风险等在定价模型中的影响.

参 考 文 献

[1] COX S H, PEDERSEN H W. Catastrophe risk bonds [J]. *N Am Actuar J*, 2000, **4(4)**: 56–82.

[2] MA Z G, MA C Q. Pricing catastrophe risk bonds: a mixed approximation method [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **52(2)**: 243–254.

[3] BRAUN A. Pricing in the primary market for cat bonds: new empirical evidence [J]. *J Risk Insur*, 2016, **83(4)**: 811–847.

[4] 张行南, 罗健, 陈雷, 等. 中国洪水灾害危险程度区划 [J]. 水利学报, 2000, **31(3)**: 1–7.

[5] 刘新立. 区域水灾风险评估的理论与实践 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.

[6] 张志海, 王伟. 我国发行洪水巨灾债券的可行性和运作机制研究 [J]. 生产力研究, 2008, **(7)**: 40–41.

[7] 王媛媛. 关于巨灾风险证券化在我国实施对策的探讨 [J]. 中国科技纵横, 2011, **(11)**: 117–117.

[8] 康晗彬, 邢天才. 考虑多风险因素的我国巨灾债券定价研究 [J]. 保险研究, 2013, **(8)**: 94–106.

[9] 田玲, 向飞. 基于风险定价框架的巨灾债券定价模型比较研究 [J]. 武汉大学学报 (哲学社会科学版), 2006, **59(2)**: 168–174.

[10] 翟鸿顺. 我国巨灾债券产品设计与定价研究 [D]. 天津: 天津财经大学, 2017.

[11] 韦勇凤, 李勇, 巴曙松. 基于贝叶斯推断的巨灾损失数据整合方法与建模 [J]. 中国科学技术大学学报, 2013, **43(3)**: 212–216.

[12] 陈倩. 小样本条件下操作风险度量中的参数估计研究 [J]. 北京理工大学学报 (社会科学版), 2015, **17(3)**: 92–99.

[13] 甘柳, 欧阳资生. 我国洪灾保险债券的定价研究 [J]. 湖南商学院学报, 2011, **18(6)**: 41–44.

[14] 罗璇. 基于均衡定价理论的我国洪水巨灾债券定价研究 [D]. 武汉: 武汉科技大学, 2018.

[15] 展凯, 丁冬. 基于贝叶斯推断的巨灾债券定价研究 [J]. 长沙理工大学学报 (社会科学版), 2018, **33(3)**: 88–95.

Research on Flood Loss Distribution and Catastrophe Bond Pricing Based on Bayesian Inference

OU Hui XIE Zhendong LI Junxiong WANG Qiuling

(*School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha, 410081, China*)

Abstract: Taking flood catastrophe risk in China as the research background, aiming at the characteristics of flood loss "low frequency and high loss", Bayesian inference method is used to fit the loss distribution, and Bayesian inference is used to obtain the loss frequency distribution and loss quota distribution of flood in China. On this basis, Monte Carlo simulation method is used to calculate the probability distribution of annual flood loss in China under different trigger conditions, and then CAPM is used to study the pricing of flood catastrophe bonds in China. It is concluded that under different trigger conditions, as the trigger value increases gradually, the corresponding trigger is triggered. Comparing the three types of bonds, it can be found that the price of bonds decreases with the decrease of principal guarantee ratio and the increase of principal loss ratio, that is, the investment risk is directly proportional to the return, which provides reference for issuing flood catastrophe bonds in China.

Keywords: catastrophic bond pricing; Bayesian inference; CAPM; Monte Carlo simulation

2010 Mathematics Subject Classification: 62P05; 62K05; 62F12