

对一类离散时间休假排队平稳指标的数值计算与渐近分析*

张 宏 波

(河南财政金融学院统计与数学学院, 郑州, 450046)

摘 要: 本文研究休假时间服从 T-IPH 分布的 Geo/Geo/1 休假排队, 其中 T-IPH 分布是由可数状态吸收生灭链定义的离散时间无限位相分布. 对多重休假和单重休假两种情形, 基于系统平稳方程和复分析方法, 首先得到了排队系统平稳队长和平稳逗留时间的概率母函数 (PGF); 其次, 通过对 PGF 分析, 进一步得到了平稳附加队长和附加逗留时间分布律的迭代计算结果和渐近结果; 最后, 通过数值例子说明了方法的有效性.

关键词: Geo/Geo/1 排队; T-IPH 分布; 休假; 平稳指标; 渐近分析

中图分类号: O226

英文引用格式: ZHANG H B. Numerical computation and tail asymptotic for stationary indices of a discrete-time vacation queue [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(1): 13-25. (in Chinese)

§1. 引 言

离散时间休假排队系统由于在计算机网络、通信系统、控制系统等领域有广泛的应用因而得到了大量的研究. 例如, Tian 和 Zhang^[1]考虑了离散时间 GI/Geo/1 多重休假排队, 关于离散时间 Geo/G/1 休假排队的讨论可参见文献 [2]. Alfa^[3]研究了到达时间, 服务时间及休假时间均服从离散时间 PH (位相) 分布的休假排队. 在普通休假期, 服务台完全停止工作, 即使在此期间有顾客到达. 与此不同, Servi 和 Finn^[4]引进了一类工作休假策略, 在工作休假期, 服务台以较低的速率为到达的顾客提供服务. 关于离散时间工作休假模型也有很多研究. 最近, Li 和 Tian^[5]考虑了休假可中断的 GI/Geo/1 工作休假模型, Tian 等^[6]研究了 Geo/Geo/1 工作休假排队. 另外, 关于离散时间休假排队模型的更多介绍可以参见专著 [7] 和 [8] 以及其中引用的文献.

我们知道, 由 Neuts^[9]引进的 PH 分布在随机模型的分析中有着重要的应用. PH 分布是有限状态吸收 Markov 过程吸收时间的分布. Shi 等^[10]把 PH 分布推广到可数状态的情形, 连续时间情形称为 SPH 分布, 离散时间情形称为 IPH 分布, 统称为无限位相分布. 无限位相分布同样在随机模型中有重要的应用^[7, 11]. 在本文中, 我们考虑经典 Geo/Geo/1 工作

*河南省科技攻关计划项目 (批准号: 172102210242) 资助.

E-mail: zhanghb-168@163.com.

本文 2019 年 5 月 30 日收到, 2019 年 9 月 22 日收到修改稿.

休假排队模型, 其中假设休假时间服从表示为 (α, T) 的 IPH 分布, 其中 $\alpha = (1, 0, 0, \dots)$,

$$T = \begin{pmatrix} b & a & & \\ c & b & a & \\ & c & b & a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

这里假设 $a, b, c \in (0, 1)$, $a + b + c = 1$ 且 $c > a$. 这种特殊的 IPH 分布我们称为 T-IPH 分布, 它是可数位相吸收生灭链吸收时间的分布, 显然经典的 Geo/Geo/1 排队忙期服从 T-IPH 分布, 因而该分布有直观的应用背景.

对休假时间服从 T-IPH 分布的 Geo/Geo/1 休假排队, 我们首先用 QBD (拟生灭) 过程建模, 通过用复分析方法对过程的联合平稳分布的 PGF (概率母函数) 进行分析, 首先得到了排队系统平稳队长的附加队长和平稳逗留时间的附加延时分布的 PGF; 然后, 在此基础上, 给出了这两个性能指标的数值计算方法以及尾部渐近特征. 结果表明, 这时性能指标的尾部不是几何衰减, 而是要对几何衰减项乘以指数为 $-3/2$ 的幂律项.

本文以下各节内容安排如下, 第 2 节给出了多重工作休假情形的 QBD 过程模型, 第 3 节通过复分析方法对所建立模型分析得到相关平稳指标分布的 PGF; 然后第 4 节和第 5 节以 PGF 为基础进一步讨论了平稳指标的数值计算以及尾部衰减特征; 第 6 节给出了相应的单重休假模型的结果而略去了细节; 第 7 节给出了若干数值例子; 最后第 8 节是本文的小结部分.

§2. 模型描述

考虑 Geo/Geo/1 排队, 假设顾客的到达发生在时隙 $t = n^+$, $n = 1, 2, \dots$, 到达过程是参数为 p 的 Bernoulli 过程; 假设服务的开始和结束都发生在时隙 $t = n^-$, $n = 1, 2, \dots$, 且服务时间服从参数为 q 的正整数值几何分布. 当一次服务结果时, 如果系统为空, 则服务台立即进入一个长度服从表示为 (α, T) 的 T-IPH 分布的休假期, 在休假期, 服务台将完全停止工作. 当一次休假结束后, 如果系统中有顾客, 则服务台开始为顾客提供服务, 正规忙期开始, 否则, 服务台进入另一个独立的休假.

令 L_n 表示时刻 n 时系统中的顾客数, 从而在时隙 $t = n^-$ 完成服务的顾客将不再计入 L_n . 另外, 定义变量

$$J_n = \begin{cases} 0, & \text{如果服务台在时刻 } n \text{ 位于正规忙期;} \\ i, & \text{如果服务台在时刻 } n \text{ 位于休假状态且位于位相 } i. \end{cases}$$

则二维随机过程 $\{(L_n, J_n), n \geq 0\}$ 的状态空间为 $E = \{(0, j), j \geq 1\} \cup \{(l, j), l \geq 1, j \geq 0\}$ 而状态转移图如图 1 所示. 在图中, 对任意的实数 $x \in (0, 1)$, 规定 $\bar{x} = 1 - x$.

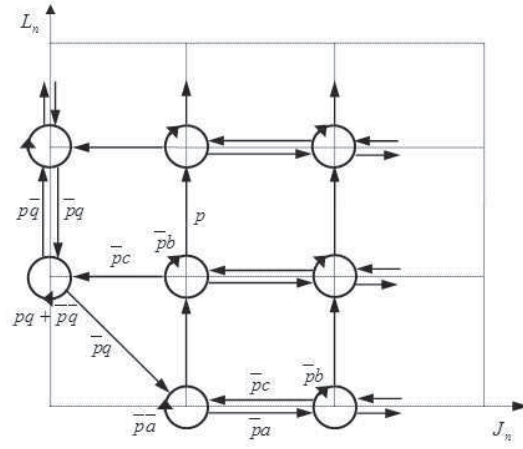


图 1 QBD 过程 $\{(L_n, J_n), n \geq 0\}$ 的状态转移图

当把状态按字典规则排列时, 根据图 1 可知过程 $\{(L_n, J_n), n \geq 0\}$ 的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & \\ C & B & A & \\ & C & B & A \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & p & & \\ & 0 & p & \\ & & 0 & p \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \bar{p}a & \bar{p}a & & \\ \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a & \\ & \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} pq + \bar{p}q & 0 & & \\ \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a & \\ & \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$A = \text{diag}\{\bar{p}q, p, p, \dots\}, \quad C = \text{diag}\{\bar{p}q, 0, 0, \dots\}.$$

所以, 所建立的过程是一个无限位相 QBD 过程.

由文献 [12] 中定理 1.2.1 出发易证明, 上述 QBD 过程遍历的充分必要条件是

$$\rho \triangleq \frac{pq}{\bar{p}q} < 1. \quad (2)$$

在此条件下, 过程的平稳分布唯一存在, 假设平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$, 其中 $\pi_0 =$

$(\pi_{01}, \pi_{02}, \dots)$, 而对 $i = 1, 2, \dots$, $\pi_i = (\pi_{i0}, \pi_{i1}, \dots)$. 平稳分布 π 是平稳方程 $\pi = \pi P$ 满足归一化条件 $\pi e = e$ 的唯一解.

§3. 平稳指标

本节我们给出平稳队长和平稳逗留时间的 PGF, 为此, 令

$$G(z, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij} z^i s^j, \quad |z| \leq 1, |s| \leq 1, \quad (3)$$

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i0} z^i, \quad |z| \leq 1, \quad (4)$$

其中假设 $\pi_{00} = 0$. 有下述引理:

引理 1 联合平稳分布的概率生成函数 $G(z, s)$ 的表达式为

$$G(z, s) = \frac{M(z, s)g(z) + N(z, s)}{zK(z, s)}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} K(z, s) &= \bar{p}as^2 - (1 - \bar{p}b)s + pzs + \bar{p}c, \\ M(z, s) &= z(\bar{p}as^2 + \bar{p}bs + \bar{p}c) + s[pqz^2 - (pq + \bar{p}q)z - \bar{p}q], \\ N(z, s) &= \delta \bar{p}zs(1 - s), \end{aligned}$$

且 $\delta = \bar{p}(c - a)(1 - \rho)$.

证明: 首先从平稳方程 $\pi = \pi P$ 出发经过简单的计算可得 (5) 式, 其中在 $N(z, s)$ 的表达式中, $\delta = \pi_{01}c + \pi_{10}q$ 是一个待定常数. 其次, 把 $M(z, s)$ 看作关于变量 z 的多项式, 则容易验证该多项式在 $(0, 1)$ 内有一个根, 并记作 $z(s)$, 且该根满足 $z(s) \rightarrow 1, s \rightarrow 1$. 把根 $z(s)$ 代入 (5) 可得

$$G(z(s), s) = \frac{\delta \bar{p}s(1 - s)}{\bar{p}as^2 - (1 - \bar{p}b)s + pz(s)s + \bar{p}c},$$

令 $s \rightarrow 1$, 并由 L'Hospital 法则, 可确定 δ 的值, 从而完成了引理的证明. \square

引理 2 生成函数 $g(z)$ 的表达式为

$$g(z) = \frac{\delta z[1 - R(z)]}{q(1 - z)(1 - \rho z)}, \quad (6)$$

其中

$$R(z) = \frac{1}{2\bar{p}a} [1 - \bar{p}b - pz - \sqrt{(1 - \bar{p}b - pz)^2 - 4\bar{p}^2ac}].$$

证明: 在方程 (5) 中, 把 $K(z, s)$ 看成变量 s 的多项式, 则该多项式有如下两个根

$$s_1(z) = R(z) \triangleq \frac{1}{2\bar{p}a}[1 - \bar{p}b - pz - \sqrt{\Delta(z)}], \quad s_2(z) = \frac{a}{c}R(z),$$

其中 $\Delta(z) = (1 - \bar{p}b - pz)^2 - 4\bar{p}^2ac$. 若 $|z| \leq 1$, 由简单的计算容易验证 $0 < s_1(z) < s_2(z)$, $s_1(z) \leq 1$.

现在, 由 (5) 式可得

$$G(z, s) = \frac{M(z, s)g(z) + N(z, s)}{\bar{p}az[s - s_1(z)][s - s_2(z)]}.$$

因为当 $|z| \leq 1$ 时 $G(z, s_1(z))$ 解析, 所以 $s_1(z)$ 必须是上式右边分子的零点, 从而可得

$$g(z) = -\frac{N(z, R(z))}{M(z, R(z))}.$$

最后, 由 $R(z)$ 的定义可得

$$M(z, R(z)) = R(z)(z - 1)(\bar{p}q - p\bar{q}z),$$

由此即得引理的结论. \square

定理 3 令 L 表示平稳状态时系统中的顾客数, 且令

$$L(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P(L = i), \quad |z| \leq 1$$

为 L 的概率生成函数, 则有

$$L(z) = \frac{\alpha(1 - \rho)(\bar{p} + pz)[1 - R(z)]}{(1 - \rho z)(1 - z)}, \quad (7)$$

其中 $\alpha \triangleq \bar{p}(c - a)/p$ 是一个正常数.

证明: 显然

$$L(z) = G(z, 1) = \frac{M(z, 1)g(z) + N(z, 1)}{zK(z, 1)},$$

再由简单的计算可得

$$K(z, 1) = p(z - 1), \quad M(z, 1) = q(pz + \bar{p})(z - 1), \quad N(z, 1) = 0.$$

从而有

$$L(z) = \frac{q(pz + \bar{p})}{pz}g(z),$$

因而由 (6) 式即可得定理的结论. \square

对休假排队系统, 一个经典的结论是其平稳队长及平稳逗留时间可以分解为两个相互独立的随机变量之和, 其中之一为相应的无休假排队的平稳指标, 而另一个是由休假引起的附加队长 (记为 L_d) 或附加延时 (记为 S_d). 对本文的排队模型, 有下述结论:

定理 4 平稳附加队长 L_d 和附加延时 S_d 的概率生成函数分别如下式所示

$$L_d(z) = \frac{\alpha(\bar{p} + pz)[1 - R(z)]}{1 - z}, \quad S_d(z) = \frac{(c - a)z[\bar{p} - T(z)]}{1 - z}, \quad (8)$$

其中

$$T(z) = \frac{1}{2a} [1 + \bar{p}b - z - \sqrt{(1 + \bar{p}b - z)^2 - 4\bar{p}^2ac}].$$

证明: 第一个结论由 (7) 式显然可得, 细节从略. 第二个结论由 (7) 以及变换形式的 Little 公式 $L(z) = S(\bar{p} + pz)^{[7]}$ 可得. \square

§4. 平稳指标的数值计算

在平稳附加队长和附加延时 PGF 的基础上, 本小节讨论这两个平稳指标的数值计算问题. 由 PGF 出发进行数值计算是一种重要的方法^[13]. 有下述两个结论.

定理 5 平稳附加队长 L_d 的分布律满足

$$P(L_d = k) = \begin{cases} \alpha\bar{p}(1 - r), & k = 0; \\ \alpha\left(1 + pr_k - \sum_{i=0}^k r_i\right), & k \geq 1, \end{cases} \quad (9)$$

其中 r_k 由递推关系

$$r_{k+1} = \frac{1}{D_1} \left(pr_k + \bar{p}a \sum_{i=1}^k r_i r_{k-i+1} \right), \quad k \geq 0 \quad (10)$$

及初值 $r_0 = r \triangleq (2\bar{p}a)^{-1}(1 - \bar{p}b - D_1)$ 所确定, 而 $D_1 \triangleq \sqrt{(1 - \bar{p}b)^2 - 4\bar{p}^2ac}$.

证明: 只须把 $L_d(z)$ 展开为 z 的幂级数, 记其幂级数展开为 $\sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$. 再令 $\sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k$ 是 $R(z)$ 幂级数, 则由方程 (8) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k &= \frac{\alpha}{1 - z} \left[(\bar{p} + pz) \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k \right) \right] \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k F_i \right) z^k, \end{aligned}$$

这里由简单的计算可得

$$F_k = \begin{cases} \bar{p}(1 - r), & k = 0; \\ p(1 - r) - \bar{p}r_1, & k = 1; \\ -\bar{p}r_k - pr_{k-1}, & k \geq 2, \end{cases}$$

其中 $r \triangleq R(0)$. 由此即可得 (9).

最后, 因为 $R(z)$ 满足方程 $\bar{p}c - (1 - \bar{p}b)R(z) + \bar{p}aR^2(z) = 0$, 把 $R(z)$ 的幂级数代入该式可得

$$\begin{cases} \bar{p}c - (1 - \bar{p}b)r_0 + \bar{p}ar_0^2 = 0, \\ br_k - (1 - \bar{p}b)r_{k+1} + \bar{p}a \sum_{i=0}^{k+1} r_i r_{k-i+1} = 0, \quad k \geq 0. \end{cases}$$

由此即可得迭代公式 (10), 从而完成了定理的证明. \square

定理 6 平稳附加延时 S_d 的概率分布律为

$$P(S_d = k) = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ (c - a)\left(\bar{p} - \sum_{i=0}^{k-1} t_i\right), & k \geq 1, \end{cases} \quad (11)$$

其中 t_k 由迭代公式

$$t_{k+1} = \frac{1}{D_2} \left(t_k + a \sum_{i=1}^k t_i t_{k-i+1} \right), \quad k \geq 0 \quad (12)$$

和初始条件 $t_0 = (2a)^{-1}(1 + \bar{p}b - D_2)$ 所确定, 而 $D_2 \triangleq \sqrt{(1 + \bar{p}b)^2 - 4\bar{p}^2ac}$.

证明: 证明方法与定理 5 类似, 细节从略. \square

§5. 平稳指标的渐近分析

本节从公式 (8) 出发进一步给出平稳附加队长和附加延时的尾部衰减特征, 为此需要下述引理^[14].

引理 7 假设函数 $f(z)$ 在区域

$$D(\phi, \varepsilon) = \left\{ z : |z| \leq 1 + \varepsilon, |\operatorname{Arg}(z - 1)| \geq \phi, \varepsilon > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

中除了 $z = 1$ 外解析且满足

$$f(z) \sim K(1 - z)^s, \quad z \rightarrow 1, \quad z \in D(\phi, \varepsilon),$$

其中 K 是一个正常数, s 不是非负整数, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时有

$$C_k[f(z)] \sim \frac{K}{\Gamma(-s)} \frac{1}{k^{s+1}},$$

这里 $C_k[f(z)]$ 表示在 $z = 0$ 解析的函数 $f(z)$ 在该点的 Taylor 展开式中 z^k 的系数.

现在讨论两个平稳指标的尾部渐近特征, 首先, 由常规的代数计算可得

$$\Delta(z) = (1 - \bar{p}b - pz)^2 - 4\bar{p}^2ac = \frac{p^2}{\eta\gamma}(1 - \eta z)(1 - \gamma z),$$

其中

$$\eta = \frac{p}{1 - \bar{p}b - 2\bar{p}\sqrt{ac}}, \quad \gamma = \frac{p}{1 - \bar{p}b + 2\bar{p}\sqrt{ac}}$$

是两个满足 $\eta, \gamma \in (0, 1)$ 和 $\eta > \gamma$ 的常数, 有下述定理:

定理 8 当 $k \rightarrow \infty$ 有

$$P(L_d = k) \sim \sigma_1 \frac{\eta^{k-1}}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad (13)$$

其中

$$\sigma_1 = \frac{(p + \bar{p}\eta)(c - a)\sqrt{\eta - \gamma}}{4a(1 - \eta)\sqrt{\gamma\pi}}$$

是一个正常数.

证明: 首先, 令

$$l(z) = \frac{1 - R(z)}{1 - z} = \frac{-p - \bar{p}(c - a) + pz + \sqrt{\Delta(z)}}{2\bar{p}a(1 - z)}, \quad (14)$$

其中第二个等式可经简单的计算验证.

其次, 因为 $z = 1$ 是 (14) 式分母的零点, 从而必是该式分子的零点, 所以有 $\sqrt{\Delta(1)} = \bar{p}(c - a)$, 因而 (14) 式可改写为

$$l(z) = \frac{1}{2\bar{p}a} \left[-p + \frac{\sqrt{\Delta(z)} - \sqrt{\Delta(1)}}{1 - z} \right].$$

又因为

$$\frac{\sqrt{\Delta(z)} - \sqrt{\Delta(1)}}{1 - z} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(1)}} \left[\frac{\Delta(z) - \Delta(1)}{1 - z} - \sqrt{\Delta(z)} \frac{\sqrt{\Delta(z)} - \sqrt{\Delta(1)}}{1 - z} \right],$$

且上式右边第一项是一个 1 次多项式, 所以对 $k \geq 2$ 有

$$C_k \left[\frac{\sqrt{\Delta(z)} - \sqrt{\Delta(1)}}{1 - z} \right] = -\frac{1}{\sqrt{\Delta(1)}} C_k[H(z)],$$

其中

$$H(z) = \sqrt{\Delta(z)} \frac{\sqrt{\Delta(z)} - \sqrt{\Delta(1)}}{1 - z}$$

在区域

$$D(\phi, \varepsilon) = \left\{ z : |\eta z| \leq 1 + \varepsilon, |\text{Arg}(\eta z - 1)| \geq \phi, \varepsilon > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

内除了 $\eta z = 1$ 以外解析, 所以 $l(z)$ 也满足该性质.

另外, 容易验证

$$l(z) \sim -\frac{p\sqrt{\eta-\gamma}}{2\bar{p}a(1-\eta)\sqrt{\gamma}}\sqrt{1-\eta z}, \quad \eta z \rightarrow 1,$$

所以由引理 7 可得

$$C_k[l(z)] \sim \frac{p\sqrt{\eta-\gamma}}{4\bar{p}a(1-\eta)\sqrt{\gamma\pi}} \frac{\eta^k}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad k \rightarrow \infty,$$

这里用到了公式 $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

最后, 因为 $L_d(z) = \alpha(\bar{p} + pz)l(z)$, 所以当 $\eta z \rightarrow 1$ 时有 $L_d(z) \sim \alpha(\bar{p} + p/\eta)l(z)$, 从而可得定理结论, 其中

$$\sigma_1 = \frac{\alpha(p + \bar{p}\eta)p\sqrt{\eta-\gamma}}{4\bar{p}a(1-\eta)\sqrt{\gamma\pi}} = \frac{(p + \bar{p}\eta)(c-a)\sqrt{\eta-\gamma}}{4a(1-\eta)\sqrt{\gamma\pi}}$$

是一个正常数. \square

定理 9 当 $k \rightarrow \infty$ 时有

$$P(S_d = k) \sim \sigma_2 \frac{\theta^{k-1}}{k^{3/2}},$$

其中

$$\sigma_2 = \frac{(c-a)\sqrt{\theta-\xi}}{4a(1-\theta)\sqrt{\xi\pi}}$$

是一个正常数而

$$\theta = \frac{1}{1 + \bar{p}b - 2\bar{p}\sqrt{ac}}, \quad \xi = \frac{1}{1 + \bar{p}b + 2\bar{p}\sqrt{ac}}$$

是位于 $(0, 1)$ 的正常数且满足 $\theta > \xi$.

证明: 证明与定理 8 的证明类似, 细节从略. \square

注意, 由 (7) 式可知, $L(z) = [(1-\rho)/(1-\rho z)]L_d(z)$, 而当 $\eta z \rightarrow 1$ 时, $(1-\rho)/(1-\rho z) \rightarrow \eta(1-\rho)/(\eta-\rho)$, 所以当 $\eta > \rho$ 时, 定理 8 的结论对平稳队长 L 也成立, 只是需对系数 σ_1 作一修正. 对定理 9 以及下面的定理 10 也可做类似的说明.

§6. 单重休假排队

本小节讨论相应的单重休假排队模型. 这时, 当一次休假结束后, 如果系统中没有顾客, 服务台将进入闲期等待顾客的到来, 其它假设类似多重休假情形. 对该模型, 采用和第 2 节相同的记号, 建立 QBD 过程 $\{(L_n, J_n), n \geq 0\}$, 这时 J_n 的定义如下:

$$J_n = \begin{cases} 0, & \text{如果服务台在时刻 } n \text{ 位于闲期或正规忙期;} \\ i, & \text{如果服务台在时刻 } n \text{ 位于休假状态且位于位相 } i. \end{cases}$$

所以当 $L_n = 0$ 时可以有 $J_n = 0$, 即存在状态 $(0, 0)$, 从而这时所建立过程的状态空间为 $E = \{(l, j) : l, j = 0, 1, \dots\}$, 而转移概率矩阵 \mathbf{P} 类似于 (1) 式, 只是此时

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 - p\bar{q} & 0 & & & \\ \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a & & \\ & \bar{p}c & \bar{p}b & \bar{p}a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

而 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

对该模型, 经过类似的分析知平稳附加队长 L_d 和附加延时 S_d 的 PGF 的表达式分别为

$$L_d(z) = \beta + (1 - \beta)\alpha \frac{(\bar{p} + pz)[1 - R(z)]}{1 - z},$$

$$S_d(z) = \beta + (1 - \beta) \frac{(c - a)z[\bar{p} - T(z)]}{1 - z},$$

其中

$$\beta = \left[1 + \frac{p\bar{q}}{\bar{p}^2 r(c - a)}\right]^{-1} \in (0, 1)$$

是常数. 由此进一步可得

定理 10 对平稳附加队长 L_d 有

$$P(L_d = k) = \begin{cases} \beta + (1 - \beta)\alpha\bar{p}(1 - r), & k = 0; \\ (1 - \beta)\alpha\left(1 + pr_k - \sum_{i=0}^k r_i\right), & k \geq 1. \end{cases}$$

$$P(L_d = k) \sim (1 - \beta)\sigma_1 \frac{\eta^{k-1}}{k^{3/2}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

对附加延时 S_d , 有

$$P(S_d = k) = \begin{cases} \beta, & k = 0, \\ (1 - \beta)(c - a)\left(\bar{p} - \sum_{i=0}^{k-1} t_i\right), & k \geq 1. \end{cases}$$

$$P(S_d = k) \sim (1 - \beta)\sigma_2 \frac{\theta^{k-1}}{k^{3/2}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

其中记号 η , θ , σ_1 和 σ_2 的含义与前文一致.

§7. 数值例子

在前面的分析中, 对休假时间服从 T-IPH 分布的 Geo/Geo/1 休假排队, 我们给出了多重休假及单重休假两种情形下平稳附加队长和附加延时的数值计算方法及渐近分析结果.

数值计算可以给出分布律前面部分的数值结果, 而渐近分析可以对分布律的尾部进行刻画, 两者结合在一起可以对相关平稳指标的分布律给出总体的把握. 为此本小节给出几个数值例子, 以说明我们方法的有效性.

在第一个例子中, 假设参数取值为 $a = 0.4, c = 0.6, p = 0.2, q = 0.6$. 进一步假设服务台进行多重休假, 平稳队长的部分数值结果如表 1 所示.

表 1 附加队长的部分数值计算结果

k	$P(L_d = k)$	
	数值结果	渐近结果
10	1.60186×10^{-2}	3.75205×10^{-2}
20	3.49809×10^{-3}	6.09824×10^{-3}
30	1.00193×10^{-3}	1.52598×10^{-3}
40	3.24046×10^{-4}	4.55639×10^{-4}
50	1.12443×10^{-4}	1.49877×10^{-4}
60	4.08663×10^{-5}	5.24138×10^{-5}
70	1.53495×10^{-5}	1.91208×10^{-5}
80	5.90932×10^{-6}	7.19447×10^{-6}
90	2.31912×10^{-6}	2.77173×10^{-6}
100	9.24270×10^{-7}	1.08791×10^{-6}
150	1.08439×10^{-8}	1.21580×10^{-8}
200	1.48435×10^{-10}	1.62128×10^{-10}

在第二个例子中, 令 $a = 0.1, c = 0.5, p = 0.6, q = 0.8$, 对多重休假情形, 平稳附加延时 S_d 的数值计算结果和渐近结果如图 2 所示.

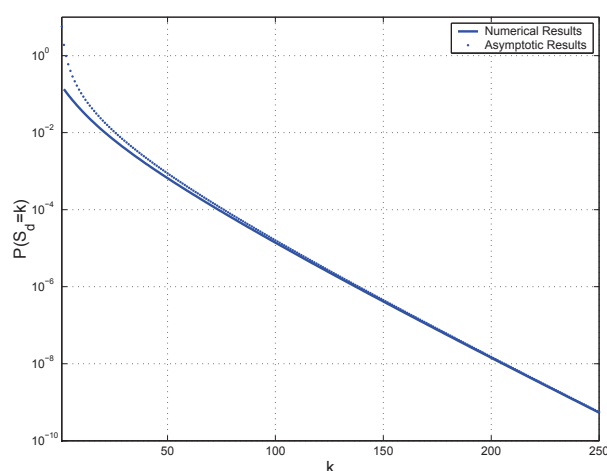


图 2 附加延时分布律的数值计算结果与渐近结果比较

在最后一个例子中, 令 $a = 0.1, c = 0.6, q = 0.7$. 为了说明数值计算结果的精度, 图 3

显示了两种休假策略时平稳附加队长 L_d 的均值随参数 p 的变化曲线, 其中均值的数值结果可由下式近似

$$E(L_d) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(L_d = k) \approx \sum_{k=0}^N kP(L_d = k), \quad \text{对充分大的 } N,$$

而解析结果可由各自的 PGF 出发易得. 例如, 对多重工作休假情形, 有

$$E(L_d) = p + \frac{pc}{p(c-a)^2}.$$

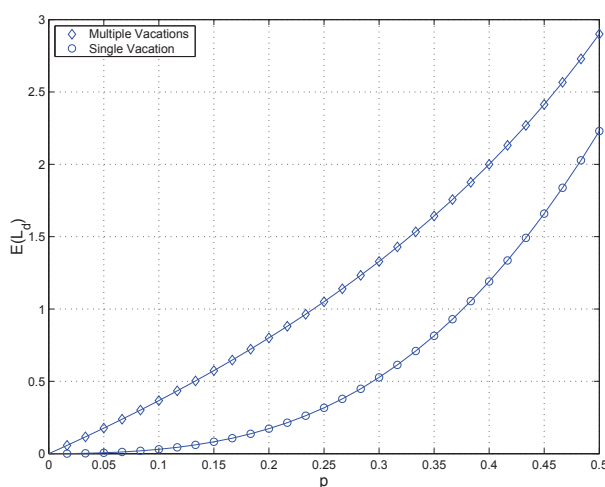


图 3 附加队长的均值随参数 p 的变化曲线

§8. 小 结

在本文中, 我们分析了休假时间服从 T-IPH 分布的 Goe/Geo/1 休假排队, 通过母函数方法, 首先得到了平稳附加队长和附加延时的随机分解结果, 然后还讨论了这两个指标的数值计算和尾部衰减性质, 最后用数值例子说明了我们方法的有效性.

参 考 文 献

- [1] TIAN N S, ZHANG Z G. The discrete-time GI/Geo/1 queue with multiple vacations [J]. *Queueing Syst*, 2002, **40**(3): 283–294.
- [2] TAKAGI H. *Queueing Analysis, Volume 3: Discrete-Time Systems* [M]. Amsterdam: North Holland, 1993.
- [3] ALFA A S. Vacation models in discrete time [J]. *Queueing Syst*, 2003, **44**(1): 5–30.
- [4] SERVI L D, FINN S G. M/M/1 queues with working vacations (M/M/1/WV) [J]. *Performance Evaluation*, 2002, **50**(1): 41–52.

- [5] LI J H, TIAN N S. The discrete-time GI/Geo/1 queue with working vacations and vacation interruption [J]. *Appl Math Comput*, 2007, **185**(1): 1–10.
- [6] TIAN N S, MA Z Y, LIU M X. The discrete time Geom/Geom/1 queue with multiple working vacations [J]. *Appl Math Model*, 2008, **32**(12): 2941–2953.
- [7] ALFA A S. *Queueing Theory for Telecommunications: Discrete Time Modelling of a Single Node System* [M]. New York: Springer, 2010.
- [8] 田乃硕, 徐秀丽, 马占友. 离散时间排队论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [9] NEUTS M F. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach* [M]. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [10] SHI D H, GUO J L, LIU L M. SPH-distributions and the rectangle-iterative algorithm [C] // CHAKRAVARTHY S, ALFA A S. (eds.) *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*, Boca Raton: CRC Press, 1996: 207–224.
- [11] ALFA A S. Discrete time queues and matrix-analytic methods (with discussion) [J]. *TOP*, 2002, **10**(2): 147–210.
- [12] FAYOLLE G, IASNOGORODSKI R, MALYSHEV V. *Random Walks in the Quarter-Plane: Algebraic Methods, Boundary Value Problems and Applications* [M]. Berlin: Springer, 1999.
- [13] CIDON I, SIDI M. Recursive computation of steady-state probabilities in priority queues [J]. *Oper Res Lett*, 1990, **9**(4): 249–256.
- [14] LI H, ZHAO Y Q. Exact tail asymptotics in a priority queue — characterizations of the preemptive model [J]. *Queueing Syst*, 2009, **63**(1-4): 355–381.

Numerical Computation and Tail Asymptotic for Stationary Indices of a Discrete-Time Vacation Queue

ZHANG Hongbo

(School of Statistics and Mathematics, Henan Finance University, Zhengzhou, 450046, China)

Abstract: In this paper we study a Geo/Geo/1 queue with T-IPH vacations, where T-IPH denotes the discrete-time phase type distribution defined on a birth and death process with countably many states. Both the multiple and single vacation strategies are considered. For each case, based on the system of stationary equations and using complex analysis method, we firstly give the probability generating functions (PGFs) of stationary distributions for queue length and sojourn time. Moreover, by analysis the PGFs, recursive and asymptotic formulas for additional queue length and additional delay are also given. Finally, we further give some numerical examples to show the effectiveness of the method.

Keywords: Geo/Geo/1 queue; T-IPH distribution; vacation; stationary indices; tail asymptotic

2010 Mathematics Subject Classification: 30E15; 60K25; 90B22