应用概率统计　第 37 卷
第 1 期　2021 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2021, Vol. 37, No. 1, pp. 59-68
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2021.01.006

随机环境中有界跳幅的分枝随机游动 *

张小玥　　　　张美娟⋆

(首都经济贸易大学统计学院, 100070, 北京)　　(中央财经大学统计与数学学院, 100081, 北京)

摘　要: 考虑随机环境中有界跳幅的分枝随机游动, 其中粒子的繁衍构成时间随机环境中的分枝过程, 粒子的运动遵循空间随机环境中有界跳幅的随机游动规律. 在分枝过程不灭绝的条件下, 文章研究 n 时刻最右粒子位置的极限性质.

关键词: 随机环境中分枝过程; 随机环境中随机游动; 最右粒子; 大偏差

中图分类号: O211.6

英文引用格式: ZHANG X Y, ZHANG M J. Branching random walks with bounded steps in random environments [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(1): 59–68. (in Chinese)

§1.　模型和主要结果

1.1　模型介绍

考虑离散时间随机环境中有界跳幅的分枝随机游动. 粒子的繁衍构成一受时间随机环境 ξ 影响的随机环境中的分枝过程, 粒子的运动遵循受空间环境 ω 影响的 (L,R) 随机环境中的随机游动, 其中时间环境 ξ 与空间环境 ω 是相互独立的. 关于随机环境中的分枝随机游动, 这类问题已有丰富的研究结果. Devulder [1] 讨论了粒子依照固定的分枝机制产生后代, 且粒子运动遵循紧邻 (跳幅限制为 ±1) 的随机环境中随机游动的模型, 借助游动的大偏差原理 [2,3], 得到了在不灭绝条件下, 当 $1<m<m_c$ 时, 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m_n^*/n<0$, a.s.; 当 $m>m_c$ 时, 有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m_n^*/n>0$, a.s., 其中 m 表示粒子产生后代数的均值, m_n^* 为 n 时刻最右粒子的位置, m_c 是仅依赖于空间环境 ω 的分布的常数. Li 等 [4] 在空间运动受环境影响的基础上, 进一步考虑了分枝机制依赖于时间环境的模型, 研究了 n 时刻最右粒子位置的极限行为. 需特别注意的是, 关于随机环境中随机游动的许多经典研究方法十分依赖于游动是紧邻的这一条件, 有界跳幅给研究带来了本质性困难. 对于随机环境中有界跳幅的随机游动的研究, 在 Brémont [5] 后才有了一些相关的进展. 本文在文献 [4] 的基础上进一步研究当游动的跳幅为有界跳幅而不再限定为 ±1 时, n 时刻最右粒子位置的极限性质.

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11801596、11971062)、国家社会科学基金项目 (批准号: 20BTJ042) 和首都经济贸易大学北京市属高校基本科研业务费专项资金项目 (批准号: XRZ2021035) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: zhangmeijuan@cufe.edu.cn.

本文 2019 年 12 月 25 日收到.

我们考虑 $\mathbb{Z}$ 上的随机环境中 (L,R) 分枝随机游动, 其中 $L\geqslant 1$, $R\geqslant 1$. 令 $\Lambda=\{-L,\cdots,R\}/\{0\}$ 为粒子跳幅的取值空间, $\omega_x(l)$ 表示从 x 到 $x+l$ 的转移概率, 满足 $\sum\limits_{l\in\Lambda}\omega_x(l)=1$. 取 $\omega_x=\{\omega_x(l):l\in\Lambda\}$. 令 ω 和 ξ 为相互独立的环境变量, 其中 $\omega=\{\omega_x:x\in\mathbb{Z}\}$ 独立同分布且取值于 Ω, 而 $\xi=\{\xi_j:j\in\mathbb{N}\}$ 独立同分布且取值于 Θ. 分别用 $\mathsf{P}_{\omega,\xi},\mathsf{P}_\omega,\mathsf{P}_\xi$ 代表全概率 P 在给定环境 $(\omega,\xi),\omega,\xi$ 下的条件概率.

在环境 (ω,ξ) 上定义一个随机游动 $\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$ 满足 $X_0=0$, 且对任意的 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, $l\in\Lambda$, 有

$$\mathsf{P}_{\omega,\xi}(X_{n+1}=x+l\,|\,X_n=x)=\mathsf{P}_\omega(X_{n+1}=x+l\,|\,X_n=x)=\omega_x(l). \tag{1}$$

我们在上述随机游动的基础上建立随机分枝系统:

1. 在 $n=0$ 时刻仅有一个粒子, 这个粒子位于 0 点;
2. 在 $n=1$ 时刻该粒子以概率 $\omega_0(l)$ 移动到 l 点 $(l\in\Lambda)$. 同时以概率 $\mathsf{P}_{\xi_0}(k)$ 产生 k 个后代, 并自身死亡;
3. 在 $n=2$ 时刻这 k 个粒子相互独立的依照 (1) 中的方式移动到新的位置, 之后分别独立的依概率 $\mathsf{P}_{\xi_1}(j)$ 产生 j 个后代, 并自身死亡;

   $\cdots$
4. 按上述方式继续下去, 得到一个随机环境中有界跳幅的分枝随机游动.

令 Z_n 表示第 n 代的粒子个数, 则 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为独立同分布时间随机环境 ξ 中的分枝过程. 取 $\varphi_{\xi_n}(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}_{\xi_n}(k)s^k$ 代表第 n 代的一个个体产生后代数量的母函数. 具体可参见文献 [6].

对于独立同分布时间随机环境中的分枝过程, 有

引理 1 [7] (上临界情形) 假定 $\mathsf{E}[-\ln(1-\varphi_{\xi_0}(0))]<\infty$ 且 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1))>0$, 则对于环境 ξ 下的灭绝概率 $q(\xi)$, 有 $q(\xi)<1$, P-a.s.

为了保证分枝过程 $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的存活概率严格大于 0, 我们假定

(A1) $\mathsf{E}[-\ln(1-\varphi_{\xi_0}(0))]<\infty$ 且 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1))>0$.

对 (L,R) 随机环境中的随机游动, Brémont [8] 及 Wang 和 Hong [9] 分别研究了游动的大数定律. 其中文献 [9] 利用 (L,R) 随机游动的内蕴分枝结构, 在定理 1.3 中, 不仅得到游动的大数定律, 而且给出了大数定律速率函数 v_{P} 的显式表达.

引理 2 [9] 对 (L,R) 独立同分布的位置随机环境中的随机游动$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 假定 $\mathsf{E}(T_1)<\infty$, 其中 $T_1=\inf\{n\geqslant 0:X_n>0\}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v_{\mathsf{P}},\qquad \mathsf{P}\text{-a.s.}$$

不失一般性, 本文假定

(A2) $v_{\mathsf{P}} \leqslant 0$.

实际上, 对 $v_{\mathsf{P}} > 0$ 的情况可平行讨论. 为了使用 (L, R) 随机环境中随机游动的大偏差的相关结论, 文章假设下述条件 (A3) 和 (A4) 成立.

(A3) 存在常数 $\alpha > 0$, 对任意 $l \in \Lambda$ 均有 $\int |\ln \omega_0(l)|^{1+\alpha} \mathrm{d}\mathsf{P} < +\infty$.

(A4) 存在常数 $\delta > 0$ 满足 $\mathsf{P}[\omega_0(\pm 1) \geqslant \delta] = 1$ (一致椭圆条件[10]).

当 $v_{\mathsf{P}} < 0$ 时, 游动部分暂留到负无穷. 此时, 模型中存在着一种竞争: 受空间环境的影响, 每一个粒子都有向 $-\infty$ 移动的趋势; 与此同时, 分枝过程大量的产生粒子又增加了某些粒子移动向 $+\infty$ 的可能性. 因而我们来研究最右粒子位置的极限性质.

注记 3　当 $v_{\mathsf{P}} < 0$ 时, 游动部分暂留到负无穷, 从而最左粒子的位置显然趋于负无穷, 最左粒子位置的一阶极限与 v_{P} 之间的关系将是我们下一步关心的问题.

1.2　空间随机环境中随机游动的极限性质

借鉴文献 [1] 和 [4] 中的方法, 本文对随机环境中有界跳幅的分枝随机游动, 也将空间随机环境中有界跳幅的随机游动的大偏差性质作为工具. 在 (A3) 和 (A4) 成立的条件下, Yilmaz[10] 研究了空间随机环境中有界跳幅的随机游动的大偏差性质.

对任意 $n \in \mathbb{Z}$, 令 $T_n := \inf\{k \geqslant 0 : X_k \geqslant n\}$ 和 $\overline{T}_n := \inf\{k \geqslant 0 : X_k \leqslant n\}$ 分别表示游动的右穿越时和左穿越时. 令

$$\lambda(r) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}_\omega(\mathrm{e}^{rT_n}, T_n < +\infty), \qquad \mathsf{P}\text{-a.s.},$$
$$\overline{\lambda}(r) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathsf{E}_\omega(\mathrm{e}^{r\overline{T}_{-n}}, \overline{T}_{-n} < +\infty), \qquad \mathsf{P}\text{-a.s.}$$

在文献 [10] 中引理 1.7 指出, 对 P-a.s. ω, $\lambda(r)$ 和 $\overline{\lambda}(r)$ 存在并且是确定性的, 且存在某个常数 $r_c \in [0, \infty)$ 使得 $\lambda(r)$ 和 $\overline{\lambda}(r)$ 在 $(-\infty, r_c]$ 上是有限的, 在 (r_c, ∞) 上等于 ∞, 且常数 $\kappa_c := [\lambda'(r_{c^-})]^{-1}$ 和 $\overline{\kappa}_c := -[\overline{\lambda}'(r_{c^-})]^{-1}$ 满足 $-B < \overline{\kappa}_c \leqslant 0 \leqslant \kappa_c < B$, 其中 $B = \max\{L, R\}$.

在文献 [10] 中定理 1.8 发现, 对 a.s. ω, $[\mathsf{P}_\omega(X_n/n \in \cdot)]_{n\geqslant 1}$ 满足一类大偏差原理, 其中速率函数 $I(v)$ 是确定性的 (非随机的) 凸函数.

引理 4[10]　在 (A3) 和 (A4) 之下, 对 a.s. ω, $[\mathsf{P}_\omega(X_n/n \in \cdot)]_{n\geqslant 1}$ 满足速率函数为 $I(v)$ 的大偏差原理,

$$I(v) = \begin{cases} \sup\limits_{r\in\mathbb{R}}\{r - v\lambda(r)\}, & \text{若 } v > 0; \\ r_c, & \text{若 } v = 0; \\ \sup\limits_{r\in\mathbb{R}}\{r + v\overline{\lambda}(r)\}, & \text{若 } v < 0. \end{cases}$$

速率函数 $v \mapsto I(v)$ 满足

(i) 在 $[\overline{\kappa}_c, 0]$ 和 $[0, \kappa_c]$ 上是线性的,

(ii) 在 $(-B, \overline{\kappa}_c)$ 和 (κ_c, B) 上是严格凸的,

(iii) 在 $(-B, 0)$ 和 $(0, B)$ 上是可微的.

注记 5 当 $v > 0$ 时, 结合上述性质知 $I(v) = \sup\limits_{r\in\mathbb{R}}\{r - v\lambda(r)\} = \sup\limits_{r\leqslant r_c}\{r - v\lambda(r)\}$, 由简单的计算得 $\lim\limits_{v\to 0+} I(v) = r_c$. 同理 $\lim\limits_{v\to 0-} I(v) = r_c$. 而 $I(0) = r_c$, 故 $I(v)$ 在 0 点连续.

定义 6 若 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) < I(B)$, 令 b 是方程 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) = I(v)$ 在 $[v_{\mathsf{P}}, B]$ 上的唯一解; 若 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) \geqslant I(B)$, 定义 $b = B$.

注记 7 由 $I(v)$ 在 $(-B, B)$ 上连续且为凸函数, $I(v_{\mathsf{P}}) = 0$ ($I(v_{\mathsf{P}}) = 0$ 可由反证法知成立, 若 $I(v_{\mathsf{P}}) > 0$, 结合 $I(v)$ 在 $(-B, B)$ 上连续知: 存在 $\delta > 0$, 满足 $\inf\limits_{x\in[v_{\mathsf{P}}-\delta, v_{\mathsf{P}}+\delta]} I(x) > 0$, 从而 $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}_\omega(X_n/n \in [v_{\mathsf{P}} - \delta, v_{\mathsf{P}} + \delta]) = 0$, 而这与 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n/n = v_{\mathsf{P}}$, P-a.s. 矛盾), 结合引理 4 中 $I(v)$ 的性质以及 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) > 0$ 知 b 的定义是合理的. 且当 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) > I(0)$ 时, $b > 0$; 当 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) = I(0)$ 时, $b = 0$; 当 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) < I(0)$ 时, $b < 0$.

1.3 主要结果

文章对随机环境中有界跳幅的分枝随机游动, 研究最右位置的粒子的极限性质. 令 m_n^* 表示 n 时刻最右粒子的位置, b 在定义 6 中定义. 在假设 (A1)–(A4) 成立时, 有

定理 8

$$\mathsf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{m_n^*}{n} \leqslant b \,\Big|\, Z_n \to \infty\Big) = 1.$$

注记 9 文献 [4] 处理了 $L = R = 1$ 的情形, 得到了类似的结果. 我们猜测

$$\mathsf{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n^*}{n} \geqslant b \,\Big|\, Z_n \to \infty\Big) = 1,$$

但还未得到证明, 这一结论只在 ω 为确定环境时得到 (即定理 10).

定理 10 当 ω 为确定环境时, 即存在确定性分布 $\zeta \in \Omega$ 使得 $\omega_x \equiv \zeta$ ($x \in \mathbb{Z}$) 时, 有

$$\mathsf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{m_n^*}{n} = b \,\Big|\, Z_n \to \infty\Big) = 1.$$

注记 11 当 ω 为确定环境时, 这里研究的模型可视为是时间随机环境中的分枝随机游动模型, 对于时间随机环境中的分枝随机游动[11] 得到了 m_n^*/n 依概率收敛的极限, 在这篇文章中定理 10 证明了 m_n^*/n 几乎必然收敛.

§2.　定理证明

2.1　模型基本性质

令 $\lambda(x,n)$ 表示 $n\in\mathbb{N}$ 时刻位于位置 $x\in\mathbb{Z}$ 处的粒子个数. $Z(x,n,\mu)$ 表示 n 时刻位于位置 x 处的粒子中的第 μ 个粒子产生下一代的个数, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$, $\{Z(x,n,\mu):\mu\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{Z}\}$ 是独立同分布的随机变量, 满足 $\mathsf{P}_\xi[Z(x,n,\mu)=k]=\mathsf{P}_{\xi_n}(k)$, 且 $\lambda(x,n)$ 满足

$$\lambda(x,0)=\begin{cases}1, & x=0;\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lambda(x,n+1)=&\sum_{i=1}^{R}\sum_{\mu=1}^{\lambda(x-i,n)}\mathbf{1}_{\{n\text{ 时刻位于 }x-i\text{ 的第 }\mu\text{ 个粒子右移 }i\text{ 步}\}}Z(x-i,n,\mu)\\&+\sum_{i=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda(x+i,n)}\mathbf{1}_{\{n\text{ 时刻位于 }x+i\text{ 的第 }\mu\text{ 个粒子左移 }i\text{ 步}\}}Z(x+i,n,\mu).\end{aligned}$$

对任意的 $x\in\mathbb{Z}$ 及 $n\in\mathbb{N}$, 取

$$f_{\omega,\xi}(x,n)=\Big[\prod_{i=0}^{n-1}\varphi'_{\xi_i}(1)\Big]\mathsf{P}_\omega(X_n=x)\quad(n\geqslant 1);\qquad f_{\omega,\xi}(x,0)=\mathsf{P}_\omega(X_0=x).$$

引理 12　对任意 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, 有

$$\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x,n)]=f_{\omega,\xi}(x,n).\tag{2}$$

证明:　当 $n=0$ 时由定义结论显然成立. 假定对给定的 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, 有 (2) 成立, 则对 $n+1$ 有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x,n+1)]\\&=\mathsf{E}_{\omega,\xi}\Big[\sum_{i=1}^{R}\sum_{\mu=1}^{\lambda(x-i,n)}\mathbf{1}_{\{n\text{ 时刻位于 }x-i\text{ 的第 }\mu\text{ 个粒子右移 }i\text{ 步}\}}Z(x-i,n,\mu)\\&\quad+\sum_{i=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{\lambda(x+i,n)}\mathbf{1}_{\{n\text{ 时刻位于 }x+i\text{ 的第 }\mu\text{ 个粒子左移 }i\text{ 步}\}}Z(x+i,n,\mu)\Big].\end{aligned}$$

由定义知,

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x,n+1)]\\&=\sum_{i=1}^{R}\varphi'_{\xi_n}(1)\omega_{x-i}(i)\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x-i,n)]+\sum_{i=1}^{L}\varphi'_{\xi_n}(1)\omega_{x+i}(-i)\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x+i,n)]\\&=\sum_{i=1}^{R}\varphi'_{\xi_n}(1)\omega_{x-i}(i)f_{\omega,\xi}(x-i,n)+\sum_{i=1}^{L}\varphi'_{\xi_n}(1)\omega_{x+i}(-i)f_{\omega,\xi}(x+i,n).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{\omega,\xi}[\lambda(x,n+1)] &= \Big[\prod_{k=0}^{n}\varphi'_{\xi_k}(1)\Big]\cdot\Big[\sum_{i=-R}^{L}\omega_{x+i}(-i)\mathsf{P}_\omega(X_n=x+i)\Big]\\ &= \Big[\prod_{k=0}^{n}\varphi'_{\xi_k}(1)\Big]\mathsf{P}_\omega(X_{n+1}=x)\\ &= f_{\omega,\xi}(x,n+1).\end{aligned}$$

从而, 由数学归纳法知对任意 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, 均有 (2) 成立. □

利用时间环境和空间环境的独立性, 可得

推论 13 对任意 $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$, 有 $\mathsf{E}[\lambda(x,n)]=\{\mathsf{E}[\varphi'_{\xi_0}(1)]\}^n\mathsf{P}(X_n=x)$.

2.2 定理 8 的证明

$b=B$ 时结论显然成立, 故下面仅考虑 $b<B$ 的情形, 根据 b 的定义和速率函数 $I(v)$ 的性质知, 对任意 $B>\alpha>b$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1))<I(\alpha)-\varepsilon.$$

从而由引理 4 知, 对几乎所有环境 (ω,ξ), 当 n 足够大时, 由游动的大偏差性质有

$$\mathsf{P}_\omega(X_n\geqslant n\alpha)\leqslant\exp\{-n[I(\alpha)-\varepsilon/2]\}.$$

从而对几乎所有环境 (ω,ξ), 当 n 足够大时结合引理 12 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{\omega,\xi}\{\lambda([n\alpha,+\infty),n)\geqslant 1\} &\leqslant \mathsf{E}_{\omega,\xi}\Big[\sum_{x=n\alpha}^{+\infty}\lambda(x,n)\Big]=\Big[\prod_{k=0}^{n-1}\varphi'_{\xi_k}(1)\Big]\mathsf{P}_\omega(X_n\geqslant n\alpha)\\ &\leqslant \exp\Big\{n\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\varphi'_{\xi_k}(1)-I(\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}\Big]\Big\}\\ &\leqslant \exp\{n[\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_k}(1))-I(\alpha)+\varepsilon]\}.\end{aligned}$$

由 $\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1))<I(\alpha)-\varepsilon$ 知,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathsf{P}_{\omega,\xi}\{\lambda([n\alpha,+\infty),n)\geqslant 1\}<+\infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理知, 当 n 足够大时, $\mathsf{P}_{\omega,\xi}$-a.s. 没有粒子位于 $[n\alpha,+\infty)$ 中. 从而如果 $Z_n>0$, 就有 $m_n^*<n\alpha$. 结合 α 选取的任意性知定理 8 成立.

2.3　定理 10 的证明

结合定理 8, 我们仅需证明下界. 设 $\alpha \in (v_{\mathsf{P}}, b)$, 由定义知存在 $\varepsilon > 0$ 满足

$$\mathsf{E}\ln(\varphi'_{\xi_0}(1)) > I(\alpha) + \varepsilon.$$

取定满足 (A2) – (A4) 的环境 ω, 当 k_ω 足够大时, 有

$$\mathsf{P}_\omega(X_n \geqslant k_\omega\alpha) \geqslant \exp[-(I(\alpha)+\varepsilon)k_\omega]. \tag{3}$$

从而由引理 12,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\omega \ln \mathsf{E}_{\omega,\xi}\Big[\sum_{x\geqslant k_\omega\alpha}\lambda(x,k_\omega)\Big] &= \mathsf{E}_\omega \ln\Big(\Big[\prod_{i=0}^{k_\omega-1}\varphi'_{\xi_i}(1)\Big]\mathsf{P}_\omega[X_{k_\omega}\in[k_\omega\alpha,+\infty)]\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{k_\omega-1}\mathsf{E}\ln\varphi'_{\xi_i}(1) + \ln \mathsf{P}_\omega[X_{k_\omega}\in[k_\omega\alpha,+\infty)]\\ &\geqslant k_\omega[\mathsf{E}\ln\varphi'_{\xi_0}(1) - I(\alpha) - \varepsilon] > 0.\end{aligned}$$

对于取定的环境 ω, 由于此时空间随机环境退化, 从而粒子的运动是空间齐次的随机游动. 下面, 我们利用取定的满足 (3) 的 k_ω 构造一个随机环境 ξ 中的分枝过程.

- 在 0 时刻, 仅有一个粒子位于 0 点处, 取 $Y_0 = 1$.
- 用 Y_1 表示在 k_ω 时刻位于 $[k_\omega\alpha, +\infty)$ 内的粒子个数, 即 $Y_1 = \lambda([k_\omega\alpha,+\infty), k_\omega)$, 记这些粒子的全体为 J_1.
- 假定 J_1 中第 i 个粒子的位置为 z_{1i}, 设 X_{1i} 为这个粒子在 $2k_\omega$ 时刻产生的位于 $[z_{1i} + k_\omega\alpha, +\infty)$ 内的后代个数, 取 $Y_2 = \sum_{i=1}^{Y_1} X_{1i}$.
- 依次下去即得到一个时间随机环境中的分枝过程 $\{Y_n\}$.

引理 14　依上述方式构造的时间随机环境中的分枝过程 $\{Y_n\}$ 是上临界的.

证明:　由引理 1, 我们仅需证明 $\{Y_n\}$ 满足

$$\mathsf{E}_\omega \ln(\mathsf{E}_{\omega,\xi} Y_1) > 0, \tag{4}$$

和

$$\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\omega,\xi}(Y_1 = 0))] < \infty. \tag{5}$$

由 $\{Y_n\}$ 的构造方式知 (4) 成立.

下面证明 (5) 也成立. 取 λ_n 为 n 时刻落在区间 $[Rn, +\infty)$ 内的粒子数, 由单调性知仅需证明

$$\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n = 0))] < \infty, \qquad \forall\, n \geqslant 1. \tag{6}$$

由假设条件(A1) 和 (A3) 知 $\mathsf{E}[-\ln(1-\varphi_{\xi_0}(0))]<\infty$, $\omega_0(R)>0$. 故当 $n=1$ 时有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_1=0))] &\leqslant \mathsf{E}_\omega[-\ln(1-[\mathsf{P}_{\xi_0}(0)+(1-\mathsf{P}_{\xi_0}(0))(1-\omega_0(R))])]\\ &=\mathsf{E}_\omega[-\ln\omega_0(R)(1-\mathsf{P}_{\xi_0}(0))]\\ &=\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\xi_0}(0))]-\ln\omega_0(R)<\infty.\end{aligned}$$

假设 n 时刻时 (6) 成立, 注意到当 $\lambda_n\neq 0$ 时, 由于跳幅的限制, n 时刻所有位于 $[Rn,+\infty)$ 内的粒子只可能位于 Rn 处, 若此时 $\lambda_{n+1}=0$ 当且仅当所有 n 时刻位于 Rn 处的粒子在 $n+1$ 时刻位移均不等于 R 或是部分粒子在 $n+1$ 时移动到了 $R(n+1)$ 处但没有产生后代就灭绝了. 故 $\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_{n+1}=0\,|\,\lambda_n\neq 0)\leqslant 1-\omega_n(R)+\omega_n(R)\mathsf{P}_{\xi_n}(0)$. 从而

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_{n+1}=0)\\ =&\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_{n+1}=0\,|\,\lambda_n=0)\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n=0)+\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_{n+1}=0\,|\,\lambda_n\neq 0)\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n\neq 0)\\ \leqslant&\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n=0)+[1-\omega_n(R)+\omega_n(R)\mathsf{P}_{\xi_n}(0)]\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n\neq 0).\end{aligned}\tag{7}$$

由 (7) 知在 $n+1$ 时刻有

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_{n+1}=0))]\\ \leqslant&\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\omega,\xi}(\lambda_n=0))]-\ln(\omega_n(R))+\mathsf{E}_\omega[-\ln(1-\mathsf{P}_{\xi_n}(0))]<\infty.\end{aligned}$$

从而由数学归纳法知结论成立. □

引理 15 对几乎所有环境 (ω,ξ), 有

$$\mathsf{P}_{\omega,\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{m_n^*}{n}\geqslant\alpha\Big)>0.$$

证明: 由 $\{Y_n\}$ 的构造知 Y_n 不超过在 nk_ω 时刻原过程位于 $nk_\omega\alpha$ 上方的粒子的数量, 即 $Y_n\leqslant\lambda([nk_\omega\alpha,\infty),nk_\omega)$. 由引理 14 得 $\{Y_n\}$ 是一上临界的分枝过程, 故

$$\mathsf{P}_{\omega,\xi}[\lambda([nk_\omega\alpha,\infty),nk_\omega)\to\infty]\geqslant\mathsf{P}_{\omega,\xi}(Y_n\to\infty)>0.\tag{8}$$

当 $\lambda([nk_\omega\alpha,\infty),nk_\omega)\to\infty$ 时, 对充分大的 n, 有 $m^*_{nk_\omega}\geqslant nk_\omega\alpha$ 成立, 故

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{m^*_{nk_\omega}}{nk_\omega}\geqslant\alpha.$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$, 取 $a_n=[n/k_\omega]$, 其中 $[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}:n\leqslant x\}$, 则 a_n 满足

$$a_nk_\omega\leqslant n<(a_n+1)k_\omega.$$

结合游动的性质有

$$\frac{m_n^*}{n}\geqslant\frac{m_{(a_n+1)k_\omega}-[(a_n+1)k_\omega-n]R}{(a_n+1)k_\omega}\geqslant\frac{m_{(a_n+1)k_\omega}-k_\omega R}{(a_n+1)k_\omega}.$$

故

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{m_n^*}{n}\geqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{m_{(a_n+1)k_\omega}-k_\omega R}{(a_n+1)k_\omega}\geqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{m_{nk_\omega}^*}{nk_\omega}.$$

综上结合 (8) 知

$$\mathsf{P}_{\omega,\xi}\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{m_n^*}{n}\geqslant\alpha\Big)>0.$$

引理 15 得证. □

定理 10 证明: 由文献 [4; 704 页] 的证明 (虽然文献 [4] 中假设了 $L=R=1$, 但这一部分的证明过程并不需要用到 $L=R=1$) 可知, 在引理 15 成立的条件下有

$$\mathsf{P}_\omega\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{m_n^*}{n}\geqslant\alpha\,\Big|\,Z_n\to\infty\Big)=1.$$

结合 α 选取的任意性知

$$\mathsf{P}_\omega\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{m_n^*}{n}\geqslant b\,\Big|\,Z_n\to\infty\Big)=1,$$

从而结合定理 8 的结论知定理 10 成立. □

致谢 感谢洪文明教授的悉心指导和深入讨论. 感谢审稿人的仔细阅读和给出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] DEVULDER A. The speed of a branching system of random walks in random environment [J]. *Statist Probab Lett*, 2007, **77(18)**: 1712–1721.

[2] COMETS F, GANTERT N, ZEITOUNI O. Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment [J]. *Probab Theory Related Fields*, 2000, **118(1)**: 65–114.

[3] GREVEN A, DEN HOLLANDER F. Large deviations for a random walk in random environment [J]. *Ann Probab*, 1994, **22(3)**: 1381–1428.

[4] Li Y Q, Li X, Liu Q S. A random walk with a branching system in random environments [J]. *Sci China Ser A*, 2007, **50(5)**: 698–704.

[5] BRÉMONT J. On some random walks on $\mathbb{Z}$ in random medium [J]. *Ann Probab*, 2002, **30(3)**: 1266–1312.

[6] ATHREYA K B, NEY P E. *Branching Processes* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[7] ATHREYA K B, KAILIN S. On branching processes with random environments, I: extinction probabilities [J]. *Ann Math Statist*, 1971, **42(5)**: 1499–1520.

[8] BRÉMONT J. One-dimensional finite range random walk in random medium and invariant measure equation [J]. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, 2009, **45(1)**: 70–103.

[9] WANG H M, HONG W M. Intrinsic branching structure within random walk on $\mathbf{Z}^*$ [J]. *Theory Probab Appl*, 2014, **58(4)**: 640–659.

[10] YILMAZ A. Quenched large deviations for random walk in a random environment [J]. *Comm Pure Appl Math*, 2009, **62(8)**: 1033–1075.

[11] MALLEIN B, MIŁOŚ P. Maximal displacement of a supercritical branching random walk in a time-inhomogeneous random environment [J]. *Stochastic Process Appl*, 2019, **129(9)**: 3239–3260.

Branching Random Walks with Bounded Steps in Random Environments

ZHANG Xiaoyue

(*School of Statistics, Capital University of Economics and Business, Beijing, 100070, China*)

ZHANG Meijuan

(*School of Statistics and Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing, 100081, China*)

Abstract: We consider a branching random walk with bounded steps in random environments, where the particles are produced as a branching process with a random environment in time, and move independently as a random walk with bounded steps on $\mathbb{Z}$ with a random environment in location. We study the speed of the rightmost particle, conditionally on the survival of the branching process.

Keywords: branching processes in random environments; random walks in random environments; rightmost particles; large deviation

2010 Mathematics Subject Classification: 60J80; 60K37