

## 混合再保险中凸风险组合的最优再保险策略\*

谭显中 温利民\*

(江西师范大学数学与统计学院, 南昌, 330022)

**摘要:** 再保险是一种有效的风险管理策略, 在保险行业中扮演着至关重要的作用. 本文在期望值保费原则下, 考虑了再保险策略中原保险人和再保险人双方的利益, 并以再保险双方各自总损失的 VaR 值的凸组合为目标函数, 得到混合再保险中最优比例系数和最优自留额的理论解. 进而, 对最优解的各种情况进行了讨论和分析. 本文的研究为保险公司的风险管理提供了决策依据.

**关键词:** 最优再保险; VaR 风险度量; 凸组合; 期望值保费原则

**中图分类号:** O212.8

**英文引用格式:** TAN X Z, WEN L M. Optimal reinsurance strategy of convex risk combination in mixed reinsurance [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(4): 361-376. (in Chinese)

### §1. 引言

投保人通过购买保险将损失转嫁给保险公司. 然而, 当大额损失发生时, 保险公司将面临破产的风险. 因此, 保险公司将大额损失的一部分转嫁给再保险公司, 从而降低经营风险. 在再保险交易中, 分出业务的公司称为原保险人或分出公司, 接受业务的公司称为再保险人或分入公司. 再保险亦称“分保”, 是原保险人在原保险合同的基础上, 通过签订分保合同, 将其所承保的部分风险和责任向再保险人进行投保的行为. 对于保险公司来说, 再保险是一种重要的风险管理工具, 合理的购买再保险可以帮助保险公司减少风险、稳定收益.

最优再保险的研究开始于 19 世纪 60 年代, 是保险精算学中的热门研究问题. 从构成上看, 再保险由原保险人和再保险人两部分组成. 从数学上看, 再保险由再保险合同、保费原则和优化准则三部分构成.

一般地, 在求解最优再保险合同时, 需要根据实际意义提出某种优化准则. 目前比较流行的是通过控制原保险人或再保险人的总风险的方差、风险价值 (VaR) 或条件尾部期望 (CTE), 从而推导出最优再保险形式. 例如, Borch<sup>[1]</sup> 在期望值原则下, 考虑最小化原保险人总损失的方差, 证明了停止损失再保险是最优保险形式. Vajda<sup>[2]</sup> 从再保险人的角度对再保险人的赔付的方差最小化进行了研究, 得到最优合约的形式为成数再保险. Arrow<sup>[3]</sup> 在最大化期望效用准则下, 采用期望值保费原则, 证明了停止损失再保险是最优保险合同.

\*国家自然科学基金项目 (批准号: 71761019) 和江西省自然科学基金项目 (批准号: 20203ACB21227) 资助.

\*通讯作者, E-mail: wlmjxnu@163.com.

本文 2019 年 12 月 25 日收到, 2020 年 4 月 25 日收到修改稿.

Kaluszka 和 Okolewski<sup>[4]</sup> 考虑固定再保险保费为最大可能索赔原则下的最大期望效用、稳定性和生存概率的再保险问题. 证明了有限止损和截断止损是最优的. Cai 和 Tan<sup>[5]</sup> 提出了两个新的优化准则, 分别通过最小化原保险人总风险的 VaR 和 CTE 来获得最优自留额. Cai 等<sup>[6]</sup> 在期望值保费原则下, 分别讨论了原保险人总风险的 VaR 和 CTE 准则下的最优再保险形式, 得出了最优分保函数为一类增凸函数. Zhou 等<sup>[7]</sup> 通过控制组合成数再保险和停止损失再保险策略, 研究了原保险人留存风险的 VaR 和 CTE 最小化的问题. 他们得出结论, 在相同的再保险保费约束下, 成数再保险后的停止损失再保险比停止损失后的成数再保险更好地降低了原保险人的 VaR 和 CTE. Sun 等<sup>[8]</sup> 采用条件风险值 (CVaR) 来度量多个保险业务线的总损失, 并引入两种非参数估计方法, 在平均 CVaR 框架下探讨了最优的多变量成数再保险. Du 等<sup>[9]</sup> 提出了一种变量变换的方法, 分别在 VaR 和 CTE 准则下得到了最优的停止损失再保险.

再保险合同按其责任限制大致可分两类, 比例再保险和非比例再保险. 在比例再保险中, 成数再保险的形式是最简单的, 其分保损失函数为  $R(x) = bx$ , 其中  $b \in [0, 1]$  为比例系数. 在实际运用中, 成数再保险形式中原保险人和再保险人的利益一致并且手续简便, 因而被广泛运用. 非比例再保险中停止损失再保险具有很重要的地位, 其分保损失函数为  $R(x) = (x - d)_+$ , 其中  $d \geq 0$  为免赔额水平, 这里  $(x)_+ = \max\{x, 0\}$ . 在再保险公司中, 成数再保险和停止损失再保险是最常用的两种再保险合同. 不仅在实际中应用广泛, 而且在理论上也得到大量的研究. 然而, 成数再保险有两个缺陷: 缺乏弹性并且难以达成风险责任的均衡化. 同时, 在大多数实际情况下, 再保险并不再局限于一种类型, 而是通过多种再保险形式组合而成. 因此, 基于成数再保险和停止损失再保险, 我们定义下面的再保险合同:

$$R(x) = x - [(bx) \wedge d] = \begin{cases} (1-b)x, & x < d/b; \\ x - d, & x \geq d/b, \end{cases} \quad (1)$$

称之为混合再保险合同, 其中  $(bx) \wedge d = \min\{bx, d\}$ . 对任意的  $0 < x_1 < x_2$ , 有

$$|R(x_1) - R(x_2)| = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & x_1 \geq d/b; \\ |(1-b)x_1 - x_2 + d|, & x_1 < d/b \leq x_2; \\ (1-b)|x_1 - x_2|, & x_2 < d/b. \end{cases}$$

当  $x_1 < d/b \leq x_2$  时得到

$$|(1-b)x_1 - x_2 + d| \leq |x_1 - x_2| + b|x_1 - d/b| \leq (1+b)|x_1 - x_2|.$$

因此对任意的  $x_1 < x_2$ , 有  $|R(x_1) - R(x_2)| \leq (1+b)|x_1 - x_2|$  成立. 说明本文的混合再保险形式满足 Lipschitz-1 条件. 在混合再保险合同中, 比例系数  $b$  和免赔额  $d$  的确定是至关重要的. 本文将探讨在 VaR 风险度量下混合再保险的最优保险合同.

事实上, 一个再保险合同应该充分考虑再保险双方的利益. Borch<sup>[10]</sup> 提出: 一份再保险合同中包括保险人和再保险人两方. 在某种准则下得出的最优再保险形式, 对原保险人来说是最优的, 但对再保险人来说则不然. 因此, 近年来不少学者都对再保险双方的利益最大化进行了研究. 例如, Cai 等<sup>[11]</sup> 等从原保险人和再保险人的利益出发, 研究了原保险人和再保险人的联合生存概率和联合获利概率. 得到了在期望价保费原则的基础上, 最优再保险形式为成数再保险和停止损失再保险的充分必要条件. 并且得出了在一类广泛的再保险保单和一般再保险保费原则下存在最优再保险策略的充分条件. Fang 和 Qu<sup>[12]</sup> 考虑了原保险人和再保险人的利益, 并在最大化联合生存概率的优化准则下, 以成数再保险和停止损失再保险相结合的形式推导出最优再保险合同. Panahi-Bazaz 和 Payandeh-Najafabadi<sup>[13]</sup> 从原保险人和再保险人两个角度构建了两类适当的再保险合同. Payandeh-Najafabadi 和 Panahi-Bazaz<sup>[14]</sup> 介绍了一种新的再保险合同 (比例停止损失再保险), 利用平衡损失函数, 对比例停止损失再保险的参数进行了估计, 使原保险人和再保险人的预期盈余最大化.

基于以上的研究, 本文将同时考虑原保险人和再保险人双方的利益, 利用再保险双方总风险的加权 VaR 作为风险控制目标, 研究混合再保险的最优解问题. 后面的章节安排如下: 第二节给出了再保险合同形式下再保险双方的保费和混合再保险合约的可行域; 第三节给出了 VaR 的定义及相关性质, 建立再保险人双方总损失在 VaR 风险测度下的凸组合形式, 并给出了目标函数的优化模型; 第四节给出了两种形式最优再保险的数值解, 对结果进行了说明.

## §2. 混合再保险合约的可行域

设  $X$  表示原保险人在某一固定保单期内的风险损失, 为一非负随机变量, 其分布函数为  $F_X(x) = P(X \leq x)$ , 生存函数为  $S_X(x) = P(X > x)$ . 记  $E(X) = \mu$  为  $X$  的数学期望. 在再保险合同中, 记  $R(X)$  表示保险公司转移给再保险公司的分保损失函数. 当损失  $X$  发生时再保险公司支付给保险公司的赔偿金额为  $R(X)$ , 其中  $0 \leq R(X) \leq X$ . 此时, 原保险人赔偿给投保人的损失为  $I(X) = X - R(X)$ , 称为自留损失.

本文研究的再保险合同为 (1) 式的混合再保险形式. 为了便于数学处理, 假设损失  $X$  服从参数为  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) 的指数分布, 其分布函数和生存函数分别为

$$F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}, \quad S_X(x) = e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

则  $E(X) = \mu = 1/\beta$  以及

$$\begin{aligned} E[I(X)] &= E[(bX) \wedge d] = bE\left(X \wedge \frac{d}{b}\right) = b \int_0^{d/b} \left(x \wedge \frac{d}{b}\right) dF_X(x) \\ &= b \int_0^{d/b} [1 - F_X(x)] dx = \frac{b}{\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta d}{b}\right)\right]. \end{aligned}$$

假设原保险和再保险均按期望值原理收取保费, 且安全负荷系数分别为  $\theta_I$  和  $\theta_R$ . 假设原保险人和再保险人的安全负荷系数满足  $0 < \theta_I < \theta_R$ . 这个假设可以避免原保险人将所有的风险转嫁给再保险人而获利. 此时再保险人收到的保费为

$$P_R = (1 + \theta_R)\mathbf{E}[R(X)] = \frac{1 + \theta_R}{\beta}(1 - b + be^{-d\beta/b}).$$

原保险人购买再保险后的净保费收入为

$$P_I = (1 + \theta_I)\mathbf{E}X - P_R = \frac{b(1 + \theta_R)}{\beta}(1 - e^{-d\beta/b}) - \frac{\theta_R - \theta_I}{\beta}.$$

显然, 要使再保险成立, 则原保险人净收入满足  $P_I \geq 0$ , 即有

$$b \geq \frac{k}{1 - e^{-d\beta/b}} \quad (2)$$

或者

$$d \geq \frac{b}{\beta} \ln \frac{b}{b - k}. \quad (3)$$

其中  $k = (\theta_R - \theta_I)/(1 + \theta_R)$ . 根据 (2), 显然有  $b > k$ . 又因为

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{k}{1 - e^{-d\beta/b}} = k,$$

则对任意小的正数  $\varepsilon > 0$ , 当  $d$  足够大时有

$$b + \varepsilon > \frac{k}{1 - e^{-d\beta/(b+\varepsilon)}} \quad \text{以及} \quad b - \varepsilon < \frac{k}{1 - e^{-d\beta/(b-\varepsilon)}}$$

成立. 因此说明比例系数  $b$  满足  $k < b \leq 1$ , 且  $k$  是  $b$  的下确界.

记  $B_0$  为  $(b, d)$  的可行域, 则

$$B_0 = \left\{ (b, d) \mid d \geq \frac{b}{\beta} \ln \frac{b}{b - k}, k < b \leq 1 \right\}. \quad (4)$$

**引理 1** 记  $b_0 = \inf\{b \mid (b, d) \in B_0\}$ ,  $d_0 = \inf\{d \mid (b, d) \in B_0\}$ , 则有

$$b_0 = k, \quad d_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1 - k} \quad (5)$$

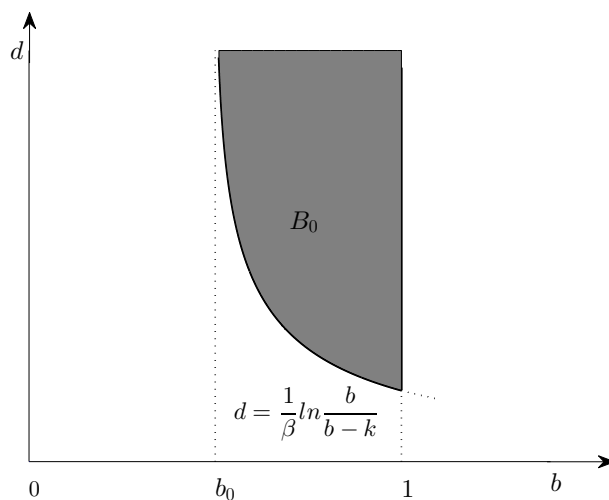
成立.

**证明:** 显然有  $b > k$ , 即  $b_0 = k$  为混合再保险的比例系数下确界. 在可行域的边界线上有

$$\frac{\partial d}{\partial b} = \frac{1}{\beta} \left( \ln \frac{b}{b - k} - \frac{k}{b - k} \right) = \frac{1}{\beta} \left( \ln \frac{b}{b - k} - \frac{b}{b - k} + 1 \right).$$

令  $g(x) = \ln x - x + 1$ ,  $x \in [1, +\infty)$ . 因此  $g'(x) = 1/x - 1 < 0$ , 故  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  为减函数. 再令  $x = b/(b - k)$ , 则显然有  $x > 1$ . 可得  $g(x) < g(1) = 0$ , 即  $\partial d / \partial b < 0$ . 因此  $d$  关于  $b$  为减函数, 当  $b = 1$  时  $d$  取最小值, 即

$$d \geq \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1 - k}.$$

图1 再保险比例系数和自留额的可行域  $B_0$ 

引理得证.  $\square$

取  $\beta = 10/3$ ,  $\theta_I = 0.5$ ,  $\theta_R = 2$ , 得到最优解为  $(b, d)$  的可行域  $B_0$  的图形, 如图1所示. 定义可行域  $B_0$  的下边界为

$$L = \left\{ (b, d) \mid d = \frac{1}{\beta} \ln \frac{b}{b-k} \right\}. \quad (6)$$

它表示一条递减的曲线. 因此,  $(b, d)$  的最优解必须落入上述可行域, 即在图1的阴影区域内部.

### §3. 基于 VaR 度量的最优再保险

在混合再保险合同, 寻找最优再保险合同即求解最优比例系数  $b$  和免赔额  $d$  使得风险达到最小. 基于已有的研究, 本文采用在险价值来度量风险的大小.

在险价值 (Value at Risk, 简称 VaR), 是指在一定的时间内及一定的置信度 (比如 95%) 下, 投资者最大的期望损失. 作为一种市场风险测量和管理的新工具, VaR 是非常有用的风险度量工具.

**定义 2** 设损失  $X$  为一非负随机变量, 给定一个置信水平  $(1 - \alpha)$ , 这里  $\alpha \in (0, 1)$  是一个小概率, 则损失  $X$  的 VaR 定义为

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \geq 0 : P(X > x) \leq \alpha\}. \quad (7)$$

显然, 风险  $X$  的 VaR 本质上是分布函数  $F_X(x)$  的广义逆在  $1 - \alpha$  处的值, 即

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha) = \inf\{x \geq 0 : F_X(x) \geq 1 - \alpha\}.$$

根据 VaR 的定义, 如果有  $\text{VaR}_\alpha(X) \leq x$ , 则必有  $S_X(x) \leq \alpha$  成立. 因此, 若  $S_X(0) \leq \alpha$ , 则  $\text{VaR}_\alpha(X) = 0$ , 故本文假设  $0 < \alpha < S_X(0)$ . 作为一种风险度量, 在险价值满足下面的性质.

- 转移不变性: 对任意的常数  $c$ ,  $\text{VaR}_\alpha(X + c) = \text{VaR}_\alpha(X) + c$ ;
- 正齐次性: 对任意的正常数  $c \geq 0$ ,  $\text{VaR}_\alpha(cX) = c\text{VaR}_\alpha(X)$ ;
- 对任意的连续增函数  $\Psi(\cdot)$  有

$$\text{VaR}_\alpha(\Psi(X)) = \Psi(\text{VaR}_\alpha(X)). \quad (8)$$

当损失  $X$  服从指数分布时, 其 VaR 值为

$$\text{VaR}_\alpha(X) = S_X^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha}. \quad (9)$$

对原保险人而言, 其总损失记为  $TI(X) = I(X) - P_I$ , 相应的 VaR 值为  $\text{VaR}_\alpha(TI(X))$ ; 对再保险人而言, 其总损失为  $TR(X) = R(X) - P_R$ , 相应的 VaR 值为  $\text{VaR}_\alpha(TR(X))$ . 考虑原保险人和再保险人双方的凸风险加权和, 假设  $\alpha_I$  和  $\alpha_R$  分别为原保险人和再保险人的置信水平, 且满足

$$0 < \alpha_I < \alpha_R < \frac{1 + \theta_I}{1 + \theta_R}. \quad (10)$$

定义总风险的目标函数为

$$J(b, d) = \lambda \text{VaR}_{\alpha_I}(TI(X)) + (1 - \lambda) \text{VaR}_{\alpha_R}(TR(X)), \quad (11)$$

其中  $\lambda \in (0, 1)$  为权重. 显然, 当  $\lambda = 0$  时, 此再保险合同只考虑再保险人的风险; 而当  $\lambda = 1$  时, 再保险合同仅考虑原保险人的风险. 当  $\lambda \in (0, 1)$  时该目标函数同时考虑了原保险人和再保险人的风险, 在实际中具有重要的意义.

由 VaR 准则的平移不变性可得

$$\text{VaR}_{\alpha_I}(TI(X)) = \text{VaR}_{\alpha_I}(I(X)) - P_I = \text{VaR}_{\alpha_I}(bX \wedge d) - P_I$$

以及

$$\text{VaR}_{\alpha_R}(TR(X)) = \text{VaR}_{\alpha_R}(R(X)) - P_R = \text{VaR}_{\alpha_R}(X - (bX \wedge d)) - P_R.$$

再由 (8) 式和 VaR 的正齐次性有

$$\text{VaR}_{\alpha_I}(bX \wedge d) = \text{VaR}_{\alpha_I}(\min\{bX, d\}) = \min\{\text{VaR}_{\alpha_I}(bX), d\} = \min\{bC_I, d\}$$

以及

$$\text{VaR}_{\alpha_R}(X - (bX \wedge d)) = \text{VaR}_{\alpha_R}(X) - \text{VaR}_{\alpha_R}(bX \wedge d) = C_R - \min\{bC_R, d\}.$$

其中

$$C_I = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_I} \quad \text{和} \quad C_R = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R}$$

分别表示原保险人和再保险人面对风险  $X$  时的 VaR 值. 因此凸组合总风险度量具体表达如下:

$$J(b, d) = \lambda \min\{bC_I, d\} - (1 - \lambda) \min\{bC_R, d\} + (1 - 2\lambda)f(b, d) + D, \quad (12)$$

其中

$$D = [\lambda(\theta_R - \theta_I - \ln \alpha_R) - (1 - \lambda)(1 + \theta_R)]/\beta \quad (13)$$

以及

$$f(b, d) = \frac{b(1 + \theta_R)}{\beta} (1 - e^{-d\beta/b}). \quad (14)$$

显然, 函数  $f(b, d)$  是二元连续可微函数, 记其一阶偏导数为

$$f'_b(b, d) \triangleq \frac{\partial f(b, d)}{\partial b}, \quad f'_d(b, d) \triangleq \frac{\partial f(b, d)}{\partial d}.$$

则有下面的引理成立.

**引理 3** 二元函数  $f(b, d)$  对  $b$  和  $d$  的一阶偏导数分别有

$$f'_b(b, d) > 0 \quad \text{以及} \quad f'_d(b, d) > 0. \quad (15)$$

**证明:** 首先,  $f(b, d)$  对  $b$  的一阶偏导数为

$$f'_b(b, d) = \frac{1 + \theta_R}{\beta} \left( 1 - e^{-d\beta/b} - \frac{d\beta}{b} e^{-d\beta/b} \right) = \frac{1 + \theta_R}{\beta} h(b),$$

其中

$$h(b) = 1 - e^{-d\beta/b} - \frac{d\beta}{b} e^{-d\beta/b}.$$

注意到

$$\frac{\partial h(b)}{\partial b} = -\frac{d^2\beta^2}{b^3} e^{-d\beta/b} < 0.$$

因此  $h(b)$  在  $[0, 1]$  上是减函数. 又因为

$$h(1) = 1 - e^{-d\beta} - d\beta e^{-d\beta} = \frac{e^{d\beta} - 1 - d\beta}{e^{d\beta}} > 0.$$

因此有  $h(b) \geq h(1) > 0$ , 则  $f'_b(b, d) > 0$ . 另一方面, 有

$$f'_d(b, d) = (1 + \theta_R) e^{-d\beta/b} > 0.$$

引理得证.  $\square$

我们的主要目的是求解下面的最优化问题

$$J(b^*, d^*) = \min_{b, d \in B_0} J(b, d), \quad (16)$$

其最优解记为  $B^* = \{(b^*, d^*) : (b^*, d^*) \in B_0\}$ , 其中  $b^*$  和  $d^*$  分别表示再保险的最优比例系数和最优自留额.

注意到, 目标函数  $J(b, d)$  为分段函数, 首先需要比较  $d$ 、 $bC_I$  和  $bC_R$  的大小确定  $J(b, d)$  的表达式, 进而根据拉格朗日条件极值法确定最优解.

根据  $J(b, d)$  的表达式, 将  $d$ 、 $bC_I$  和  $bC_R$  的关系分成下面三种情形分别求最优解:

$$(1) d \leq bC_R; \quad (2) bC_R \leq d \leq bC_I; \quad (3) d \geq bC_I.$$

注意到  $d = bC_R$  和  $d = bC_I$  分别表示二维平面上表示一条通过原点且斜率为  $C_R$  和  $C_I$  的两条直线, 记为  $l_1$  和  $l_2$ . 根据 (10) 得到

$$d_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{1-k} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\theta_R}{1+\theta_I} < \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R} = C_R < C_I,$$

因此  $l_1$  和  $l_2$  这两条直线将可行域划分为三个可行子域.

$$B_1 = \{(b, d) \mid d \leq bC_R, (b, d) \in B_0\}, \quad B_2 = \{(b, d) \mid bC_R \leq d \leq bC_I, (b, d) \in B_0\}$$

以及

$$B_3 = \{(b, d) \mid d \geq bC_I, (b, d) \in B_0\}.$$

为了求得可行域  $B_1$  的边界交点, 令

$$\begin{cases} d = bC_R; \\ d = \frac{b}{\beta} \ln \left( \frac{b}{b-k} \right), \end{cases}$$

解得  $b = k/(1 - \alpha_R)$ ,  $d = kC_R/(1 - \alpha_R)$ . 设可行域  $B_0$  的下边界  $L$  与直线  $d = bC_R$  的交点为  $A_1(b_1, b_1C_R)$ , 其中  $b_1 = k/(1 - \alpha_R)$ . 类似地, 设可行域  $B_0$  的下边界  $L$  与直线  $d = bC_I$  的交点为  $A_2(b_2, b_2C_I)$ , 其中  $b_2 = k/(1 - \alpha_I)$ . 记  $M_0(1, d_0)$ 、 $N_1(1, C_R)$  和  $N_2(1, C_I)$  分别表示直线  $b = 1$  与曲线  $L$ 、直线  $l_1$  和  $l_2$  的交点. 取  $\alpha_I = e^{-7/3}$ ,  $\alpha_R = e^{-4/3}$ , 得到可行域的划分如图 2 所示.

在最优再保险的分析中, 权重系数  $\lambda$  反映了最优再保险决策中考虑原保险人和再保险人风险的重要性. 下面分  $\lambda < 0.5$  和  $\lambda > 0.5$  两种情况进行研究.

### 1) 侧重再保险人风险的最优再保险策略

若凸风险组合中, 更多地考虑再保险的风险, 则权重系数  $0 \leq \lambda < 1/2$ . 为了得到混合再保险在凸风险组合的最优解, 下面对可行域划分为  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$  等三个子区域进行讨论. 因此得到下面的结论.



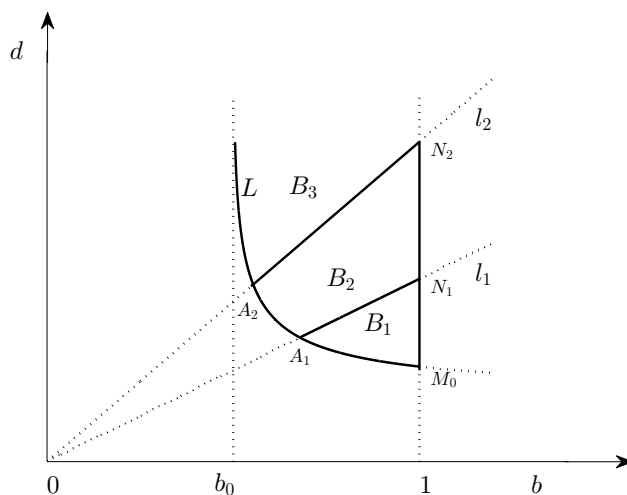


图2 再保险的可行域的子域划分图形

**定理 4** 在  $\lambda \in [0, 1/2)$  且  $d \leq bC_R$  条件下, 有

- 当  $\ln \alpha_R < (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时, 则最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ ;
- 当  $\ln \alpha_R = (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时, 则最优解为  $B^* = \{(b, d) \mid d = (b/\beta) \ln(1/\alpha_R), b_1 \leq b \leq 1\}$ ;
- 当  $\ln \alpha_R > (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时, 则最优解为  $b^* = b_1, d^* = (b_1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ .

**证明:** 当  $d \leq bC_R$  时  $(b, d) \in B_1$ , 目标函数  $J(b, d)$  简化为

$$J(b, d) = (1 - 2\lambda)[f(b, d) - d] + D. \quad (17)$$

则  $J(b, d)$  关于  $b$  和  $d$  的一阶偏导数为

$$\begin{cases} J'_b(b, d) = (1 - 2\lambda)f'_b(b, d); \\ J'_d(b, d) = (2\lambda - 1)[1 - f'_d(b, d)]. \end{cases} \quad (18)$$

当  $0 \leq \lambda < 1/2$  时,  $1 - 2\lambda > 0$ . 显然有  $J'_b(b, d) > 0$ . 因此, 对固定的  $d \in B_1$ ,  $b_1$  越小则目标函数值越小. 因此限制在可行子区域  $B_1$  中最优解必然在弧  $\widehat{A_1M_0}$  或线段  $A_1N_1$  上. 将弧  $\widehat{A_1M_0}$  的函数代入目标函数, 并记  $G_{11}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=(b/\beta) \ln[b/(b-k)]}$ , 则有

$$G_{11}(b) = -\frac{1 - 2\lambda}{\beta} \left[ b \ln \frac{b}{b-k} - k(1 + \theta_R) \right] + D.$$

由引理 1 可知,

$$\frac{\partial G_{11}(b)}{\partial b} = -\frac{1 - 2\lambda}{\beta} \left( \ln \frac{b}{b-k} - \frac{k}{b-k} \right) > 0.$$

因此  $G_{11}(b)$  关于  $b$  为增函数, 因此要使目标函数达到最小, 则最优解  $b^* = b_1$  且  $d^* = b_1 C_R$ . 进而, 将线段  $A_1 N_1$  的方程代入目标函数, 并记  $G_{12}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=bC_R}$ , 则有

$$G_{12}(b) = \frac{b(1-2\lambda)}{\beta} [\ln \alpha_R - (1+\theta_R)(\alpha_R-1)] + D.$$

显然, 当  $\ln \alpha_R < (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 有  $G_{12}(b)$  关于  $b$  为减函数, 因此要使目标函数达到最小, 则最优解为  $b^* = 1, d^* = C_R$ ; 当  $\ln \alpha_R = (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 有  $G_{12}(b) = 0$ , 因此目标函数在线段  $A_1 N_1$  上为常数, 即线段  $A_1 N_1$  上任意点均为最优解; 当  $\ln \alpha_R > (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 有  $G_{12}(b)$  关于  $b$  为增函数, 因此要使目标函数达到最小, 则最优解为  $b^* = b_1$ , 此时  $d^* = b_1 C_R$ . 综上可知定理成立.  $\square$

**定理 5** 在  $\lambda \in [0, 1/2)$  且  $bC_R \leq d \leq bC_I$  的情况下, 有下面的结论.

- 当  $\ln \alpha_R < (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 则最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ ;
- 当  $\ln \alpha_R = (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 则最优解为  $B^* = \{(b, d) | d = (b/\beta) \ln(1/\alpha_R), b_1 \leq b \leq 1\}$ ;
- 当  $\ln \alpha_R > (1+\theta_R)(\alpha_R-1)$  时, 则最优解为  $b^* = b_1, d^* = (b_1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ .

**证明:** 当  $bC_R \leq d \leq bC_I$  时  $(b, d) \in B_2$ , 目标函数  $J(b, d)$  简化为

$$J(b, d) = \lambda d - (1-\lambda)bC_R + (1-2\lambda)f(b, d) + D. \quad (19)$$

则  $J(b, d)$  分别对  $b$  和  $d$  求一阶偏导可得:

$$\begin{cases} J'_b(b, d) = -(1-\lambda)C_R + (1-2\lambda)f'_b(b, d); \\ J'_d(b, d) = \lambda + (1-2\lambda)f'_d(b, d). \end{cases} \quad (20)$$

由于  $0 \leq \lambda < 1/2$ , 则  $J'_d(b, d) > 0$ . 因此, 对固定的  $b \in B_2$ , 自留额  $d$  越小则目标函数越小. 因此最优解必然落在可行子域的边界弧  $\widehat{A_1 A_2}$  或线段  $A_1 N_1$  上. 将边界弧  $\widehat{A_1 A_2}$  满足的关系代入目标函数, 并记  $G_{13}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=(b/\beta) \ln[b/(b-k)]}$ , 则有

$$G_{13}(b) = \frac{b}{\beta} \left[ \lambda \ln \frac{b}{b-k} + (1-\lambda) \ln \alpha_R \right] + \frac{k(1-2\lambda)(1+\theta_R)}{\beta} + D.$$

对  $G_{13}(b)$  求导可得

$$\frac{\partial G_{13}(b)}{\partial b} = \frac{\lambda}{\beta} \left( \ln \frac{b}{b-k} - \frac{k}{b-k} \right) - \frac{1-\lambda}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R} < 0.$$

说明  $G_{13}(b)$  关于  $b$  为减函数, 因此要使目标函数达到最小, 则最优解为  $b^* = b_1, d^* = b_1 C_R$ . 进而, 将线段  $A_1 N_1$  满足的关系代入目标函数, 并记  $G_{14}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=bC_R}$ , 则有

$$G_{14}(b) = \frac{b(1-2\lambda)}{\beta} [\ln \alpha_R - (1+\theta_R)(\alpha_R-1)] + D.$$

当  $\ln \alpha_R > (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时,  $G_{13}(b)$  关于  $b$  为增函数, 则最优解为  $b^* = b_1$ ,  $d^* = b_1 C_R$ ; 当  $\ln \alpha_R = (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时,  $G_{13}(b) = 0$ , 因此目标函数在线段  $A_1 N_1$  上值为常数, 即线段  $A_1 N_1$  上任意点均为最优解; 当  $\ln \alpha_R < (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  时,  $G_{13}(b)$  关于  $b$  为减函数, 则最优解为  $b^* = 1$ ,  $d^* = C_R$ . 因此定理成立.  $\square$

**定理 6** 在  $\lambda \in [0, 1/2)$  且  $d \geq b C_I$  的情况下, 有下面的结果.

- 当  $Q \leq 0$  时, 再保险的最优解为  $b^* = 1$ ,  $d^* = C_I$ ;
- 当  $P < 0$ ,  $Q > 0$  时, 再保险的最优解为  $B^* = b_2$ ,  $d^* = b_2 C_I$ ;
- 当  $P \geq 0$  时, 再保险的最优解为  $b^* = b_0$ ,  $d^* = \infty$ .

其中  $P = (1 - \lambda) \ln \alpha_R - \lambda \ln \alpha_I$  以及  $Q = P + (1 - 2\lambda)(1 + \theta_R)(1 - \alpha_R)$ .

**证明:** 在  $d \geq b C_I$  时  $(b, d) \in B_3$ , 此时目标函数为

$$J(b, d) = b[\lambda C_I - (1 - \lambda)C_R] + (1 - 2\lambda)f(b, d) + D. \quad (21)$$

则  $J(b, d)$  分别对  $b$  和  $d$  求偏导可得

$$\begin{cases} J'_b(b, d) = \lambda C_I - (1 - \lambda)C_R + (1 - 2\lambda)f'_b(b, d); \\ J'_d(b, d) = (1 - 2\lambda)f'_d(b, d). \end{cases} \quad (22)$$

由于  $0 \leq \lambda < 1/2$  时, 显然有  $J'_d(b, d) > 0$ . 因此对于每一个固定的  $b \in B_3$ , 自留额  $d$  越小则目标函数越小, 即最优解必然落在曲线  $L$  或线段  $A_2 N_2$  上. 将曲线  $L$  满足的方程代入目标函数, 并记  $G_{15}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=(b/\beta) \ln[b/(b-k)]}$ , 则有

$$G_{15}(b) = bP + \frac{k}{\beta}(1 - 2\lambda)(1 + \theta_R) + D.$$

将线段  $A_2 N_2$  满足的函数代入目标函数, 并记  $G_{16}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=b C_I}$ , 则有

$$G_{16}(b) = \frac{b}{\beta}Q + D.$$

由于  $(1 - 2\lambda)(1 + \theta_R)(1 - \alpha_R) > 0$ , 则  $Q > P$ . 当  $P \geq 0$  时  $Q \geq 0$ ,  $G_{15}(b)$  和  $G_{16}(b)$  都是关于  $b$  为增函数, 则最优解必然在点  $A_2$  或  $N_2$  处达到. 容易证明  $G_{15}(b_0) < G_{15}(b_2)$ , 因此最优解为  $b^* = b_0$ ,  $d^* = \infty$ . 当  $P < 0$ ,  $Q > 0$  时,  $G_{15}(b)$  是  $b$  的减函数, 而  $G_{16}(b)$  是  $b$  的增函数, 因此最优解都在  $A_2$  点达到, 即  $B^* = b_2$ ,  $d^* = b_2 C_I$ ; 当  $Q \leq 0$  时, 有  $P \leq 0$ , 因此  $G_{15}(b)$  和  $G_{16}(b)$  都是  $b$  的减函数, 则最优解必然在点  $b = b_2$  或  $b = 1$  处达到. 由于  $G_{16}(1) < G_{16}(b_2)$ , 因此最优解为  $b^* = 1$ ,  $d^* = C_I$ . 定理成立.  $\square$

## 2) 侧重原保险人风险的最优再保险策略

在上一节的讨论中知道, 在可行域的所有子域中, 最优解往往在可行子域的交界处得到. 当  $\lambda > 1/2$  时, 表示最小化风险过程中更多地考虑再保险人的风险. 这时最优解的求解方法与  $0 \leq \lambda < 1/2$  类似. 因此得到下面的几个定理.

**定理 7** 在  $\lambda \in (1/2, 1]$  且  $d \leq bC_R$  的情况下, 最优解如下:

- 当  $(\theta_R - \theta_I)/(1 - \theta_I) < \theta_R < (1 - \alpha_R)/\alpha_R$  时, 最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1 + \theta_R)$ ;
- 当  $\theta_R \geq (1 - \alpha_R)/\alpha_R$  时, 最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ .

**证明:** 当  $d \leq bC_R$  时  $(b, d) \in B_1$ , 此时目标函数及其一阶偏导数分别为 (17)、(18) 式. 当  $1/2 < \lambda < 1$  时, 显然有  $J'_b(b, d) < 0$ . 因此对固定的  $d \in B_1$ , 比例系数  $b$  越大则目标函数越小, 即最优解必然落在线段  $M_0N_1$  上. 将线段  $M_0N_1$  代入目标函数, 并记  $G_{21}(d) \triangleq J(b, d)|_{b=1}$ , 因此得到

$$G_{21}(d) = \frac{2\lambda - 1}{\beta} [\beta d + (1 + \theta_R)e^{-d\beta} - (1 + \theta_R)] + D.$$

则其导数为

$$[G_{21}(d)]' = (2\lambda - 1)[1 - (1 + \theta_R)e^{-d\beta}] + D.$$

设  $d_1$  为  $[G_{21}(d)]' = 0$  的解, 可得  $d_1 = (1/\beta) \ln(1 + \theta_R)$ . 则当  $d < d_1$  时,  $G_{21}(d)$  为  $d$  的减函数; 当  $d > d_1$  时,  $G_{21}(d)$  为  $d$  的增函数. 由于  $d_1 - d_0 = (1/\beta) \ln(1 + \theta_I) > 0$ , 则有  $d_1 > d_0$ . 因此, 当  $d_0 < d_1 < C_R$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = d_1$ ; 当  $d_1 \geq C_R$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = C_R$ . 定理成立.  $\square$

**定理 8** 在  $\lambda \in (1/2, 1]$  且  $bC_R \leq d \leq bC_I$  的情况下, 最优解如下:

- 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $\alpha_I \leq t_2$  时, 最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1/\alpha_I)$ ;
- 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $\alpha_I < t_2 < \alpha_R$  时, 最优解为  $b^* = 1, d^* = d_2$ ;
- 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $\alpha_R \leq t_2$  时, 最优解为  $b^* = 1, d^* = (1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ ;
- 当  $\ln \alpha_R < t_1$  且  $\alpha_R \leq t_2$  时, 最优解为  $b^* = b_1, d^* = (b_1/\beta) \ln(1/\alpha_R)$ ;
- 当  $t_2 < \ln \alpha_I < \ln \alpha_R < t_1$  时, 最优解为

$$B^* = \left\{ (b, d) \mid \min \left\{ J\left(b_1, \frac{b_1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R}\right), J\left(1, \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_I}\right) \right\} \right\};$$

- 当  $\ln \alpha_I < \ln t_2 < \ln \alpha_R < t_1$  时, 最优解为

$$B^* = \left\{ (b, d) \mid \min \left\{ J\left(b_1, \frac{b_1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R}\right), J(1, d_2) \right\} \right\}.$$

其中

$$t_1 = (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1) \quad \text{以及} \quad t_2 = \frac{\lambda}{(1 + \theta_R)(2\lambda - 1)}.$$

**证明:** 当  $bC_R \leq d \leq bC_I$  时  $(b, d) \in B_2$ , 由于  $1/2 < \lambda \leq 1$ , 则有  $J'_b(b, d) < 0$ . 因此对固定的  $d \in B_2$ , 比例系数  $b$  越大目标函数越小, 即最优解落在线段  $A_1N_1$  或线段  $N_1N_2$  上.

将线段  $A_1N_1$  代入目标函数, 并记  $G_{22}(b) \triangleq J(b, d)|_{d=bC_R}$  ( $b_1 \leq b \leq 1$ ), 则有

$$G_{22}(b) = \frac{b(1 - 2\lambda)}{\beta} [\ln \alpha_R - (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)] + D.$$

显然, 当  $\ln \alpha_R > t_1$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = C_R$ ; 当  $\ln \alpha_R = t_1$  时,  $G_{22}(b) = 0$ , 因此线段  $A_1N_1$  上任意点均为最优解; 当  $\ln \alpha_R < t_1$  时, 最优解  $b^* = b_1, d^* = b_1C_R$ .

将线段  $N_1N_2$  代入目标函数, 并记  $G_{23}(d) \triangleq J(b, d)|_{b=1}$  ( $C_R \leq d \leq C_I$ ), 则有

$$G_{23}(d) = \lambda d + \frac{(2\lambda - 1)(1 + \theta_R)}{\beta} e^{-d\beta} + \frac{1}{\beta} [(1 - \lambda) \ln \alpha_R - (2\lambda - 1)(1 + \theta_R)] + D.$$

对  $G_{23}(d)$  求导可得

$$[G_{23}(d)]' = \lambda - (2\lambda - 1)(1 + \theta_R)e^{-d\beta}.$$

记  $d_2$  为  $[G_{23}(d)]' = 0$  的解, 则  $d_2 = (1/\beta) \ln(1/t_2)$ . 显然, 当  $d < d_2$  时  $G_{23}(d)$  为  $d$  的减函数, 当  $d > d_2$  时  $G_{23}(d)$  为  $d$  的增函数. 因此, 当  $d_2 \geq C_I$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = C_I$ ; 当  $C_R < d_2 < C_I$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = d_2$ ; 当  $d_2 \leq C_R$  时, 最优解  $b^* = 1, d^* = C_R$ .

综上, 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $t_2 \leq \alpha_I$  时, 最优解必然落在线段  $A_1N_1$  或点  $N_2$  上, 易知  $G_{23}(C_R) > G_{23}(C_I)$ , 故最优解为  $b^* = 1, d^* = C_I$ ; 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $\alpha_I < t_2 < \alpha_R$  时, 最优解必然落在线段  $A_1N_1$  或点  $(1, d_2)$  上, 易知  $G_{23}(C_R) > G_{23}(d_2)$ , 最优解  $b^* = 1, d^* = d_2$ ; 当  $\ln \alpha_R \geq t_1$  且  $\alpha_R \leq t_2$  时, 最优解必然落在点  $N_1$  上, 故最优解  $b^* = 1, d^* = C_R$ ; 当  $\ln \alpha_R < t_1$  且  $\alpha_R \leq t_2$  时, 最优解必然落在点  $A_1$  或点  $N_1$  上, 易知  $G_{22}(C_R) > G_{22}(b_1)$ , 故最优解  $b^* = b_1, d^* = b_1C_R$ ; 当  $\ln \alpha_R < t_1$  且  $\alpha_I \geq t_2$  时, 最优解必然落在点  $A_1$  或点  $N_2$  上, 最优解为

$$B^* = \{(b, d) \mid \min\{J(b_1, b_1C_R), J(1, C_I)\}\}.$$

当  $\ln \alpha_R < t_1$  且  $\alpha_I < t_2 < \alpha_R$ , 最优解必然落在点  $A_1$  或点  $(1, d_2)$  上, 最优解为

$$B^* = \{(b, d) \mid \min\{J(b_1, b_1C_R), J(1, d_2)\}\}.$$

定理成立.  $\square$

**定理 9** 在  $\lambda \in (1/2, 1]$  且  $d \geq bC_I$  的情况下, 最优解为单纯的成数再保险, 且最优比例系数  $b^* \in (b_0, 1]$ .

**证明:** 当  $d \geq bC_I$  时  $(b, d) \in B_3$ , 此时目标函数及其一阶偏导数分别为 (21)、(22) 式. 又因  $1/2 < \lambda \leq 1$ , 则有  $J'_d(b, d) < 0$ , 因此对固定的  $b \in B_3$  目标函数的最优解  $d$  趋于无穷大, 因此  $d^* = +\infty, b \in (b_0, 1]$ . 即此时再保险合同为单纯的成数再保险, 因此混合再保险最优解不存在.  $\square$

### 3) 等权重系数下的最优再保险

在最优再保险形式的求解中, 当  $\lambda = 1/2$  表示同等地考虑原保险人和再保险人的风险, 此时的最优解有较为特殊的形式. 叙述为下面的定理.

**定理 10** 在  $\lambda = 1/2$  且  $d \leq bC_R$  的情况下, 最优解为  $B_1$  集合中任意点.

**证明:** 当  $d \leq bC_R$  时  $(b, d) \in B_1$ , 此时目标函数及其一阶偏导数分别为 (17)、(18) 式. 又因  $\lambda = 1/2$ , 有  $J(b, d) = D$  成立, 因此  $J(b, d)$  关于  $b$ 、 $d$  为常数, 故目标函数的最优解为子区域  $B_1$  中任何点.  $\square$

**定理 11** 在  $\lambda = 1/2$  且  $bC_R \leq d \leq bC_I$  的情况下, 最优解为

$$B^* = \left\{ (b, d) \mid d = \frac{b}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R}, b_1 \leq b \leq 1 \right\}. \quad (23)$$

**证明:** 当  $bC_R \leq d \leq bC_I$  时  $(b, d) \in B_2$ , 此时目标函数及其一阶偏导数分别为 (19)、(20) 式. 又因  $\lambda = 1/2$ , 有

$$J(b, d) = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}bC_R + D.$$

则  $J'_b(b, d) < 0$  以及  $J'_d(b, d) > 0$ , 故目标函数的最优解必然落在线段  $A_1N_1$  上. 将线段  $A_1N_1$  代入目标函数可得  $J(b, d) = D$ , 因此最优解为  $B^* = \{(b, d) \mid d = (b/\beta) \ln(1/\alpha_R), b_1 \leq b \leq 1\}$ .  $\square$

**定理 12** 在  $\lambda = 1/2$  且  $d \geq bC_I$  的情况下, 最优解为

$$B^* = \left\{ (b, d) \mid d = \frac{b}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha_R}, b_0 < b \leq b_2 \right\}. \quad (24)$$

**证明:** 当  $d \geq bC_I$  时  $(b, d) \in B_3$ , 此时目标函数及其一阶偏导数分别为 (21)、(22) 式. 又因  $\lambda = 1/2$ , 有

$$J(b, d) = \frac{1}{2}(C_I - C_R)b + D.$$

因此  $J'_b(b, d) > 0$  且  $J'_d(b, d) = 0$ , 故目标函数的最优解必然落曲线  $L$  对应曲线段上, 因此最优解为  $B^* = \{(b, d) \mid d = (b/\beta) \ln(1/\alpha_R), b_0 < b \leq b_2\}$ .  $\square$

## §4. 数值例子

注意到, 影响最优解的因素不仅仅是再保险双方的权重系数, 还有再保险双方的安全载荷和置信水平. 为了便于计算, 取  $\lambda = 0.25$  和  $\lambda = 0.75$ , 并给出以下例子.

**例 13** 假设损失  $X$  的分布函数为  $F_X(x) = 1 - e^{-0.001x}$ , 并取  $\theta_I = 0.1$ ,  $\theta_R = 0.15$ . 为了比较置信水平对最优解的影响, 取  $\alpha_R$  的值分别为  $0.90, 0.91, 0.92, \dots, 0.95$ . 首先, 对所有的  $\alpha_R$  值都有  $\ln \alpha_R > (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$  成立. 当  $\lambda = 0.25$  时, 根据定理 4 和定理 5, 最优解存在. 然后, 对所有的  $\alpha_R$  值都有  $\theta_R > (1 - \alpha_R)/\alpha_R$  成立. 当  $\lambda = 0.75$  时, 根据定理 7, 最优解存在. 在  $\lambda = 0.25$  和  $\lambda = 0.75$  的情况下, 不同  $\alpha_R$  值对应的最优解见表 1.

表1 再保险人的安全载荷变化引起最优解的变化

$\alpha_R$		0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95
$\lambda = 0.25$	$b^*$	0.4348	0.4831	0.5435	0.6211	0.7246	0.8696
	$d^*$	45.8089	45.5607	45.3161	45.0750	44.8372	44.6029
$\lambda = 0.75$	$b^*$	1	1	1	1	1	1
	$d^*$	105.3605	94.3107	83.3816	72.5707	61.8754	51.2933

由表1可知,在侧重考虑再保险人的利益时( $\lambda = 0.25$ ),组合再保险的比例系数对再保险人的置信水平非常敏感,随着置信水平的增大再保险人的损失逐渐减小;在侧重考虑保险人的利益时( $\lambda = 0.75$ ),组合再保险的免赔额对再保险人的置信水平非常敏感,随着置信水平的增大保险人的自留损失逐渐较小.

**例14** 假设损失 $X$ 的分布函数为 $F_X(x) = 1 - e^{-0.001x}$ ,并取 $\theta_I = 0.1$ ,  $\alpha_R = 0.93$ . 为了比较安全载荷对最优解的影响,取 $\theta_R$ 的值分别为0.12, 0.13, 0.14,  $\dots$ , 0.18. 首先,对所有的 $\theta_R$ 值都有 $\ln \alpha_R > (1 + \theta_R)(\alpha_R - 1)$ 成立. 当 $\lambda = 0.25$ 时,根据定理4和定理5,最优解存在. 然后,对所有的 $\alpha_R$ 值都有 $\theta_R > (1 - \alpha_R)/\alpha_R$ 成立. 当 $\lambda = 0.75$ 时,根据定理7,最优解存在. 在 $\lambda = 0.25$ 和 $\lambda = 0.75$ 的情况下,不同 $\alpha_R$ 值对应的最优解见表2.

表2 再保险人的安全载荷变化引起最优解的变化

$\theta_R$		0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18
$\lambda = 0.25$	$b^*$	0.2551	0.3793	0.5013	0.6211	0.7389	0.8547	0.9685
	$d^*$	18.5129	27.5237	36.3763	45.0750	53.6237	62.0262	70.2864
$\lambda = 0.75$	$b^*$	1	1	1	1	1	1	1
	$d^*$	72.5707	72.5707	72.5707	72.5707	72.5707	72.5707	72.5707

由表2可知,在侧重考虑再保险人的利益时( $\lambda = 0.25$ ),组合再保险的比例系数和免赔额对再保险人的安全载荷都非常敏感,随着安全载荷的增大再保险人的损失逐渐增大,也即是随着再保费的增加再保险人也要承担更多的损失;在侧重考虑保险人的利益时( $\lambda = 0.75$ ),再保险人的安全载荷在这一范围内对组合再保险的两个系数均没有影响.

## 参 考 文 献

- [1] BORCH K. Reciprocal reinsurance treaties [J]. *Astin Bull*, 1960, **1**(4): 170–191.
- [2] VAJDA S. Minimum variance reinsurance [J]. *Astin Bull*, 1962, **2**(2): 257–260.
- [3] ARROW K J. Uncertainty and the welfare economics of medical care [J]. *Am Econ Rev*, 1963, **53**(5): 941–973.

- [4] KALUSZKA M, OKOLEWSKI A. An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract [J]. *J Risk Insur*, 2008, **75**(2): 275–288.
- [5] CAI J, TAN K S. Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures [J]. *Astin Bull*, 2007, **37**(1): 93–112.
- [6] CAI J, TAN K S, WENG C G, et al. Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures [J]. *Insurance Math Econom*, 2008, **43**(1): 185–196.
- [7] ZHOU M, DONG H B, XU J F. Optimal combinational of quota-share and stop-loss reinsurance contracts under VaR and CTE with a constrained reinsurance premium [J]. *J Syst Sci Complex*, 2011, **24**(1): 156–166.
- [8] SUN H Z, WENG C G, ZHANG Y. Optimal multivariate quota-share reinsurance: a nonparametric mean-CVaR framework [J]. *Insurance Math Econom*, 2017, **72**: 197–214.
- [9] DU J H, LI Z M, WU L J. Optimal stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures: variable transformation method [J]. *Comput Econom*, 2019, **53**(3): 1133–1151.
- [10] BORCH K. The optimal reinsurance treaty [J]. *Astin Bull*, 1969, **5**(2): 293–297.
- [11] CAI J, FANG Y, LI Z, et al. Optimal reciprocal reinsurance treaties under the joint survival probability and the joint profitable probability [J]. *J Risk Insur*, 2013, **80**(1): 145–168.
- [12] FANG Y, QU Z F. Optimal combination of quota-share and stop-loss reinsurance treaties under the joint survival probability [J]. *IMA J Manag Math*, 2014, **25**(1): 89–103.
- [13] PANAHI-BAZAZ A, PAYANDEH-NAJAFABADI A T. An optimal reinsurance contract from insurer's and reinsurer's viewpoints [J]. *Appl Appl Math*, 2015, **10**(2): 970–982.
- [14] PAYANDEH-NAJAFABADI A T, PANAHI-BAZAZ A. An optimal combination of proportional and stop-loss reinsurance contracts from insurer's and reinsurer's viewpoints [OL]. 2017 [2017-1-19]. <https://arxiv.org/abs/1701.05450>.

## Optimal Reinsurance Strategy of Convex Risk Combination in Mixed Reinsurance

TAN Xianzhong      WEN Limin

(School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330022, China)

**Abstract:** Reinsurance is an effective risk management strategy, which plays an important role in the insurance industry. Under the principle of expected premium, this paper considers the risk of both the insurer and the reinsurer. Taking the convex combination of the VaR value of the total loss of each reinsurance party as the objective function, the theoretical solution of the optimal proportion coefficient and the optimal retention in the mixed reinsurance are obtained. In addition, the various situations of the optimal solution are discussed and analyzed, which provides the decision basis for the risk management of the insurance company.

**Keywords:** optimal reinsurance; VaR risk measurement; convex combination; expected value premium principle

**2020 Mathematics Subject Classification:** 62G35