

基于长收益率序列信息的时变波动率估计及实证研究*

王江艳 林金官* 陈旭岚

(南京审计大学统计与数据科学学院, 南京, 211815)

摘要: 股票市场的价格波动以及其带来的收益率变化备受国内外专家学者的关注. 在此背景下, 本文主要研究长资产收益率序列波动率的变化情况, 并用于上证综合指数的实例分析中. 由于最常用的 GARCH 模型仅在观察周期较短时才充分有效, 针对长资产收益率序列的波动率往往具有长记忆性, 本文提出了一种改进的时变波动率模型. 为使模型更好地拟合波动率的变化, 本文将波动率的方差分解为条件方差与无条件方差的乘积, 通过合理的模型转化, 使条件方差遵循 GARCH 过程, 无条件方差使用非参数方法 (B-spline 函数) 拟合, 并使之随时间平滑变化. 通过数据仿真模拟实验发现, 本文所研究的模型能够更好地拟合波动率的变化情况. 上证综合指数日收益率序列的实证分析结果表明: (i) 本文提出的非参数估计方法具有良好的拟合效果; (ii) 无条件方差变化幅度与经济衰退呈现较强的相关性; (iii) 时变波动率模型中明显的波动幅度可用非平稳分量的变化来解释.

关键词: 长金融时间序列; 非参数估计; GARCH 模型; B-spline 函数; 乘法分解

中图分类号: O212

英文引用格式: WANG J Y, LIN J G, CHEN X L. The estimation of time varying volatility based on the long stock return series with its application [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(5): 523-543. (in Chinese)

§1. 引言

从荷兰出现世界上第一支股票开始, 金融市场迅速发展壮大, 阿姆斯特丹证券交易所、伦敦证券交易所、纽约证券交易所相继出现, 资本的大量涌入, 造就了金融市场波澜壮阔的历史. 但利润永远伴随着风险, 证券市场自诞生以来就以其价格的波动性为主要特征, 能否准确描述证券市场的价格波动成为确定未来市场收益率的切入点与关键点. 由于波动率在资产组合构建、金融产品定价, 以及风险管理和货币政策制定方面的特殊优势, 无法了解衡量股票市场收益不确定性的波动率, 难以掌握和度量风险, 更无法进行有效的资产配置. 分析和预测资本市场的走向, 是判断和研究股票价格波动趋势的一个重要依据, 因此波动率模型的估计和预测具有重要的现实意义.

*国家自然科学基金青年项目 (批准号: 11801272)、国家自然科学基金面上项目 (批准号: 11971235)、江苏省自然科学基金青年项目 (批准号: BK20180820)、江苏高校“青蓝工程”和江苏省高校哲学社会科学研究项目 (批准号: 2019SJA0353) 资助.

*通讯作者, E-mail: jglin@nau.edu.cn.

本文 2020 年 2 月 5 日收到, 2020 年 2 月 27 日收到修改稿.

虽然研究的侧重不尽相同, 学术界关注波动率的研究已有较为丰富的成果: Engle^[1] 提出了自回归条件异方差模型 (ARCH 模型), 并将其应用于英国通货膨胀率的研究, 取得了良好的拟合效果, 之后也有学者从各个方面对该模型进行变形和改进, 并把它们广泛应用于资产定价、风险控制、汇率分析、宏观调控等领域. 其中 Bollerslev^[2] 提出了著名的广义 ARCH (GARCH) 模型, 该模型的条件方差函数得到了拓展, 同时自回归项的增加实现了 ARCH 模型的一般化. 这是一个专门为金融时间序列数据量体订做的回归模型, 通过对误差方差进行深入建模, GARCH 模型提高了分析和预测的准确性.

然而, 波动率是不能被直接观测的, 这在实际操作中给收益率的研究带来了困难. 虽然对 GARCH 模型的研究在不断深入和完善, 但它在描述金融时间序列时依旧存在不足. 郑振龙和黄慧舟^[3] 发现在拟合真实的股票波动率时, GARCH 模型仅在观察周期较短时才有效, 对于长收益率序列的拟合并不准确. 这是因为在标准一阶 GARCH 模型中, 观测值平方的自相关函数呈指数衰减, 这种衰减速度太快以至于无法表现出长收益率序列中确定性转移所产生的长记忆行为. 因此, 学者们希望开发出更加符合金融市场波动规律的模型, 其中一种是 Baillie 等^[4] 提出的, 属于长记忆类模型的分数整合 GARCH 模型. 在这个模型中, 收益率平方的自相关函数呈现出双曲线衰减的特征, 所以它比 GARCH 模型更适合于长期金融序列. 另外, Baillie 和 Morana^[5] 提出了 FIGARCH 的一个推广模型, 主要是根据 Gallant^[6] 提出的函数形式, 通过改变该模型的截距来体现长收益率序列的特征.

股票市场的价格波动随时间变化, 其收益率表现出在某段时间内持续偏低或偏高的特点, 也即波动率聚集. 波动率聚集现象产生的原因在于外部冲击对股票价格变动的持续性影响, 其在收益率分布上表现出的特征是尖峰厚尾. 大量实证研究表明, 波动率是时变的, 文献中对波动率时变性的解释主要包括跳跃波动率、常方差弹性、随机波动率等. 时变特征造成了波动率模型研究有别于平稳时间序列的另一困难: 非平稳性. 目前尚未有完善的模型可以用来描述这种非平稳性, 但已有一系列的文献对其进行尝试性的研究. Van Bellegem 和 von Sachs^[7] 以及 Feng^[8] 发现一些金融时间序列具有时变的无条件二阶结构, 其特征的描述主要是通过 GARCH 模型中引入平滑尺度函数, 从而使得波动率能被乘法分解为确定性非平稳 (无条件方差) 和随机平稳 (条件方差) 两部分来建模, 并分别使用极大似然估计法和核估计法来估计平稳和非平稳分量, 进而研究了其渐近正态性. Stărică 和 Granger^[9] 在研究股票日收益率序列时放弃了序列平稳的假设, 认为金融市场的基本特征是不不断变化的, 并且发现收益率序列的大部分波动都体现在无条件方差的变化上, 所以该文献假设非平稳序列中的收益率是具有时变无条件方差的独立随机变量, 并利用平稳模型对非平稳数据进行局部逼近. 之后, Engle 和 Rangel^[10] 运用了与 Van Bellegem 和 von Sachs^[7] 相同的乘法分解, 并且假设确定性非平稳分量由指数样条来描述, 随机平稳分量遵循一阶 GARCH 过程, 并通过对股票长序列收益率数据进行研究发现, 当国内生产总值、通货膨胀率、短期利率等宏观经济因素波动较大时, 股票市场的波动也会随之加大, 金融时间序列会更多地表现出非平稳性, 并且这一研究结论不仅适用于新兴市场和上市公司数量较少、市值与 GDP 之比相对较小的市场, 同时也适用于大型经济体.

大量的研究表明, 对无条件方差进行某种数学分解, 可以很好地捕获波动率的非平稳信息. 相关的研究包括但不限于: Amado 和 Teräsvirta^[11] 提出使用可加 (没有具体展开讨论) 和可乘的方差分解, 引进了广义逻辑转移函数 (LSTR) 允许模型的方差具有光滑的时变结构, 参数化的模型描述了方差的结构变化, 并使用局部极大似然对可乘模型进行参数估计, 改进了 Glosten 等^[12] 的标准 GJR-GARCH 模型; Amado 和 Teräsvirta^[13] 针对长收益序列的波动率, 提出了可乘时变 GARCH 模型, 并提供了相关的测试及时变波动率参数模型的标准化建模步骤, 统计检验也验证了此参数模型相比 GJR-GARCH 模型的优势.

尽管在描述非平稳性方面, Van Bellegem 和 von Sachs^[7] 提供了模型范式, Amado 和 Teräsvirta^[11,13] 分别对时变 GJR-GARCH 模型和时变波动率模型中的参数估计方法进行了较为深入的研究, 模型参数可解释性较强, 并且给出了极大似然估计算法, 然而由于涉及的参数众多, 增加了局部极大似然估计迭代更新过程的计算量, 还存在模型误判的风险; 而参数模型的不灵活性, 增加了模型运用的难度. 目前时变 GARCH 模型的非参数估计研究较少, 也尚未建立有效的理论框架. 因此, 本文在考虑波动率非平稳性的基础上, 为时变 GARCH 模型提供一种非参数估计及预测分析方法, 用以描述长收益率序列的波动率聚集现象, 及外部冲击对股票价格变动的持续性影响.

本文主要研究长资产收益率序列中无条件方差的变化, 波动率的方差将被分解为条件方差与无条件方差的乘积. 其中, 条件方差遵循 GARCH 过程且描述波动率的短期动态, 无条件方差由 B-spline 基函数的线性组合拟合且描述波动率的长期动态. 通过此类乘法分解, 该模型可充分描述长期波动率的变化情况, 探究股市价格波动与经济情况变化之间的关系, 因而本文研究的时变非参数 GARCH 模型, 能够描述和预测股票的波动率.

本文结构如下: §2 给出了时变波动率模型, 包括乘法分解、非平稳趋势分量和平稳分量的建模细节. §3 是参数估计方法, 主要包括 B-spline 函数光滑化参数的选择, 先估计非平稳趋势函数, 再估计时变波动率模型参数的两步估计法. §4 中的数值模拟研究是为了检验所提出的时变波动率模型方法的样本表现, 实例数据分析在 §5 展现. §6 给出了本文的总结和展望. 主要理论性质在附录 §7 呈现.

§2. 模 型

大量的实际数据表明股票市场的价格波动是非平稳的, 其波动率随时间的变化而变化, 且呈现明显的波动率聚集现象. 为了更好地描述这种非平稳性, 本文利用乘法分解对波动率进行研究. 具体地, 本文以 GARCH 模型为基础对长资产收益率序列进行建模, 且假设收益率序列的无条件方差随时间平滑变化. 根据长资产收益率序列的特征, 考虑使用 GARCH(p, q) 模型. 设 \mathcal{F}_{t-1} 为时间 $t-1$ 处获得的历史信息集, 并将资产收益率 $\{Y_t\}$ 写为

$$Y_t = E(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \zeta_t h_t^{1/2}, \quad (1)$$

其中 $\zeta_t \sim N(0, 1)$ 且相互独立, 序列 $\{\varepsilon_t\}$ 的条件分布为 $\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t)$, 同时 h_t 与 ζ_t

互相独立. 此时, 序列 $\{\varepsilon_t\}$ 的条件方差可随时间变化. 实际中资产收益率的条件均值被设为零, 即 $E(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$, 模型中 $\{\varepsilon_t\}$ 的条件方差 h_t 是通过 GARCH(p, q) 模型来拟合的:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (2)$$

重写 (2) 式可得

$$h_t = \sigma^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - \sigma^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j (h_{t-j} - \sigma^2), \quad (3)$$

其中 $\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) = \omega / (1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j)$. 当 $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ 时, 条件方差的均值以速率 $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$ 回到 σ^2 .

赵华和蔡建文^[14] 研究发现股票市场存在明显的高、低波动状态, 而且高波动状态的持续时间要短于低波动状态的持续时间. 王娟和李锐^[15] 通过对实际数据的研究发现, 长资产收益率序列的波动率是显著非平稳的, 且具有明显的时变长记忆性和非对称效应. 为了更好地拟合长收益率序列的波动率变化, 本文选择一个更加灵活、随时间平滑变化的无条件方差函数来描述它. 因此, 本文将方差分解为乘法形式:

$$\varepsilon_t = \zeta_t h_t^{1/2} g_t^{1/2}, \quad \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t g_t), \quad (4)$$

其中未知非平稳分量 $g_t = g(t/n) > 0$, $1 \leq t \leq n$, 且为有界函数, 也即对任意 $u \in [0, 1]$, 存在 $a, b > 0$, 使得 $0 < a \leq g_t \leq b < \infty$, 为保证非平稳分量的可识别性, 设定 $g_0 = g(0) = 1$; 平稳分量 h_t 用 (2) 式中的 GARCH 模型拟合. 假设 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$ 是时变波动率模型的观测值, 结合 (1)、(2) 和 (4) 式, 用于描述资产长收益率序列非平稳性的时变波动率模型为

$$Y_t = \varepsilon_t = \zeta_t h_t^{1/2} g_t^{1/2}. \quad (5)$$

§3. 估计方法

本节将具体探讨模型系数估计的两步估计法. 众所周知, 当 ARCH 模型中的滞后阶数很大时, 会有过多的参数需要估计, GARCH 模型的提出克服了这个问题, 而在所有的 GARCH(p, q) 中, GARCH(1, 1) 是结构最简单、应用最广泛的模型. Franses 和 van Dijk^[16] 利用 GARCH(1, 1) 模型对周收益率进行拟合, 研究结果表明 GARCH(1, 1) 模型的拟合有很高的准确性. 在波动率预测的准确性方面, 邹建军等^[17] 在研究上证指数日收益率序列的波动性时发现, 比之 Riskmetrics 法和移动平均法, GARCH(1, 1) 模型的表现更为优异; 在拟合与预测方面, Hansen 和 Lunde^[18] 表明, 参数更复杂的 GARCH 模型并不一定比 GARCH(1, 1) 模型更加有效. 因此, 本文选择用适用性最广泛的 GARCH(1, 1) 模型来拟合平稳分量, 重写 (2) 式可得

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (6)$$

因此将 (6) 式代入 (5) 式可得参数估计模型如下:

$$Y_t = \zeta_t(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1})^{1/2} g_t^{1/2}, \quad (7)$$

重写 (7) 式可得

$$\zeta_t h_t^{1/2} = \zeta_t(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1})^{1/2} = Y_t / g_t^{1/2}, \quad (8)$$

其中 ζ_t 是一列独立的标准正态随机变量, Y_t 表示长收益率序列的实现值. 根据方程 (6), 潜在过程 $\zeta_t h_t^{1/2}$ 是一个平稳的 GARCH 序列. 为得到模型系数的估计, 本文采用两步估计法. 第一步, 使用 B-spline 估计法来估计非平稳分量 g_t ; 第二步, 利用极大似然法估计模型的系数 ω, α, β . 众所周知, B-spline 方法被应用于统计数据的光滑化处理, 之后, de Boor^[19] 和 Cox^[20] 发现了 B-spline 函数中存在的递推关系, 并以此递推关系为出发点定义了 B-spline 函数. B-spline 函数是基曲线的线性组合, 它不仅具有 Bezier 曲线^[21] 的优势, 同时也克服了 Bezier 曲线不能进行局部修改的缺点.

为得到趋势项的 B-spline 估计量, 本文定义等距内点序列 $\{\tau_J\}_{J=1}^{N_s}$, 其中 N_s 被称为 B-spline 估计的节点数, $\tau_J = J/(N_s + 1)$ 将 $[0, 1]$ 划分为 $N_s + 1$ 个等距子区间 $I_0 = (0, \tau_1]$, $I_J = [\tau_J, \tau_{J+1}]$, $1 \leq J \leq N_s - 1$, $I_{N_s} = [\tau_{N_s}, 1)$. 对于任意正整数 p , 令 $\mathcal{H}^{(p-2)} = \mathcal{H}^{(p-2)}[0, 1]$ 为定义于 I_J , $J = 0, 1, \dots, N_s$ 上的 $p - 1$ 阶多项式函数空间, 具有 $p - 2$ 阶导数. 比如, $\mathcal{H}^{(-1)}$ 代表定义于 I_J , $J = 0, 1, \dots, N_s$ 上的常数 B-spline 函数空间, 在 $[0, 1]$ 上连续; $\mathcal{H}^{(0)}$ 代表定义于 I_J , $J = 0, 1, \dots, N_s$ 上的分段线性函数空间; $\mathcal{H}^{(1)}$ 代表定义于 I_J , $J = 0, 1, \dots, N_s$ 上的 2 阶多项式函数空间. 记 $\mathcal{H}^{(p-2)} = \sum_{J=1}^{N_s+p} \lambda_{J,p} B_{J,p}(x)$, $\lambda_{J,p} \in \mathbb{R}$, 其中 $B_{J,p}$ 是第 J 个 p 阶 B-spline 基函数, 详见文献 [22].

本文选取股票日收益率数据作为观测值 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$, 利用 B-spline 函数拟合非平稳分量 $g(\cdot)$, 得到其估计函数 $\hat{g}(\cdot)$. 设不考虑识别条件时非平稳分量为 $g^*(x)$, 其 B-spline 估计的目标函数为

$$\hat{g}_t^* = \hat{g}^*(t/n) = \underset{f(\cdot) \in \mathcal{H}^{(p-2)}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^n [Y_t^2 - f(t/n)]^2,$$

记 B-spline 拟合函数值组成的 $n \times (N_s + p)$ 阶矩阵 \mathbf{M} 为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} B_{1,p}(1/n) & B_{2,p}(1/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(1/n) \\ B_{1,p}(2/n) & B_{2,p}(2/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(2/n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,p}(n/n) & B_{2,p}(n/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(n/n) \end{bmatrix}.$$

令 $\mathbf{B}(x) = (B_{1,p}, B_{2,p}, \dots, B_{N_s+p,p})^\top$, $\mathbf{Y}^2 = (Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_n^2)^\top$, 根据定义可得非平稳分量 g_t 的 B-spline 估计量 $\hat{g}^*(x)$, $x \in (0, 1]$ 为 $\hat{g}^*(x) = \mathbf{B}(x)(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{Y}^2$. 因此,

$$\hat{g}_t^* = \mathbf{B}(t/n)(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{Y}^2, \quad 1 \leq t \leq n. \quad (9)$$

需要说明的是, 为再现过程 $\zeta_t h_t^{1/2}$ 保证极大似然估计的顺利进行, 确定性趋势函数 g_t 必须具备可识别性, 根据 $g^*(x) = \mathbf{E}Y_t^2(x) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}[Y_t^2(x) | h_t]\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}[g(x)h_t\varepsilon_t^2 | h_t]\} = g(x)\mathbf{E}h_t$, 然而在实际估计中, $\mathbf{E}h_t$ 是未知量, 根据模型 (5) 的设定 $g(0) = 1$, 容易发现 $g^*(0) = \mathbf{E}h_t$, 因此关系 $g(x) = g^*(x)/g^*(0)$, $x \in (0, 1]$ 成立. 所以, 在实际操作中, $\hat{g}(x) = \hat{g}^*(x)/\hat{g}^*(0)$, $x \in (0, 1]$, 因而满足上述要求的非平稳分量的估计函数可被定义为

$$\hat{g}_t = \hat{g}(t/n) = \hat{g}^*(t/n)/\hat{g}^*(1/n), \quad 1 \leq t \leq n. \quad (10)$$

为此, 本文需要研究确定性分量/非平稳分量 $g_t(\cdot)$ 估计量的性质.

假设 1 以下是本文所需要的技术性假设:

(A1) $\{h_t^{1/2}\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 严格平稳.

(A2) 模型参数 $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. 同时 $\alpha + \beta < 1$.

(A3) 矩条件 $\mathbf{E}(\zeta_t)^4 < \infty$. $\mathbf{E}[\ln(\alpha\zeta^2 + \beta)] < 0$, ω 与 $\{\zeta_t\}$ 独立.

(A4) 非平稳分量 $g(\cdot) \in C^{(p-1)}[0, 1]$, $p = 2, 3, 4$, 也即非平稳分量具有 $p-1$ 阶连续导数.

(A5) 子区间的长度 $h \sim n^{-1/(2p+1)}$, 也即节点的个数 $N_s \sim n^{1/(2p+1)}$.

条件 (A1) 是一个标准假设, 它有助于推导估计量的渐近性质, 条件 (A2) 保证了条件方差 $h_t > 0$ 几乎处处成立, 也即 $\mathbf{P}(h_t > 0) = 1$, 条件 (A3)–(A5) 是得到非平稳分量渐近性质的关键, 其中条件 (A5) 给出了 B-spline 估计量节点数的范围. 以下的定理 2 阐述了非平稳分量的 B-spline 估计量一致收敛于真实的非平稳分量函数.

定理 2 在假设 (A1)–(A5) 条件下,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |\hat{g}(x) - g(x)| = \|\hat{g} - g\|_{\infty} = \mathcal{O}_p(n^{-1/2} N_s^{1/2} \ln^{1/2} n).$$

得到非平稳分量 g_t 的估计量之后, 可利用极大似然估计法求解 GARCH(1, 1) 模型的系数 ω, α, β . 接下来我们研究模型的系数估计.

在样条平滑中, 由于节点数 N_s 和阶数 p 控制 B-spline 估计的拟合程度, 影响最终的估计结果, 因此节点数 N_s 和拟合阶数 p 的选择是关键问题. 节点数 N_s 通常被视为未知调整参数, 本文基于绝对值的策略选取. 采用的标准为: 重复计算 G 次, 取初始节点数 $N_s \in [\lfloor 2n^{1/(2p+1)} \rfloor, \lfloor 9n^{1/(2p+1)} \rfloor]$, 其中 “ $\lfloor \cdot \rfloor$ ” 代表 “向下取整”, 应用 B-spline 函数拟合非平稳分量, 得到估计函数 $\hat{g}(\cdot)$, 再应用 GARCH 模型的估计方法, 得到模型系数的估计量 $\hat{\omega}_{i,j}, \hat{\alpha}_{i,j}, \hat{\beta}_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, G$, $j \in [\lfloor 2n^{1/(2p+1)} \rfloor, \lfloor 9n^{1/(2p+1)} \rfloor]$, 使其与相应的真实值之差的绝对值之和最小, 对于 $i = 1, 2, \dots, G$, 目标函数

$$L_i = \min_{j \in [\lfloor 2n^{1/(2p+1)} \rfloor, \lfloor 9n^{1/(2p+1)} \rfloor]} (|\hat{\omega}_{i,j} - \omega| + |\hat{\alpha}_{i,j} - \alpha| + |\hat{\beta}_{i,j} - \beta|). \quad (11)$$

根据以上准则选择出最优的光滑化参数 $N_{s,i} = L_i$, $i = 1, 2, \dots, G$, 代入 (9) 和 (10), 并根据极大似然估计法求解 GARCH(1, 1) 模型的系数 $\omega_i, \alpha_i, \beta_i$, 得到相应的模型系数估计量 $\hat{\omega}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$, $i = 1, 2, \dots, G$.

§4. 数值模拟

为了更好地显示本文的非参数估计方法在时变 GARCH 模型系数估计中的表现, 本文选取不同形状的非平稳分量 g_t 进行模拟研究. 考虑到非平稳波动率的结构性突变带来的影响, 选取如下形状的非平稳确定性分量: 第一类为“左突”趋势函数

$$g_{t,1} = 3 \times [1 - 100 \times (t/n - 0.3)^2]^3 \times (|t/n - 0.3| \leq 0.1) + 1 + 3t/n, \quad (12)$$

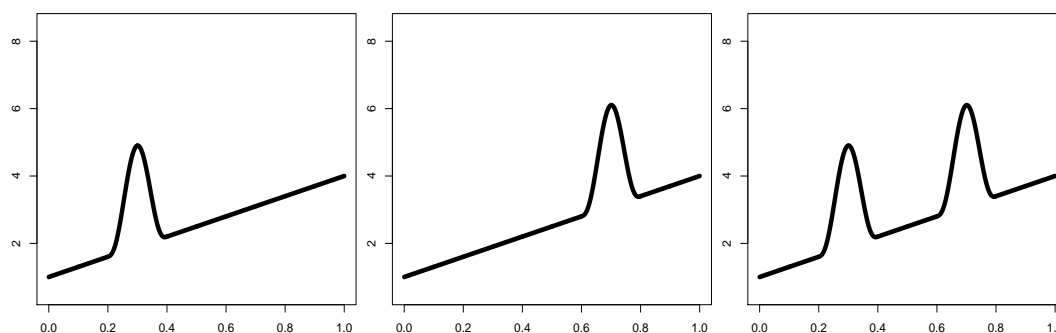
第二类为“右突”趋势函数

$$g_{t,2} = 3 \times [1 - 100 \times (t/n - 0.7)^2]^3 \times (|t/n - 0.7| \leq 0.1) + 1 + 3t/n, \quad (13)$$

第三类为“双突”趋势函数

$$g_{t,3} = 3 \times [1 - 100 \times (t/n - 0.3)^2]^3 \times (|t/n - 0.3| \leq 0.1) + 1 + 3t/n \\ + 3 \times [1 - 100 \times (t/n - 0.7)^2]^3 \times (|t/n - 0.7| \leq 0.1), \quad (14)$$

三种趋势函数详见图 1 (a), (b), (c).



(a) “左突”趋势函数 $g_{t,1}$

(b) “右突”趋势函数 $g_{t,2}$

(c) “双突”趋势函数 $g_{t,3}$

图 1 趋势函数 $g_{t,k}$, $k = 1, 2, 3$

数值模拟中采用 1 000 次重复试验. 为了充分验证本文所研究模型的可靠性和准确性, 本文分别选取了 6 组平稳分量的系数值“情形 1”–“情形 6”(见表 1), 以及 3 组非平稳分量趋势函数 $g_{t,k}$, $k = 1, 2, 3$ (见图 1) 来进行模拟. 同时将给定的原始系数与通过模型拟合得

到的估计系数相比, 为方便展示和揭示样本规律, 本文取 1000 次模拟试验的平均值进行比较, 即三个平均值之比 $\overline{\hat{\omega}}/\overline{\omega}$, $\overline{\hat{\alpha}}/\overline{\alpha}$, $\overline{\hat{\beta}}/\overline{\beta}$. 根据 §3, $\overline{\hat{\omega}}/\overline{\omega}$, $\overline{\hat{\alpha}}/\overline{\alpha}$, $\overline{\hat{\beta}}/\overline{\beta}$ 可被计算如下:

$$\overline{\hat{\omega}}/\overline{\omega} = \sum_{i=1}^G \hat{\omega}_i/\omega G, \quad \overline{\hat{\alpha}}/\overline{\alpha} = \sum_{i=1}^G \hat{\alpha}_i/\alpha G, \quad \overline{\hat{\beta}}/\overline{\beta} = \sum_{i=1}^G \hat{\beta}_i/\beta G, \quad (15)$$

上式中 $G = 1000$. 模拟实验计算步骤见表 2.

表 1 数值模拟的系数设置

情形	系数 (ω, α, β)
情形 1	$(\omega = 0.1, \alpha = 0.3, \beta = 0.4)$
情形 2	$(\omega = 0.1, \alpha = 0.3, \beta = 0.1)$
情形 3	$(\omega = 0.1, \alpha = 0.4, \beta = 0.1)$
情形 4	$(\omega = 0.000001, \alpha = 0.3, \beta = 0.4)$
情形 5	$(\omega = 0.000001, \alpha = 0.3, \beta = 0.1)$
情形 6	$(\omega = 0.000001, \alpha = 0.4, \beta = 0.1)$

表 2 数值模拟计算步骤

Step 1: 根据方程 (2) 及方程 (4), 生成独立同分布的正态序列 $\{\zeta_t\}$;
Step 2: 根据方程 (5) 的模型, 重复 1000 次, 生成 1000 组对应的长资产收益率序列 $\{Y_t\}$;
Step 3: 每一次试验根据方程 (11) 选择光滑化参数 p 进行非参数估计, 计算对应的非平稳分量 \hat{g}_t ;
Step 4: 根据乘法分解步骤计算对应的平稳分量 \hat{h}_t ;
Step 5: 利用 GARCH(1, 1) 模型拟合, 得到收益率序列系数的估计 $\hat{\omega}_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, i = 1, 2, \dots, 1000$;
Step 6: 取 1000 次重复试验的平均值 $\overline{\hat{\omega}}/\overline{\omega}, \overline{\hat{\alpha}}/\overline{\alpha}, \overline{\hat{\beta}}/\overline{\beta}$, 见方程 (15).

基于“情形 1”–“情形 3”, 表 3 主要比较了估计量在 B-spline 光滑阶数 $p = 2, 4$ 时的样本表现. 为全面考虑, 基于“情形 1”–“情形 6”, 表 4 中主要比较了 B-spline 光滑阶数 $p = 3$ 时, 估计量的不同样本表现. 数值结果表明: (i) 时变波动率模型中三个系数的估计量与其真值的比值在 1 附近波动, 说明估计方法计算准确有效; (ii) 随着样本量的增大, 比值 $\overline{\hat{\omega}}/\overline{\omega}$, $\overline{\hat{\alpha}}/\overline{\alpha}$, $\overline{\hat{\beta}}/\overline{\beta}$ 更接近于 1, 系数估计结果更为准确, 符合参数估计的大样本规律; (iii) B-spline 函数的光滑阶数较高时, 比如 $p = 3, 4$ 较之 $p = 2$ 表现好, 也即估计值更接近真值, 这也表明针对本文的时变波动率模型, 较高的光滑阶数表现更好, 但对比光滑阶数 $p = 3$ 与 $p = 4$ 的结果发现, 两者的结果非常相近, 因此可认为 $p = 3$ 已达到非参数光滑化的要求.

为直观显示系数估计的准确性, 图 2 绘制了非平稳函数及其 B-spline 拟合函数; 图 3 展示了“情形 1”中不同样本量下系数估计量与真值之比 $\hat{\omega}_i/\omega_i, \hat{\alpha}_i/\alpha_i, \hat{\beta}_i/\beta_i, i = 1, 2, \dots, 1000$ 的箱线图. 可以发现, 针对光滑阶数 $p = 2, 3, 4$ 的模拟实验, 本文的 B-spline 方法拟合非平稳函数 $g_{t,1}, g_{t,2}, g_{t,3}$ 达到良好的估计效果, 尤其光滑阶数 $p = 3, 4$ 效果更好. 模拟中我们也对比了组别“情形 2”–“情形 6”的情形, 发现拟合效果与“情形 1”类似, 在此不

表 3 模型系数估计的数值表现 (B-spline 阶数 $p = 2, 4$)

情形		$g_{t,1}$	$g_{t,1}$	$g_{t,2}$	$g_{t,2}$	$g_{t,3}$	$g_{t,3}$
样本量		$n = 1\,000$	$n = 10\,000$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$
$p = 2$							
情形 1	$\widehat{\omega}$	0.133	0.099	0.142	0.101	0.146	0.099
	$\widehat{\alpha}$	0.284	0.299	0.285	0.299	0.287	0.299
	$\widehat{\beta}$	0.381	0.401	0.383	0.400	0.401	0.401
情形 1	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	0.753	1.007	0.703	0.993	0.684	1.008
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.056	1.005	1.051	1.004	1.047	1.004
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	1.051	0.998	1.044	0.999	0.997	0.997
情形 2	$\widehat{\omega}$	0.108	0.098	0.107	0.100	0.108	0.102
	$\widehat{\alpha}$	0.269	0.299	0.274	0.299	0.271	0.298
	$\widehat{\beta}$	0.107	0.100	0.108	0.102	0.111	0.100
情形 2	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	0.925	1.024	0.930	0.998	0.929	0.983
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.113	1.003	1.096	1.003	1.107	1.006
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	0.930	1.003	0.929	0.982	0.898	0.997
情形 3	$\widehat{\omega}$	0.134	0.099	0.117	0.101	0.131	0.099
	$\widehat{\alpha}$	0.395	0.398	0.372	0.399	0.399	0.399
	$\widehat{\beta}$	0.123	0.101	0.107	0.101	0.128	0.102
情形 3	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	0.747	1.009	0.885	0.995	0.761	1.010
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.014	1.004	1.076	1.003	1.001	1.004
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	0.813	0.987	0.857	0.993	0.784	0.983
$p = 4$							
情形 1	$\widehat{\omega}$	0.146	0.102	0.139	0.100	0.108	0.102
	$\widehat{\alpha}$	0.296	0.298	0.289	0.298	0.302	0.297
	$\widehat{\beta}$	0.393	0.401	0.392	0.401	0.408	0.400
情形 1	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	0.684	0.983	0.718	0.996	0.926	0.979
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.012	1.006	1.040	1.007	0.995	1.009
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	1.018	0.998	1.020	0.998	0.980	1.000
情形 2	$\widehat{\omega}$	0.112	0.101	0.116	0.100	0.115	0.102
	$\widehat{\alpha}$	0.273	0.298	0.280	0.298	0.258	0.298
	$\widehat{\beta}$	0.101	0.098	0.113	0.101	0.107	0.099
情形 2	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	0.891	0.985	0.862	1.004	0.873	0.982
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.098	1.008	1.072	1.005	1.161	1.007
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	0.991	1.023	0.887	0.990	0.936	1.010
情形 3	$\widehat{\omega}$	0.100	0.101	0.105	0.100	0.116	0.101
	$\widehat{\alpha}$	0.377	0.398	0.373	0.397	0.387	0.397
	$\widehat{\beta}$	0.140	0.102	0.128	0.101	0.144	0.101
情形 3	$\widehat{\omega}/\widehat{\omega}$	1.005	0.989	0.953	0.997	0.863	0.989
	$\widehat{\alpha}/\widehat{\alpha}$	1.060	1.005	1.071	1.008	1.034	1.008
	$\widehat{\beta}/\widehat{\beta}$	0.714	0.983	0.782	0.993	0.694	0.987

表 4 模型系数估计的数值表现 (B-spline 阶数 $p = 3$)

情形		$g_{t,1}$	$g_{t,1}$	$g_{t,2}$	$g_{t,2}$	$g_{t,3}$	$g_{t,3}$
样本量		$n = 1\,000$	$n = 10\,000$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$	$n = 1\,000$	$n = 10\,000$
情形 1	$\widehat{\omega}$	0.116	0.100	0.129	0.102	0.118	0.100
	$\widehat{\alpha}$	0.291	0.297	0.288	0.298	0.293	0.297
	$\widehat{\beta}$	0.396	0.400	0.392	0.400	0.405	0.402
情形 1	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	0.862	1.002	0.775	0.984	0.847	1.004
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.031	1.009	1.042	1.005	1.024	1.009
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	1.010	1.000	1.020	1.000	0.988	0.999
情形 2	$\widehat{\omega}$	0.104	0.098	0.100	0.100	0.102	0.098
	$\widehat{\alpha}$	0.275	0.297	0.278	0.299	0.269	0.297
	$\widehat{\beta}$	0.115	0.098	0.117	0.102	0.120	0.099
情形 2	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	0.962	1.016	1.000	0.999	0.980	1.018
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.091	1.010	1.079	1.002	1.115	1.009
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	0.897	1.022	0.855	0.984	0.833	1.011
情形 3	$\widehat{\omega}$	0.111	0.101	0.111	0.101	0.113	0.101
	$\widehat{\alpha}$	0.366	0.396	0.378	0.398	0.366	0.397
	$\widehat{\beta}$	0.123	0.101	0.118	0.101	0.130	0.101
情形 3	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	0.901	0.995	0.901	0.989	0.885	0.995
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.093	1.009	1.058	1.005	1.093	1.009
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	0.813	0.990	0.847	0.994	0.769	0.987
情形 4	$\widehat{\omega}$	0.00000092	0.00000103	0.00000108	0.00000102	0.00000092	0.00000103
	$\widehat{\alpha}$	0.276	0.297	0.275	0.297	0.277	0.297
	$\widehat{\beta}$	0.402	0.400	0.405	0.400	0.407	0.401
情形 4	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	1.087	0.974	0.926	0.982	1.091	0.975
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.087	1.011	1.091	1.011	1.083	1.010
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	0.995	0.999	0.988	1.001	0.983	0.999
情形 5	$\widehat{\omega}$	0.00000257	0.00000111	0.00000108	0.00000101	0.00000119	0.00000111
	$\widehat{\alpha}$	0.244	0.298	0.261	0.299	0.245	0.299
	$\widehat{\beta}$	0.105	0.100	0.116	0.100	0.110	0.108
情形 5	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	0.389	0.901	0.926	0.987	0.840	0.902
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.229	1.006	1.149	1.005	1.224	1.005
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	0.952	1.000	0.862	1.000	0.909	0.992
情形 6	$\widehat{\omega}$	0.00000141	0.00000111	0.00000108	0.00000101	0.00000107	0.00000108
	$\widehat{\alpha}$	0.357	0.397	0.358	0.397	0.363	0.399
	$\widehat{\beta}$	0.132	0.103	0.129	0.102	0.145	0.105
情形 6	$\overline{\omega/\widehat{\omega}}$	0.709	0.903	0.926	0.989	0.937	0.925
	$\overline{\alpha/\widehat{\alpha}}$	1.120	1.006	1.117	1.008	1.103	1.003
	$\overline{\beta/\widehat{\beta}}$	0.758	0.966	0.775	0.983	0.690	0.950

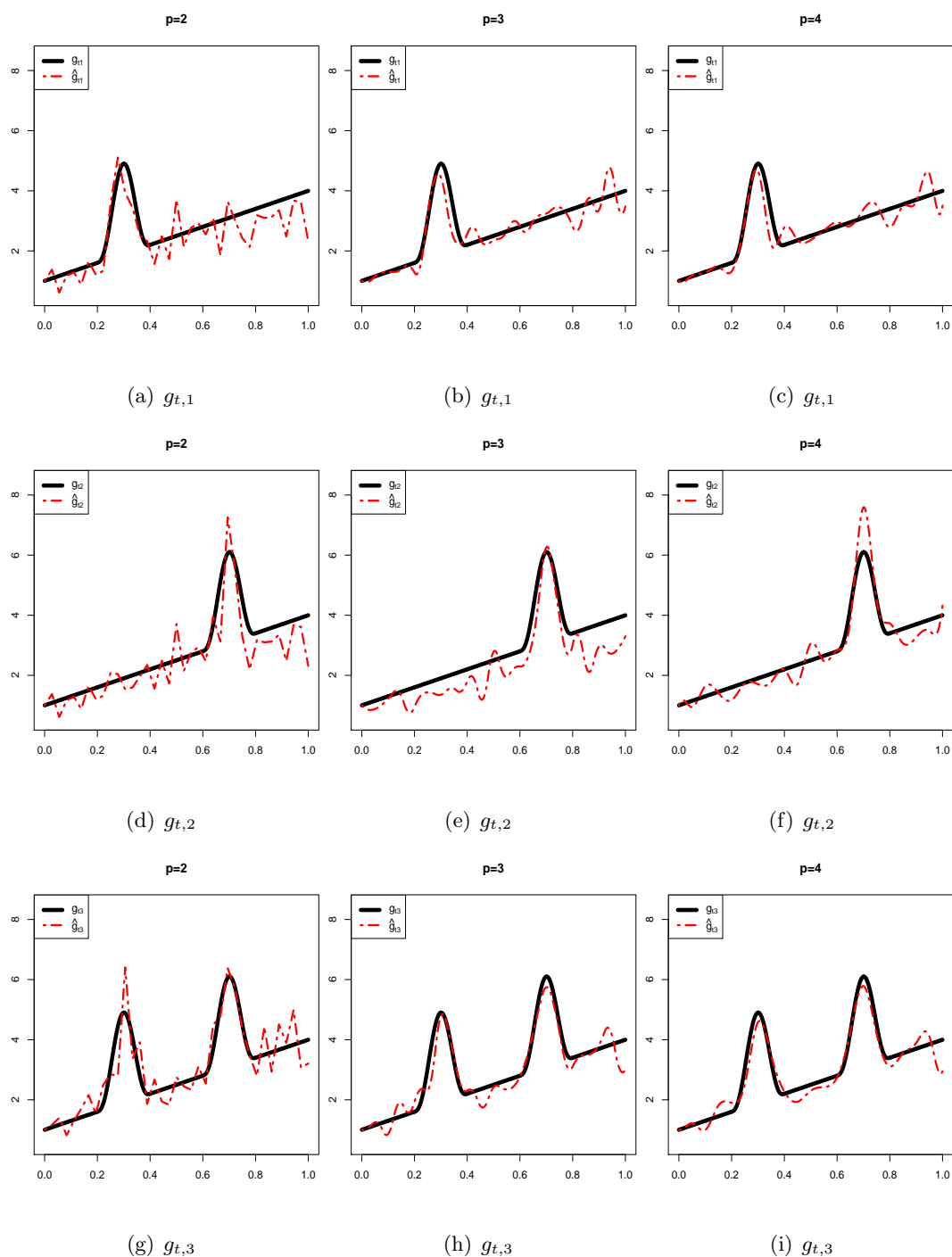


图 2 “情形 1” 中非平稳函数 $g_{t,i}$, $i = 1, 2, 3$ 及其 B-spline 拟合函数 $\hat{g}_{t,i}$, $i = 1, 2, 3$

再一一展示. 同时, 观察箱线图可以发现: (i) 随着样本量的增大, 当 $n = 10\,000$ 时, 比值 $\hat{\omega}_i/\omega_i$, $\hat{\alpha}_i/\alpha_i$, $\hat{\beta}_i/\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, 1\,000$ 较之 $n = 1\,000$ 更接近 1, 同时箱线图的分布也更为集中; (ii) 比较 $\hat{\alpha}_i/\alpha_i$ 和 $\hat{\beta}_i/\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, 1\,000$, 不同 B-spline 光滑阶数的表现非常类

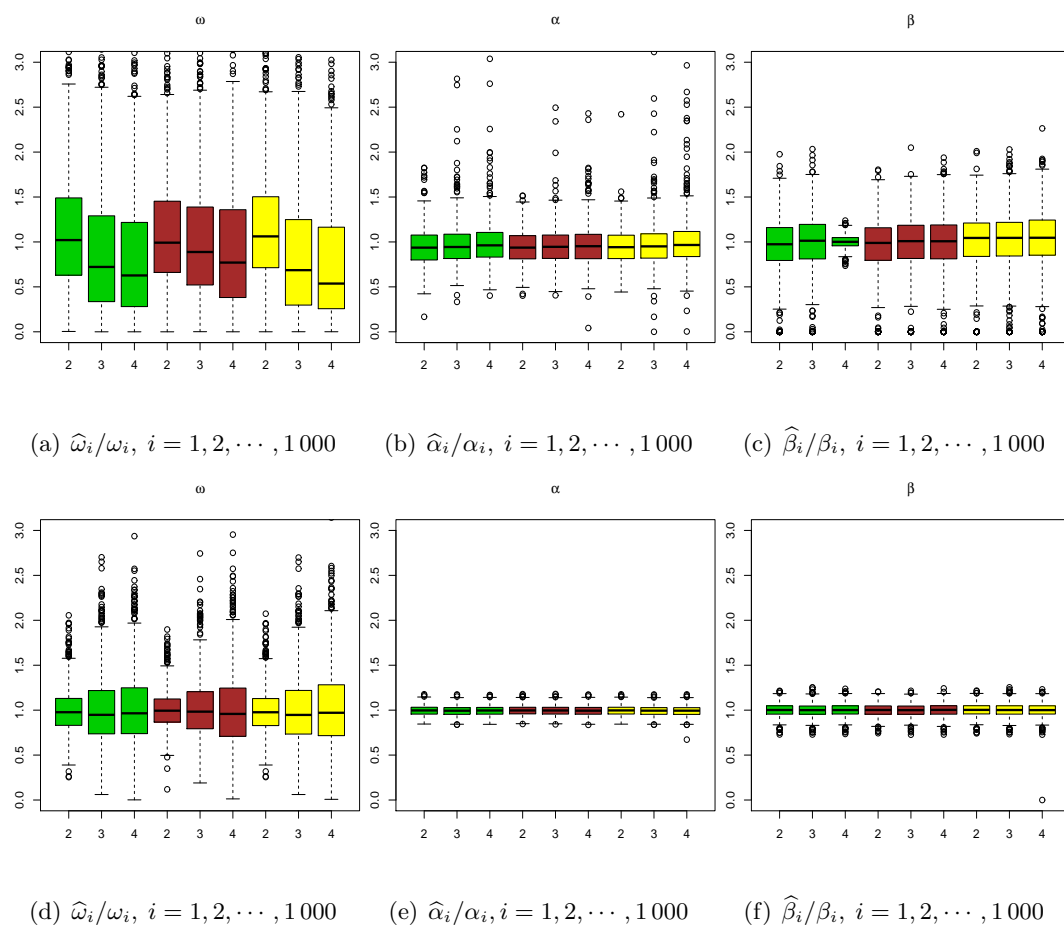


图 3 “情形 1” 中模型参数估计值与真值之比 $\hat{\omega}_i/\omega_i$, $\hat{\alpha}_i/\alpha_i$, $\hat{\beta}_i/\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, 1000$ 所构成的箱线图, 横坐标 2, 3, 4 分别对应 $p = 2, 3, 4$, (a) – (c) 样本量 $n = 1000$, (d) – (f) 样本量 $n = 10000$

似, 而 $\hat{\omega}_i/\omega_i$, $i = 1, 2, \dots, 1000$ 中, 光滑阶数 $p = 2$ 时箱线图分布更为集中; (iii) 所有的中位数都非常接近 1, 其中 $\hat{\alpha}_i/\alpha_i$ 和 $\hat{\beta}_i/\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, 1000$ 的箱线图分布集中, 而 $\hat{\omega}_i/\omega_i$, $i = 1, 2, \dots, 1000$ 的分布相对分散, 因此 $\hat{\alpha}_i/\alpha_i$ 和 $\hat{\beta}_i/\beta_i$ 的箱线图表现相对更好.

数值模拟结果充分表明, 本文研究的时变波动率模型系数估计准确有效, 可用于实践研究.

§5. 实际数据分析: 上证综合指数研究

本实例以我国最早发布的股票市场指数——上证综合指数为研究对象, 它是以发行量为权数的加权综合股价指数, 其计算范围涵盖了上海证券交易所挂牌上市的全部股票. 本文选取的起止期间为 1990 年 12 月 19 日至 2019 年 10 月 8 日, 共计 7040 个上证综指收盘价

序列数据. 对上证综指收盘价进行作图分析, 见图 4(a), 可观察到其总体呈现波动的趋势, 指数跨度从 99.98 到 6 092.057. 从图中发现, 2007 年 10 月上证指数从高位下滑, 伴随 2008 年的全球金融危机, 上证指数也于 2008 年 11 月跌至 1 706 点. 之后又呈现波动上升趋势, 在 2015 年 6 月到达顶峰后缓慢下降. 因此在这个时间序列中有两处明显的上升走势, 分别对应的是 2007 年 10 月和 2015 年 6 月.

由于资产收益率与投资规模无关, 前后数值相差很大, 为减少异方差性以及具有更好的统计性质而易于处理, 本文对原始数据进行对数化处理, 并用一阶差分表示股票日收益率, 基于日收益率序列, 我们将研究本文提出的估计方法拟合日收益率序列的表现. 按照通常的金融数据处理方法, 本文计算上证综指每日收盘价的对数收益率, 由此建立上证综指收盘价的对数收益率序列, 见图 4(b). 为能够更好地刻画波动趋势, 根据数值模拟的结论, 设定 B-spline 函数的光滑阶数 $p = 3$, 并选取节点数初值范围 $N_s \in [5, 300]$, 通过节点数选择的准则 (11) 得到 N_s . 根据方程 (9) 和 (10), 本文采用 B-spline 函数对上证综指收盘价序列的非平稳分量 g_t 进行估计, 得到 \hat{g}_t . 图 4(c) 绘制了上证综指收盘价日收益率序列非平稳分量估计量 \hat{g}_t 的图像. 通过方程 (8) 得到平稳分量 h_t , 并由 GARCH(1, 1) 模型拟合得到相对应的系数估计:

$$\hat{\omega} = 7.0352 \times 10^{-6}, \quad \hat{\alpha} = 0.1629, \quad \hat{\beta} = 0.6452.$$

根据参数估计结果生成的新收益率序列, 将其与原始上证综指日收益率序列进行比较, 见图 4(d), 其中实际收益率 (灰), 估计的收益率 (黄). 比较两组收益率序列的图像发现, 两组收益率序列的波动趋势保持一致, 日收益率序列的估计量较好地刻画了实际的波动趋势.

此外, 根据一位审稿人的建议, 我们将本文的方法与传统 GARCH(1, 1) 直接拟合的结果进行比较. 传统 GARCH(1, 1) 拟合原始上证综指日收益率序列的结果如图 4(d) 所示, 其中实际收益率 (灰), GARCH(1, 1) 估计的收益率 (蓝). 比较发现, GARCH(1, 1) 估计的收益率序列不能很好地刻画实际收益率序列的波动性和趋势, 原因是非平稳的因素没有考虑入内. 因此通过对本文所提方法与传统 GARCH(1, 1) 直接拟合效果的比较 (见图 4(d) 和 4(e)), 可以明显发现, 本文非平稳分量的引入具有必要性, 它在拟合实际上证综指日收益率序列方面有突出的优势.

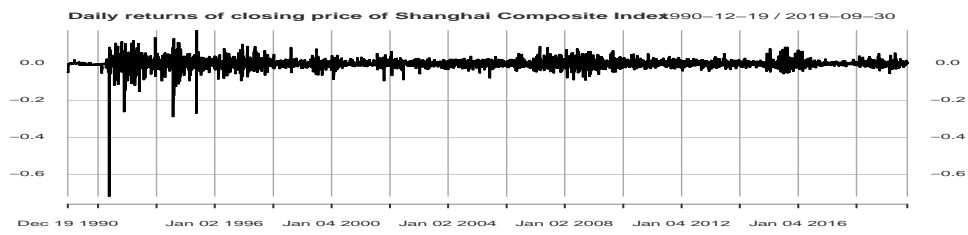
实例分析发现, 使用本文研究的改进的时变波动率模型进行估计后, 长资产收益率序列得到了良好的拟合, 其非平稳性和长记忆性都可以通过 B-spline 函数来描述. 这种非参数估计方法不仅简单有效, 而且还能减少误判. 在今后的研究中我们将尝试通过增加 GARCH 模型的参数或选用其他模型来提高拟合程度, 并尝试进行统计推断, 建立完善的理论体系, 具体的研究留待以后进行.

§6. 总 结

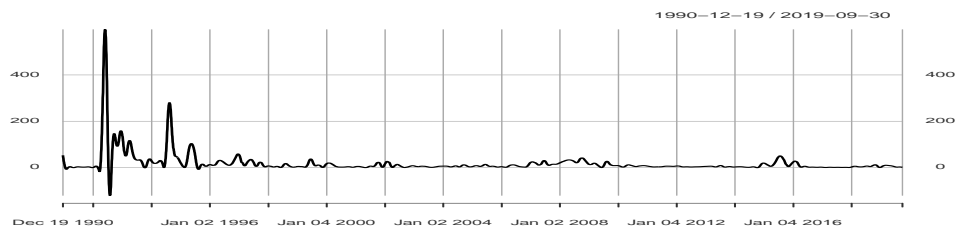
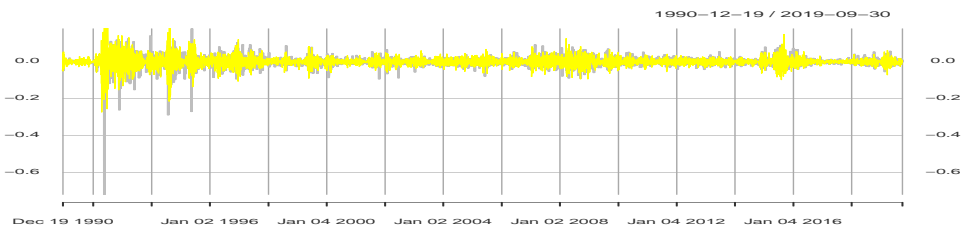
大量金融数据表明, 长资产收益率序列是非平稳的, 其波动率往往具有长记忆性. 这使



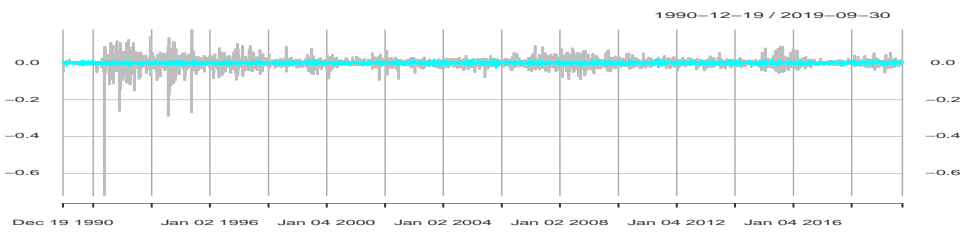
(a) 1990–2019 年上证综指收盘价



(b) 1990–2019 年上证综指收盘价日收益率序列

(c) 上证综指收盘价日收益率序列非平稳分量 g_t 的估计量 \hat{g}_t 

(d) 上证综指收盘价日收益率序列使用本文方法拟合, 原始序列 (灰), 拟合序列 (黄)



(e) 上证综指收盘价日收益率序列使用 GARCH(1,1) 模型拟合, 原始序列 (灰), 拟合序列 (蓝)

图 4 1990–2019 年上证综指收盘价数据集的分析

得单纯的 GARCH 模型无法充分拟合这种变化, 因此本文提出了改进的时变波动率模型. 本文将波动率的方差分解为条件方差与无条件方差的乘积, 并通过合理的模型转化, 使条件方差遵循 GARCH 过程, 无条件方差使用非参数方法 (B-spline 函数) 拟合. 这种改进提高了对波动率的拟合程度, 同时克服了 GARCH 模型缺乏长记忆性的缺点, 并为股票价格波动的预测提供了有效工具. 通过对实际金融数据的研究, 本文的观点是无条件方差变化幅度的增加与经济衰退有较强的相关性, 每当金融危机来临, 收益率序列相应地出现剧烈波动. 在今后的研究中, 我们将尝试通过增加 GARCH 模型的参数或选用其他模型来提高拟合程度, 并尝试进行统计推断, 建立完善的理论体系, 具体的研究将在后续工作中体现.

§7. 附 录

本节中, \mathcal{O}_p (或 p) 代表随机变量序列依概率具有某阶数. 此外, \mathcal{U}_p 代表随机函数序列在其定义域中依概率一致有界. 对任意向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, 定义范数 $\|\mathbf{a}\|_r = (|a_1|^r + |a_2|^r + \dots + |a_n|^r)^{1/r}$, $1 \leq r < +\infty$, $\|\mathbf{a}\|_\infty = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$. 定义矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{m, n}$ 的 L_r 范数为 $\|\mathbf{A}\|_r = \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{A}\mathbf{a}\|_r \|\mathbf{a}\|_r^{-1}$, $r < +\infty$, 同时 $\|\mathbf{A}\|_r = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, $r = \infty$.

本附录将给出 B-spline 函数估计量的一致收敛性.

1) B-spline 估计

根据方程 (10), $\hat{g}(x) = \hat{g}^*(x)/\hat{g}^*(1/n)$, 根据方程 (9), 不考虑模型识别条件时, 记

$$\hat{g}^*(x) \equiv \sum_{\ell=1}^{N_s+p} \hat{\beta}_{\ell,p} B_{\ell,p}(x),$$

其中 $\hat{\beta}_{\ell,p}$ 代表 B-spline 函数估计量的系数, 可由下式确定:

$$(\hat{\beta}_{1,p}, \hat{\beta}_{2,p}, \dots, \hat{\beta}_{N_s+p,p})^\top = \underset{(\beta_{1,p}, \beta_{2,p}, \dots, \beta_{N_s+p,p})^\top \in \mathbb{R}^{N_s+p}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n \left[Y_i^2 - \sum_{\ell=1}^{N_s+p} \beta_{\ell,p} B_{\ell,p}(i/n) \right]^2.$$

此时 B-spline 估计量 $\hat{g}^*(x)$ 可被写为 $\hat{g}^*(x) = \mathbf{B}(x)^\top (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^\top \mathbf{Y}^2$, 其中 \mathbf{M} 是 §3 部分定义的 B-spline 基函数矩阵:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} B_{1,p}(1/n) & B_{2,p}(1/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(1/n) \\ B_{1,p}(2/n) & B_{2,p}(2/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(2/n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,p}(n/n) & B_{2,p}(n/n) & \cdots & B_{N_s+p,p}(n/n) \end{bmatrix}.$$

由 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$, 令 $\mathbf{B}(x) = (B_{1,p}(x), B_{2,p}(x), \dots, B_{N_s+p,p}(x))^\top$, $\mathbf{Y}^2 = (Y_1^2, Y_2^2, \dots, Y_n^2)^\top$, 定义 $L^2[0, 1]$ 空间上函数的理论内积及理论范数如下:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx, \quad \|g\|_2^2 = \langle g, g \rangle, \quad (16)$$

对应的经验内积及经验范数如下:

$$\langle g_1, g_2 \rangle_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n g_1(j/n)g_2(j/n), \quad \|g\|_{2,n}^2 = \langle g, g \rangle_n. \quad (17)$$

由此可定义 B-spline 基函数 $\{B_{\ell,p}(x)\}_{\ell=1}^{N_s+p}$ 的理论内积和经验内积矩阵为:

$$\mathbf{V}_p = \{\langle B_{\ell,p}, B_{\ell',p} \rangle\}_{\ell, \ell'=1}^{N_s+p}, \quad \hat{\mathbf{V}}_{n,p} = \{\langle B_{\ell,p}, B_{\ell',p} \rangle_n\}_{\ell, \ell'=1}^{N_s+p}. \quad (18)$$

以下引理给出了经验内积与理论内积的一致等价性, 以及 B-spline 基函数的一致上界和下界.

引理 3 在假设条件 (A5) 下, 存在常数 $0 < c_p < C_p < +\infty$, 使得对充分大的 n , $\forall \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_s+p})^\top \in \mathbb{R}^{N_s+p}$,

$$c_p \|\boldsymbol{\lambda}\|_2 \leq N_s^{1/2} \left\| \sum_{\ell=1}^{N_s+p} \lambda_\ell B_{\ell,p}(\cdot) \right\|_2 \leq C_p \|\boldsymbol{\lambda}\|_2. \quad (19)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\max_{1 \leq \ell \leq N_s+p} \|B_{\ell,p}\|_2^2 = \mathcal{O}(N_s^{-1}), \quad \max_{1 \leq \ell \leq N_s+p} \|B_{\ell,p}\|_2^{-2} = \mathcal{O}(N_s), \quad (20)$$

$$A_{n,p} = \sup_{g_1, g_2 \in \mathcal{H}^{(p-2)}} \left| \frac{\langle g_1, g_2 \rangle_n - \langle g_1, g_2 \rangle}{\|g_1\|_2 \|g_2\|_2} \right| = \mathcal{O}(N_s n^{-1}) = (1), \quad (21)$$

$$\max_{1 \leq \ell \leq N_s+p} \|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 = \mathcal{O}(N_s^{-1}), \quad \max_{1 \leq \ell \leq N_s+p} \|B_{\ell,p}\|_{2,n}^{-2} = \mathcal{O}(N_s). \quad (22)$$

证明: 由 (16) 定义的理论内积,

$$\left\| \sum_{\ell=1}^{N_s+p} \lambda_\ell B_{\ell,p}(\cdot) \right\|_2^2 = \int_0^1 \left[\sum_{\ell=1}^{N_s+p} \lambda_\ell B_{\ell,p}(x) \right]^2 dx,$$

因此 (19) 可根据文献 [23] 的定理 5.4.2 推导, 而方程 (20) 是当 B-spline 的系数向量只有一个元素为 1, 其余元素为 0 时的一个特殊情况. 方程 (21) 的证明步骤类似于文献 [24] 的引理 2, 在此不再赘述.

注意到, 一方面

$$\|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 \leq \|B_{\ell,p}\|_2^2 + \frac{|\|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 - \|B_{\ell,p}\|_2^2|}{\|B_{\ell,p}\|_2^2} \times \|B_{\ell,p}\|_2^2 \leq \|B_{\ell,p}\|_2^2 \times (1 + A_{n,p}).$$

再根据 (21) 推出

$$\max_{1 \leq \ell \leq N_s + p} \|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 \leq \max_{1 \leq \ell \leq N_s + p} \|B_{\ell,p}\|_2^2 \times (1 + A_{n,p}) = \mathcal{O}(N_s^{-1}) \times (1 + A_{n,p}) = \mathcal{O}(N_s^{-1}).$$

另一方面,

$$\|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 \geq \|B_{\ell,p}\|_2^2 - \frac{|\|B_{\ell,p}\|_{2,n}^2 - \|B_{\ell,p}\|_2^2|}{\|B_{\ell,p}\|_2^2} \times \|B_{\ell,p}\|_2^2 \geq \|B_{\ell,p}\|_2^2 \times (1 - A_{n,p}).$$

因此, 由方程 (21) 可得

$$\max_{1 \leq \ell \leq N_s + p} \|B_{\ell,p}\|_{2,n}^{-2} \leq \max_{1 \leq \ell \leq N_s + p} \|B_{\ell,p}\|_2^{-2} \times (1 - A_{n,p})^{-1} = \mathcal{O}(N_s) \times (1 - A_{n,p})^{-1} = \mathcal{O}(N_s).$$

方程 (22) 得证. \square

以下引理给出了经验内积的无穷范数可被阶数 N_s 界定.

引理 4 在假设条件 (A5) 下, 存在一个常数 $C_p > 0$, 使得对充分大的 n ,

$$\|\hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1}\|_{\infty} \leq 2C_p N_s, \quad (23)$$

$$\sup_{x \in [0,1]} \sup_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_s+p}} \|\mathbf{a}\|_{\infty}^{-1} |\mathbf{B}(x)^{\top} \hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1} \mathbf{a}| \leq 2pC_p N_s. \quad (24)$$

证明: 根据 (22) 可知对某正常数 C_p , \mathbf{V}_p^{-1} 的无穷范数可被阶数 N_s 界定, 即 $\|\mathbf{V}_p^{-1}\|_{\infty} \leq C_p N_s$. 同时根据 B-spline 基函数的性质, 对于充分大的 n , (18) 中定义的 \mathbf{V}_p 及 $\hat{\mathbf{V}}_{n,p}$ 满足: $\|\mathbf{V}_p - \hat{\mathbf{V}}_{n,p}\|_{\infty} \leq C_p n^{-1}$, $\|\mathbf{V}_p^{-1}\|_{\infty} \leq C_p N_s$.

注意到 $\|\mathbf{V}_p^{-1}\|_{\infty} \leq C_p N_s$, 对于任意的 $(N_s + p)$ 维向量 \mathbf{a} , $\|\mathbf{V}_p^{-1} \mathbf{a}\|_{\infty} \leq C_p N_s \|\mathbf{a}\|_{\infty}$. 故而 $\|\mathbf{V}_p \mathbf{a}\|_{\infty} \geq C_p^{-1} N_s^{-1} \|\mathbf{a}\|_{\infty}$. 对充分大的 n 及任意向量 \mathbf{a} , 可有

$$\|\hat{\mathbf{V}}_{n,p} \mathbf{a}\|_{\infty} \geq \|\mathbf{V}_p \mathbf{a}\|_{\infty} - \|\mathbf{V}_p \mathbf{a} - \hat{\mathbf{V}}_{n,p} \mathbf{a}\|_{\infty} \geq 2^{-1} C_p^{-1} N_s^{-1} \|\mathbf{a}\|_{\infty}.$$

因此 $\|\hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1}\|_{\infty} \leq 2C_p N_s$.

注意到对任意 $x \in [0, 1]$, $\mathbf{B}(x)$ 中存在最多 p 个不为零的项, 而且每一个都在 $[0, 1]$ 取值, 所以

$$\|\mathbf{B}(x)^{\top} \hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1} \mathbf{a}\|_{\infty} \leq p \|\hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1} \mathbf{a}\|_{\infty} \leq p \|\hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1}\|_{\infty} \|\mathbf{a}\|_{\infty} \leq 2pC_p N_s \|\mathbf{a}\|_{\infty},$$

故而可证得:

$$\sup_{x \in [0,1]} \sup_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_s+p}} \|\mathbf{a}\|_{\infty}^{-1} |\mathbf{B}(x)^{\top} \hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-1} \mathbf{a}| \leq 2pC_p N_s.$$

引理得证. \square

2) 定理 2 的证明

引理 5 在假设条件 (A1)–(A3) 下, 令 $\sigma = h_0^2$, $\zeta = \zeta_1$, $E(\beta + \alpha\zeta^2)^q < 1$, $q \in [1, \infty)$, 则下列结论成立: 对某 $1 \leq m \leq [q]$, $E(\sigma^2)^m < \infty$. 同时对满足上述不等式的 m ,

$$E(\sigma^{2m}) = [1 - E(\beta + \alpha\zeta^2)^m]^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} E(\beta + \alpha\zeta^2)^k \alpha^{m-k} E(\sigma^{2k}) < \infty.$$

引理 5 是满足假设条件 (A1)–(A3) 时, GARCH(1, 1) 模型的基本性质, 证明从略. 根据引理 5, 当 $m = 1$ 时, 下列结论成立:

$$E(\zeta_t h_t^{1/2})^2 = E(\zeta_t^2) E(h_t) = (1 - \alpha - \beta)^{-1} \omega, \quad (25)$$

当 $m = 2$ 时, 根据 (25) 可有

$$\begin{aligned} E(\zeta_t h_t^{1/2})^4 &= E(\zeta_t^4) E(h_t^2) \\ &= 3[\omega^2 + 2E(\zeta_t h_t^{1/2})^2 \omega(\alpha + \beta)](1 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha^2)^{-1} \\ &= 3\omega^2[1 + 2(1 - \alpha - \beta)^{-1}(\alpha + \beta)](1 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha^2)^{-1} \\ &= 3\omega^2(1 + \alpha + \beta)[(1 - \alpha - \beta)(1 - \beta^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

引理 6 在假设条件 (A1)–(A5) 下, $\text{Var}(\hat{g}(x)) = \mathcal{O}_p(n^{-1}N_s)$.

证明: 注意到对任意 $x \in [0, 1]$, 由 $\hat{g}(x)$ 的定义, 存在 $0 \leq s_n \leq 1/n$ 使得

$$|g(1/n) - g(0)| = |g'(s_n)/n| = \mathcal{O}(n^{-1}). \quad (27)$$

因此考虑模型识别条件 (10) 时, 在证明中可使用 $g(0)$ 代替. 根据 (25), 一方面可得:

$$\begin{aligned} &\left\{ E\mathbf{B}^\top(x)(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \sum_{j=1}^n B_{\ell,p}\left(\frac{j}{n}\right) [Y_j/g^{1/2}(0)]^2 \right\}^2 \\ &= \left[\mathbf{B}^\top(x)(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \sum_{j=1}^n B_{\ell,p}\left(\frac{j}{n}\right) g^{-1}(0) EY_j^2 \right]^2 \\ &= C_{g,\omega,\alpha,\beta} n^{-2} \hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-2} n N_s^{-1} = C_{g,\omega,\alpha,\beta} n^{-1} N_s = \mathcal{O}_p(n^{-1}N_s), \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $C_{g,\omega,\alpha,\beta} = g^{-2}(0)(1 - \alpha - \beta)^{-2}\omega^2 g^2(j/n)$, 另一方面, 根据 (26), 容易发现

$$\begin{aligned} &E\left\{ \mathbf{B}^\top(x)(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-1} \sum_{j=1}^n B_{\ell,p}\left(\frac{j}{n}\right) [Y_j/g^{1/2}(0)]^2 \right\}^2 \\ &= [\mathbf{B}^2(x)]^\top (\mathbf{M}^\top \mathbf{M})^{-2} \sum_{j=1}^n B_{\ell,p}^2\left(\frac{j}{n}\right) g^{-2}(0) EY_j^4 \\ &= C'_{g,\omega,\alpha,\beta} n^{-2} \hat{\mathbf{V}}_{n,p}^{-2} n N_s^{-1} = \mathcal{O}_p(n^{-1}N_s), \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $C'_{g,\omega,\alpha,\beta} = 3[g^2(0)(1-\alpha-\beta)(1-\beta^2-2\alpha\beta-3\alpha^2)]^{-1}\omega g^2(j/n)(1+\alpha+\beta)$. 综合方程 (28)–(29),

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{g}(x)) &= \mathbb{E}\left\{B^\top(x)(M^\top M)^{-1}\sum_{j=1}^n B_{\ell,p}\left(\frac{j}{n}\right)[Y_j/g^{1/2}(0)]^2\right\}^2 \\ &\quad - \left\{\mathbb{E}B^\top(x)(M^\top M)^{-1}\sum_{j=1}^n B_{\ell,p}\left(\frac{j}{n}\right)[Y_j/g^{1/2}(0)]^2\right\}^2 \\ &= \mathcal{O}_p(n^{-1}N_s).\end{aligned}$$

因此 $\text{Var}(\hat{g}(x)) = \mathcal{O}_p(n^{-1}N_s)$. 引理得证. \square

引理 7 (文献 [25] 定理 5.1) 在假设条件 (A1)–(A5) 下, 由引理 3–4, 下列结论成立:

$$\|\hat{g} - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\hat{g}(x) - g(x)| = \mathcal{O}_p(N_s^{-p}). \quad (30)$$

定义 $a_n = \ln(n)^{1/2}(n^{-1}N_s)^{1/2}$ 以及 $b_n = a_n + N_s^{-p}$.

引理 8 在假设条件 (A1)–(A5) 下, 以下结论成立:

$$\|\hat{g} - \mathbb{E}\hat{g}\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\hat{g}(x) - \mathbb{E}\hat{g}(x)| = \mathcal{O}_p(a_n). \quad (31)$$

证明: 本文的假设 (A1)–(A5) 满足文献 [25] 的条件 7.1, 因此根据文献 [25] 的定理 7.1, 可有: $\mathcal{L}([\text{Var}(\hat{g}(x))]^{-1/2}[\hat{g}(x) - \mathbb{E}\hat{g}(x)]) \xrightarrow{d} N(0, 1)$, $n \rightarrow \infty$. 应用 Bernstein 不等式, 引理结论成立. \square

定理 2 的证明: 现在开始证明函数估计量的有效性. 首先 $\hat{g}(x)$ 的分解在证明中起着关键作用:

$$\hat{g}(x) = \mathbb{E}\hat{g}(x) + [\hat{g}(x) - \mathbb{E}\hat{g}(x)]. \quad (32)$$

根据方程 (30)–(31), 以下结论成立:

$$\|\hat{g} - g\|_\infty = \|(\mathbb{E}\hat{g} - g) + (\hat{g} - \mathbb{E}\hat{g})\|_\infty \leq \|\mathbb{E}\hat{g} - g\|_\infty + \|\hat{g} - \mathbb{E}\hat{g}\|_\infty = \mathcal{O}_p(b_n).$$

又因为假设 (A5) 中 $N_s \sim n^{1/(2p+1)}$, 由此推出

$$b_n = [\ln n / (nN_s^{-1})]^{1/2} + N_s^{-p} = [\ln n / (nN_s^{-1})]^{1/2}.$$

所以, $\|\hat{g} - g\|_\infty = \mathcal{O}_p(n^{-1/2}N_s^{1/2} \ln^{1/2} n)$. \square

参 考 文 献

- [1] ENGLE R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation [J]. *Econometrica*, 1982, **50**(4): 987–1008.
- [2] BOLLERSLEV T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *J Econometrics*, 1986, **31**(3): 307–327.
- [3] 郑振龙, 黄薏舟. 波动率预测: GARCH 模型与隐含波动率 [J]. 数量经济技术经济研究, 2010, **27**(1): 140–150.
- [4] BAILLIE R T, BOLLERSLEV T, MIKKELSEN H O. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *J Econometrics*, 1996, **74**(1): 3–30.
- [5] BAILLIE R T, MORANA C. Modelling long memory and structural breaks in conditional variances: an adaptive FIGARCH approach [J]. *J Econom Dynam Control*, 2009, **33**(8): 1577–1592.
- [6] GALLANT A R. The Fourier flexible form [J]. *Am J Agr Econ*, 1984, **66**(2): 204–208.
- [7] VAN BELLEGEM S, VON SACHS R. Forecasting economic time series with unconditional time-varying variance [J]. *Int J Forecasting*, 2004, **20**(4): 611–627.
- [8] FENG Y H. Simultaneously modeling conditional heteroskedasticity and scale change [J]. *Econometric Theory*, 2004, **20**(3): 563–596.
- [9] STĂRICA C, GRANGER C. Nonstationarities in stock returns [J]. *Rev Econom Statist*, 2005, **87**(3): 503–522.
- [10] ENGLE R F, RANGEL J G. The spline-GARCH model for low-frequency volatility and its global macroecon [J]. *Rev Financ Stud*, 2008, **21**(3): 1187–1222.
- [11] AMADO C, TERÄSVIRTA T. Modelling volatility by variance decomposition [J]. *J Econometrics*, 2013, **175**(2): 142–153.
- [12] GLOSTEN L R, JAGANNATHAN R, RUNKLE D E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks [J]. *J Finance*, 1993, **48**(5): 1779–1801.
- [13] AMADO C, TERÄSVIRTA T. Modelling changes in the unconditional variance of long stock return series [J]. *J Empir Financ*, 2014, **25**: 15–35.
- [14] 赵华, 蔡建文. 基于 MRS-GARCH 模型的中国股市波动率估计与预测 [J]. 数理统计与管理, 2011, **30**(5): 912–921.
- [15] 王娟, 李锐. 中国股市的时变波动性——基于长记忆性、杠杆效应视角 [J]. 北京航空航天大学学报 (社会科学版), 2019, **32**(3): 57–65.
- [16] FRANCES P H, VAN DIJK D. Outlier detection in the GARCH(1, 1) model [OL]. Econometric Institute Research Papers EI 9926-/A, 1999 [1999-07-05]. <https://repub.eur.nl/pub/1597>.
- [17] 邹建军, 张宗益, 秦拯. GARCH 模型在计算我国股市风险价值中的应用研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2003, (5): 20–25.
- [18] HANSEN P R, LUNDE A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1, 1)? [J]. *J Appl Econometrics*, 2005, **20**(7): 873–889.
- [19] DE BOOR C. On calculating with B-splines [J]. *J Approx Theory*, 1972, **6**(1): 50–62.
- [20] COX M G. The numerical evaluation of B-Splines [J]. *IMA J Appl Math*, 1972, **10**(2): 134–149.
- [21] BÉZIER P E. Example of an existing system in the motor industry: the Unisurf system [J]. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1971, **321**(1545): 207–218.
- [22] DE BOOR C. *A Practical Guide to Splines* [M]. New York: Springer, 2001.

- [23] DEVORE R A, LORENTZ G G. *Constructive Approximation* [M]. Berlin: Springer, 1993.
- [24] WANG J. Modelling time trend via spline confidence band [J]. *Ann Inst Statist Math*, 2012, **64**(2): 275–301.
- [25] HUANG J Z. Local asymptotics for polynomial spline regression [J]. *Ann Statist*, 2003, **31**(5): 1600–1635.

The Estimation of Time Varying Volatility Based on the Long Stock Return Series with Its Application

WANG Jiangyan LIN Jinguan CHEN Xulan

(School of Statistics and Data Science, Nanjing Audit University, Nanjing, 211815, China)

Abstract: The price fluctuations in the stock market and the changes in the rate of return brought by it have attracted the attention of experts. In this context, this paper focuses on the changes in the volatility of long-term asset return series, and being used in analysis of the Shanghai Composite Index. Since the most commonly used GARCH model is available when the observation period is short, and the volatility for long-term asset return series tends to have long memory, this paper proposes an improved time varying GARCH model. In order to fit the change of volatility well, we decompose the variance of volatility into a conditional part and an unconditional part. Through reasonable model transformation, the conditional variance follows the GARCH process, while the unconditional variance, which is changing smoothly over time, is estimated by the nonparametric method (B-spline estimation). The simulation research shows that the model proposed in this paper can better capture the change of volatility in a long run. In order to verify the proposed estimation method, the daily return series of the Shanghai Composite Index are taken for the empirical analysis. In the end, we found that: (i) The nonparametric estimation method proposed in this paper performs well. (ii) The variation of the unconditional variance has a strong correlation with the economic recession; (iii) An apparent variation in the time-varying GARCH model can be explained by the variation of the non-stationary component.

Keywords: long financial time series; nonparametric estimation; GARCH model; B-spline estimation; multiplication decomposition

2020 Mathematics Subject Classification: 62J20; 62F03