

基于 DEJD 模型的人口寿命预测及 SM 债券定价*

卞华斌^{1,2} 童馨乐² 姚定俊^{2*}

(¹复旦大学经济学院, 上海, 200433; ²南京财经大学金融学院, 南京, 210023)

摘要: 人口老龄化背景下的长寿风险, 将会给国家养老保障体系带来极大的经济负担. 如何度量和管理长寿风险, 已成为近年来世界各国关注和研究的焦点. 本文基于我国人口死亡率数据, 在 Lee-Carter 模型的基础上, 引入 DEJD 模型刻画时间序列因子的跳跃不对称性, 并证实了 DEJD 模型比 Lee-Carter 模型在拟合时间序列因子时更为有效. 此外, 本文利用 DEJD 模型预测出我国人口死亡率数据, 进而给出了 SM 债券在我国的市场价格, 为 SM 债券在我国的推广提供了重要参考.

关键词: 长寿风险; Lee-Carter 模型; DEJD 模型; SM 债券

中图分类号: O212.1

英文引用格式: BIAN H B, TONG X L, YAO D J. Population life prediction and SM bonds pricing based on DEJD model[J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2022, 38(1): 24-42. (in Chinese)

§1. 引言

近十几年来, 全球人口平均寿命明显增长, 死亡率和生育率均呈现出下降趋势, 这意味着人口结构的老龄化, 与此相伴随的是全社会养老经济压力的增加等一系列社会问题, 诱发这些问题的风险, 通常被称之为长寿风险. 长寿风险的发生会扩大社会保障基金收支缺口、增加保险公司养老产品给付压力、提高企业和公司的养老金支付、降低个人退休生活水平和社会福利等. 如何度量和管理长寿风险已经成为世界各国研究和关注的重点, 传统的长寿风险管理方法主要包括再保险、死亡率风险产品的对冲、国家财政兜底等, 由于这些方法存在一定的限制和约束条件, 并不能合理有效的分散长寿风险. 因此, 部分学者开始着手长寿风险证券化的研究, 希望通过资本市场来化解长寿风险, 其中关于长寿债券的研究受到较多关注.

长寿债券是指本金返还或息票派发与某一人群生存率挂钩的债券. Blake 和 Burrows^[1]首次提出了利用资本市场发行长寿债券来对冲长寿风险. Lin 和 Samuel^[2]、Blake 等^[3]、Jong 和 Ferris^[4]设计出各种不同的长寿债券, 丰富了长寿债券的品种. 除了长寿债券的设计, 大部分关于长寿债券的文献主要是有关长寿债券定价, 长寿债券的定价方法主要有 Wang 转换定价法、风险中性定价法等. Wang^[5,6]在概率分布转换的基础上提出了新的一

*国家自然科学基金项目 (批准号: 71671082) 和江苏省研究生培养创新工程研究生科研与实践创新项目 (批准号: SJCX19_0426) 资助.

*通讯作者, E-mail: yaodj@nufe.edu.cn.

本文 2020 年 4 月 14 日收到, 2020 年 8 月 31 日收到修改稿.

类概率分布转换模型,亦称Wang转换,在金融保险产品定价中有广泛运用.樊毅等^[7]运用带永久跳跃的APC模型和双因子Wang转换模型对长寿风险之前进行定价.风险中性定价方法由Cox和Ross^[8]首次提出,假定在不完全资本市场中不存在套利的机会,那么必然存在一种风险中性测度方法使得证券合理定价.Cairns等^[9]使用风险中性定价法对EIB/BNP发行的长寿债券进行定价.宋平凡等^[10]于风险中性测度理论,使用相对熵方法定价经典EIB/BNP长寿债券.

长寿债券的准确定价离不开对死亡率的有效预测.目前运用最广泛的死亡率模型是Lee-Carter模型^[11].基于此发展的死亡率模型主要有RH模型^[12]、APC模型^[13]等.我国学者主要在这几个模型的基础上寻找不同的方法估计模型参数^[14],并匹配最适合我国国情的死亡率模型^[15,16].此外,少部分学者发现死亡强度存在跳跃性,提出运用跳跃模型刻画死亡强度.Chen和Cox^[17]引入一个复合泊松分布和正态跳跃扩散模型,刻画死亡跳跃.Deng等^[18]在研究美国人口死亡率时发现,死亡强度因子的跳跃性,使用跳跃扩散模型进行重新刻画,发现拟合效果更好.田玲等^[19]认为运用带永久跳跃的死亡率模型更适合长寿风险的刻画.

综合这些文献,我们可以发现,国外学者在研究长寿债券的设计和定价方面起步均较早,设计出的长寿债券品种较为丰富,对定价模型的研究较为深入,运用的定价方法不仅局限于保险产品的定价方法,还广泛涉及金融衍生产品的定价方法.相比而言,国内学者对长寿债券的研究起步较晚,主要是借鉴国外已设计的产品,运用我国人口死亡率定价出产品的中国价格.实践中,国内资本市场起步较晚,较国外资本市场不够成熟,缺乏实践经验,对长寿债券的研究主要停留在理论阶段.因此,在我国人口老龄化背景下,一方面既需要学习国外的研究成果和实践经验,另一方面需要针对我国国情的情况下,提出具有实践性和现实意义的结论和建议.

本文主要贡献在于:第一,本文根据我国人口死亡率特点对死亡率预测模型作了改进,在Lee-Carter模型的基础上引入DEJD模型,有效地刻画了时间序列因子的跳跃不对称性,使得改进后的模型更加精确、切合实际.第二,本文定价一款新型长寿债券——SM债券.在长寿风险管理工具中,国内外学者研究较多的主要是长寿债券,但是传统的长寿债券在实践中并未得到较好的效果,如EIB/BNP债券发行失败的案例.本文借鉴Jong和Ferris^[4]对长寿债券的研究,引入SM债券,并使用本文测算出的人口死亡率数据对SM债券进行定价,为SM债券在中国的推广做了铺垫.本文剩余部分内容如下:第二部分,介绍SM债券的设计原理和定价机制;第三部分,主要包括数据来源、模型选取和参数估计;第四部分,进行实证分析,预测我国人口死亡率,并定价SM债券;第五部分,本文的结论和建议.

§2. SM债券设计原理和定价机制研究

目前,已有文献所设计出的传统长寿债券并不能比资本市场上的其他债券或金融产品

更加吸引人,得不到市场和投资者的认可,在实践中的运用存在一定的困难和阻扰.因此,本文将引入 Jong 和 Ferris^[4] 设计的新型长寿债券——SM 债券,并运用本文预测的我国人口死亡率数据对 SM 债券进行定价,以便实现 SM 债券在我国的推广,丰富我国长寿风险管理工具.下文将介绍 SM 债券的设计原理和定价机制.

1) 设计原理

SM 债券,亦称“生存死亡债券”,属于可拆分债券,可将其分为 S (Survivorship) 和 M (Mortality) 两部分.其中, S 债券代表着生存部分,与生存人数相关,其必须由初始购买者保留,如果 S 债券的持有人到期存活,将获得 S 债券的面值,否则该持有人将无法获得 S 债券的面值,并且该债券的面值将被分配到“死亡池”(M 债券的资金积累池)中. M 债券代表着死亡部分,与死亡人数相关,其可被从 SM 债券中剥离出售, M 债券持有人每年会获得固定的利息收入,到期 M 债券持有人将会按比例获得“死亡池”中所积累的资金.如果 SM 债券挂钩的标的人群死亡人数越多, M 债券的持有人到期可以获得更多的资金;反之, M 债券持有人到期获得的资金较少.

通常, SM 债券由政府作为担保人和管理人,具有最高的信用级别.每年面向 30–59 岁的人发行与特定年龄有关的债券,即债券发行时,面向 x 岁的人发行的 SM 债券仅能由 x 岁的人购买,而其他年龄的人无法购买该债券.另外,每种债券的初始购买者也是该种债券的发起人,这就意味着每个年龄段的长寿风险仅与该年龄段的人挂钩而不会受其他年龄段的死亡率的影响,不同的 M 债券到期获得的资金只与相对应的年龄段人口死亡率相关.因此,下文将首先对 M 债券的定价机制进行探讨,然后再对 S 债券的定价机制进行分析.

2) 定价机制

基本假定: l_x 表示 x 岁的生存人数,可以为当前已知数据; l_{x+t} 表示 l_x 个 x 岁的人在 t 年后的实际生存人数, \hat{l}_x 表示 l_x 的预测值; C 表示债券每年固定给付的利息现金流; r 表示无风险连续复利率; $\bar{a}_{\overline{n}|}$ 表示 n 年期,每期期末给付 1 元,以 r 为贴现利率的年金现值,即 $\bar{a}_{\overline{n}|} = (1 - e^{-rn})/(e^r - 1)$.

M 债券的定价机制

首先, M 债券代表的是“死亡”部分,与对应人群的死亡率挂钩. M 债券的持有人每年将获得一份固定利息收入 C ,这跟普通债券是一致的.其特殊之处在于,如果持有到期,那么持有人将会按一定比例获得“死亡池”中的资金.假设每个发行人或对应 x 岁的人都买了一份 SM 债券,债券面值为 1 元,发行年度 x 岁的生存人数为 l_x ,该人群在 t 年后的生存人数为 l_{x+t} ,那么 T 年期每份 M 债券的到期终值为该特定年龄段的人口死亡率,即

$$\frac{l_x - l_{x+T}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+T}}{l_x}. \quad (1)$$

如果 x 岁人群购买了 n 份对应年龄的 SM 债券, 那么此时 l_x 表示当前已发行的与 x 年龄有关的 SM 债券份数, l_{x+t} 就表示 t 年后剩余 S 债券的份数.

由于政府会定期公布与 SM 挂钩的各年龄段人口死亡率数据, 那么 M 债券的市场价格每天都会产生波动, 并且会在政府公布相关死亡率数据后回归其内涵价值. 在 $t = 0$ 时刻, T 年期与 x 岁人挂钩的 M 债券的定价为

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{t=1}^T C \cdot e^{-rt} + e^{-rT} \cdot \left(1 - \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_x}\right) \\ &= C \cdot \bar{a}_{T|} + e^{-rT} \cdot \left(1 - \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_x}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

在 SM 债券发行的 n 年末, 政府公布出与该项债券相关的生存人数数据, 那么在 $t = n$ 时刻, T 年期与 x 岁人挂钩的 M 债券的定价为

$$\begin{aligned} M_{x+n} &= \sum_{t=n}^T C \cdot e^{-rt} + e^{-rT} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_{x+n}}\right) \\ &= C \cdot \bar{a}_{T|} + e^{-rT} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_{x+n}}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

S 债券的定价机制

如果 SM 债券不拆分, 那么长寿风险只在初始购买者中分散, 到期政府给付的总金额是不变的, 并不会因为对应人口死亡率的变化而变化, 所以对于政府来说这是无风险的, 与普通的国债是一样的, 定期给付利息, 期末返还本金. 因此, SM 债券的总价格公式与普通国债一致, 即

$$SM = C \cdot \bar{a}_{T|} + 1 \cdot e^{-rT}. \quad (4)$$

另外, SM 债券的价格是由 S 债券和 M 债券的价格加总所得, 从而 S 债券的价格等于 SM 债券的价格减去 M 债券的价格, 即

$$S_x = e^{-rT} \cdot 1 - e^{-rT} \cdot \left(1 - \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_x}\right) = e^{-rT} \cdot \frac{\hat{l}_{x+T}}{l_x}. \quad (5)$$

§3. 样本选择与模型

1) 样本选取与数据来源

本文选取 1997 年至 2017 年共计 21 年的人口死亡率数据, 将全部人口按年龄分成 19 个小组来观察各组死亡率: 0-4 岁标记为第 1 组, 5-9 岁标记为第 2 组, 以此类推, 90+ 标记为第 19 组且是最后一组. 数据来源: 1998-2005 年《中国人口统计年鉴》, 2006-2018 年《中国人口和就业统计年鉴》. 其中, 2010 年度人口死亡率缺失, 近似取 2009 年和 2011 年度人口死亡率的平均值.

表 1 中国人口分年龄组别死亡率描述性统计 (%)

年龄组	最大值	最小值	均值	方差	偏度	峰度
0-4	8.6300	0.6500	3.1642	5.8871	0.9143	2.6971
5-9	0.7200	0.1800	0.3929	0.0233	0.4680	2.4534
10-14	0.6400	0.1500	0.3380	0.0156	0.4398	2.8320
15-19	1.1200	0.2000	0.5265	0.0505	0.8243	3.3635
20-24	1.3400	0.3100	0.7497	0.1050	0.2077	1.7637
25-29	1.4000	0.2800	0.8335	0.1195	-0.0005	1.9204
30-34	1.6800	0.4900	1.0819	0.1208	-0.2633	2.0228
35-39	2.0500	0.8500	1.3753	0.0997	0.0807	2.4763
40-44	2.5300	1.2900	1.9491	0.1601	-0.2723	1.8829
45-49	3.8000	1.9800	2.8795	0.3141	0.1836	1.9983
50-54	5.6400	2.8900	4.3988	0.5600	-0.3777	2.3941
55-59	9.3600	4.8500	6.9439	1.9232	0.2564	1.7644
60-64	17.6600	7.5200	11.6137	8.7430	0.4806	2.0247
65-69	26.4500	11.6000	19.1535	18.8283	0.1104	2.0782
70-74	43.1300	21.2000	32.1323	49.0639	0.1929	1.7832
75-79	67.3700	34.5600	52.1489	95.3981	-0.0710	2.0727
80-84	112.3100	60.7200	84.3825	284.3642	0.3561	1.8563
85-89	160.3000	92.7918	124.9730	503.2984	-0.1527	1.5660
90+	289.9500	139.5200	200.8748	1 773.8945	0.4315	2.3378

表 1 为我国人口死亡率数据的描述性统计. 从表 1 可以发现, 在观察时间段内, 自 10-14 岁组开始人口死亡率均值具有逐步上升的趋势, 说明从 10 岁开始我国人口死亡率开始逐步上升. 从方差的角度来看, 整体人口死亡率的方差呈现出逐步扩大的趋势, 尤其是 60 岁以上人口死亡率的方差较大, 说明在观测时间段内我国老年人口死亡率波动较大, 且与年龄呈正相关. 从偏度来看, 60 岁以上老龄人口中, 75-79 岁和 85-89 岁这两个年龄组存在一定的左偏现象, 说明这个区间人口死亡率值偏低, 存在下降趋势. 从峰度来看, 60 岁以上人口的观测区间的峰度值均小于 3, 说明人口死亡率存在低峰轻尾的情况, 分布不均匀.

图 1 展示了 1997 年至 2017 年我国各年龄人口死亡率变化情况, 从中可以看出, 近年来, 由于医疗卫生条件的改善和医疗水平的提高, 我国整体人口死亡率呈现出下降趋势, 死亡率得到改善. 其中, 65 岁以上老龄人口死亡率呈现出明显的下降趋势, 降幅远超 0-65 岁人口死亡率, 说明我国老龄人口死亡率改善超过预期. 这在一定程度上, 会增加社会养老金支付压力.

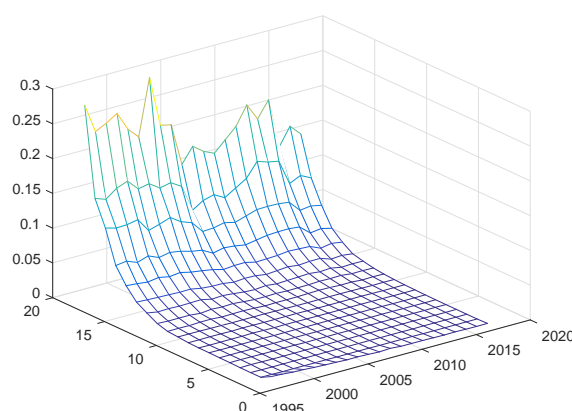


图 1 中国人口死亡率三维图 (按年龄分组)

2) Lee-Carter 模型

在 Lee-Carter 模型提出之前, 学术界对死亡率的研究主要是使用静态死亡率模型, 但是随着时间的变化和社会的发展, 人口死亡率特征出现了不同的变化趋势, 静态模型不再能够较好的拟合死亡率变化规律. 为此, Lee 和 Carter^[11] 首次将时间因子和年龄因子加入到死亡率模型中, 从而将静态模型调整为动态模型, 经实证检验 Lee-Carter 模型的拟合效果较静态模型更好, 本文将以 Lee-Carter 模型为基础进行死亡率预测研究.

Lee-Carter 模型介绍

在 Lee-Carter 模型中, 中心死亡率被对数化, 且模型包含了多个未知参数, 具体的模型如下:

$$\ln(\mu_{x,t}) = a_x + b_x k_t + e_{x,t}, \quad (6)$$

其中, $\mu_{x,t}$ 代表在 t 时刻年龄为 x 岁人的中心死亡率; a_x 代表此方程的截距项, 是在整个观测时间段内 x 岁人中心死亡率对数的平均值; b_x 代表 x 岁年龄组对时间序列因子 k_t 的敏感系数; k_t 代表 t 时刻整体死亡率水平, 被称为时间序列因子; $e_{x,t}$ 代表残差项, 包含模型中未反映出的剩余年龄组效应, 且其均值为 0, 方差为 σ^2 .

经典 Lee-Carter 模型包含三个未知参数, 分别是 a_x 、 b_x 和 k_t , 一般模型估计方法无法解得这些参数. 通常估计 Lee-Carter 模型参数的方法有矩阵奇异值分解法 (SVD 法) 和最小二乘估计法 (OLS 法). 根据文献 [14], SVD 法使用纯数学的方法对 b_x 和 k_t 同时进行近似估计, 会使得模型误差结果扩大, 但 OLS 法是分两步对 b_x 和 k_t 进行估计, 得到的结果更为精确. 因此, 本文使用 OLS 法估计相关参数.

通常, Lee-Carter 模型包含的标准化假设为

$$\sum_{x=1}^{\omega} b_x = 1, \quad \sum_{t=1}^T k_t = 0.$$

第一步, 根据正态化假设, 可以得到 a_x 的估计值:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln(\mu_{x,t}).$$

第二步, 将 \hat{a}_x 代入式 (6) 并两边同时对年龄 x 进行求和并移项化简, 求得 k_t 的估计值:

$$\hat{k}_t = \sum_x [\ln(\mu_{x,t}) - \hat{a}_x].$$

然后, 建立回归函数:

$$\ln(\mu_{x,t}) - \hat{a}_x = b_x \hat{k}_t + e_{x,t}.$$

对回归函数使用最小二乘法估计参数 b_x , 得到其估计值:

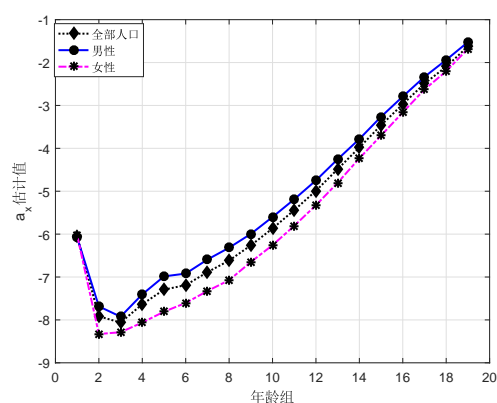
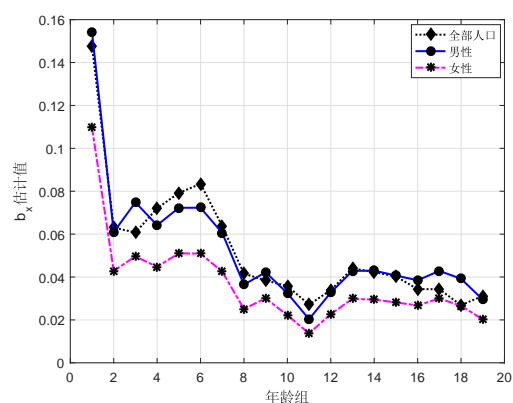
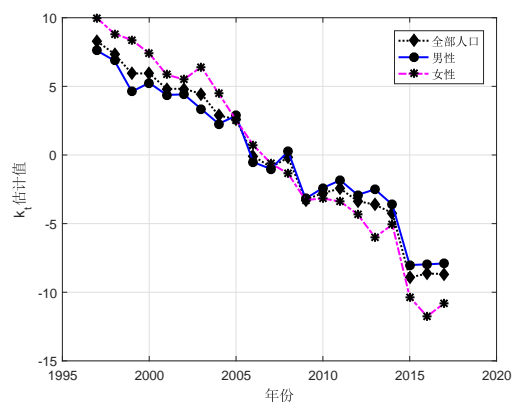
$$\hat{b}_x = \sum_{t=1}^T \hat{k}_t [\ln(\mu_{x,t}) - \hat{a}_x] / \sum_{t=1}^T \hat{k}_t^2.$$

Lee-Carter 模型参数估计

本文考虑到性别、年龄等方面的因素, 由于不同性别、不同年龄段的人口死亡率均有所差异, 因此本文将按年龄、性别分组, 使用软件 MATLAB2016a 对 Lee-Carter 模型参数进行估计.

根据图 2 可知, 除 0-4 岁年龄组外, 不论是整体还是按性别分组的 Lee-Carter 模型的估计参数 a_x 的值均随着年龄的增加而递增, 并且在同一个年龄组中女性组的 a_x 值均小于男性组的 a_x 值, 由于 a_x 值代表的是观测时间段内 x 岁年龄组人口死亡率对数的平均值, 说明一方面随着年龄的增加, 死亡率逐渐上升; 另一方面, 在同一年龄组中, 女性平均死亡率是小于男性平均死亡率, 即女性寿命比男性寿命更长久. 另外, 0-4 岁年龄组的对数死亡率平均值较大, 说明 4 岁以下婴幼儿和新生儿的生命较为脆弱, 需要重视医疗条件、环境等方面的因素, 保护新生儿和婴幼儿的生命健康. 从图 3 可以看出, 整体和按性别分组的 Lee-Carter 模型的估计参数 b_x 值呈现出先下降后上升然后震荡的趋势, 由于 b_x 代表的年龄因子对时间序列因子的敏感程度, 说明不同年龄段对死亡率的敏感程度是不同, 其中 0-4 年龄组 b_x 值是最大的, 说明 4 岁以下婴幼儿和新生儿对死亡率的变化趋势极为敏感. 同时按性别分组来看, 每个年龄组中男性对死亡率变化趋势的敏感度均大于女性, 说明男性的死亡率变动比女性更大, 存在较大的死亡风险.

从图 4 中可以看到, 不论是整体还是按性别分组的 k_t 估计值均随着年份的增长而呈现出下降的趋势, 但是在下降的过程中均呈现出一定跳跃性, 并且存在正负向跳跃的不对称性. 由于所有的 b_x 均为正数值, 那么 k_t 的值突然变大会使得对数死亡率数值上升, 即死亡率上升, 出现正向跳跃, 如果 k_t 值突然变小, 意味着死亡率的下降, 即出现负向跳跃. 此外, 从图 4 可知, k_t 的跳跃呈现出 irregularity, 具有随机性, 并且按性别分组得到的 k_t 值, 其跳跃性也不同, 比如 2003 年女性组的 k_t 值出现正向跳跃, 但是此时男性组的 k_t 值仍旧处于下

图 2 分性别、年龄组 a_x 估计值图 3 分性别、年龄组 b_x 估计值图 4 分性别、年龄组 k_t 估计值

降趋势中. 因此, 针对不同性别分组的 k_t 值的跳跃性也要分开讨论, 同时需要探讨 Δk_t 的变化趋势来深入分析 k_t 值的跳跃性.

表 2 Δk_t 的十分位数

分位数	整体	男性	女性
10%	-2.8723	-3.4161	-1.9373
20%	-1.4992	-1.6840	-1.8820
30%	-1.0268	-1.0713	-1.6172
40%	-0.8619	-0.9760	-1.3575
50%	-0.4925	-0.6080	-1.0527
60%	-0.2697	0.0447	-0.8443
70%	-0.0073	0.2336	-0.4010
80%	0.1475	0.5762	-0.0543
90%	0.4082	0.7110	0.9251

根据表 2, 我们可知 Δk_t 的十分位数分布情况, 其中整体组的第一个十分位数和最后一个十分位数分别为 -2.8723 和 0.4082, 说明整体组 Δk_t 值小于 -2.8723 的概率为 10%, 大于 0.4082 的概率也是 10%, 即整体组 Δk_t 的取值主要落在区间 $[-2.8723, 0.4082]$ 内, 部分异常值或跳跃点位于该区间外. 同样的, 男性组 Δk_t 的主要取值范围是 $[-3.4161, 0.7110]$, 女性组 Δk_t 的主要取值范围是 $[-1.9373, 0.9251]$. 显然, 这三个组的共同主要取值范围是 $[-1.9373, 0.4082]$. 那么, 可将该区间外的点定义为跳跃点.

定义 1 如果 $k_t - k_{t-1} < -1.9373$, 那么就定义 k_t 为负向跳跃点; 如果 $k_t - k_{t-1} > 0.4082$, 那么就定义 k_t 为正向跳跃点.

假定 1997 年为基数年, 则 1997 年的 k_t 数值为 k_0 . 根据定义, 从表 2 中得到的 Δk_t 值可知, 整体人群 Δk_t 有 2 个正向跳跃点: k_{11} 、 k_{13} , 3 个负向跳跃点: k_9 、 k_{12} 、 k_{18} ; 男性人群 Δk_t 有 5 个正向跳跃点: k_3 、 k_8 、 k_{11} 、 k_{13} 、 k_{14} , 4 个负向跳跃点为 k_2 、 k_9 、 k_{12} 、 k_{18} ; 女性人群 Δk_t 有 3 个正向跳跃点为 k_6 、 k_{17} 、 k_{20} , 2 个负向跳跃点为 k_7 、 k_{18} . 显然, 不论是整体人群还是按性别分组人群的 Δk_t 值均存在正负向跳跃的不对称性.

表 3 Δk_t 的描述性统计

Δk_t	最大值	最小值	均值	标准差	偏度	峰度
整体	0.6938	-4.6886	-0.8471	1.3358	-1.4259	4.6620
男性	1.2823	-4.4014	-0.7750	1.5478	-0.9369	3.0216
女性	0.9696	-5.2802	-1.0376	1.3876	-1.0846	5.6050

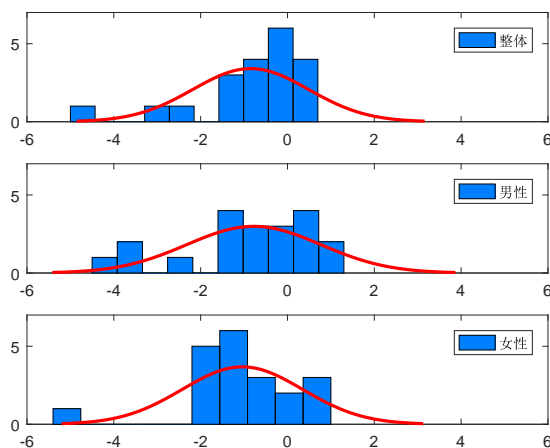


图 5 分性别和年龄组 Δk_t 估计值直方图

根据表 3 可知, 整体人群的 Δk_t 值均值为 -0.8471, 方差为 1.7842, 偏度为 -1.4259; 男性组的 Δk_t 值均值为 -0.7750, 方差为 2.3955, 偏度为 -0.9369; 女性组的 Δk_t 值均值为 -1.0376, 方差为 1.9254, 偏度为 -1.0846. 以上数据说明, 所有组的 Δk_t 值均呈现出左偏, 从

性别分组情况来看, 女性组的 Δk_t 值波动较小但左偏程度更大. 从图 5 中可观察到, 所有组的 Δk_t 值均呈现出厚尾的特征, 且左右分布不均匀, 从而说明 Δk_t 存在正负向跳跃的不对称性, 且负向跳跃的频率高于正向跳跃的频率. Δk_t 出现负向跳跃, 意味着死亡率的下降和寿命的延长, 主要可能是由于医疗卫生条件的改善, 科学技术水平的提高等原因引起的; 而 Δk_t 出现正向跳跃, 意味着死亡率的上升和寿命的缩短, 可能是由于类似禽流感、瘟疫等疾病造成的, 又或者是地震、海啸等自然灾害引起的.

3) 基于 DEJD 模型对参数的 k_t 重新估计

基于上述分析, 由于死亡强度时间序列因子 k_t 存在正负向跳跃的不对称性, 经典 Lee-Carter 模型预测出的人口死亡率可能不够准确, 因此需要引入 DEJD 模型对时间序列因子进行重新刻画, 以提高死亡率预测模型的拟合效果.

DEJD 模型介绍

Kou^[20] 首次提出简单的跳跃扩散模型, 该模型包含两个部分: 一个连续的并且服从几何布朗运动, 另一个是跳跃的且服从双指数分布. Kou 和 Wang^[21] 在此基础上进行深入研究, 并首次将 DEJD 模型 (双指数跳跃扩散模型) 运用到期权定价中. 具体模型如下:

$$dk_t = \alpha dt + \sigma dW_t + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right]. \quad (7)$$

其中, dk_t 表示对死亡强度时间序列因子的微分, 式中所有的 d 均表示微分; W_t 代表维纳过程, 即标准布朗运动; $N(t)$ 表示参数为 λ 的带跳泊松过程, λ 是期望跳跃频率, λ 越大说明死亡强度时间序列因子发生跳跃的次数越多; α 代表瞬时期望漂移率; σ 代表波动率, 也是瞬时标准差; V_i 是一系列随机变量, 服从独立同分布 (i.i.d.). 另外, 式 (7) 等号右边第一项代表了漂移项; 等号右边第二项刻画了部分波动的特性, dW_t 为白噪声, 且被放大了 σ 倍; 等号右边第三项也刻画了部分波动的特性, 每当带跳泊松过程 N 事件发生在 t 时刻, k_t 就会发生跳跃, 该跳跃将被双指数跳跃过程刻画, 且 $d\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1)\right]$ 表示 $N(t)$ 过程在单位间隔内的增量. 假定 $Y = \ln(V)$, 且 Y 服从双指数分布, 其密度函数为

$$f_y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} I_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} I_{\{y < 0\}}, \quad \eta_1, \eta_2 > 0, p, q \geq 0, p + q = 1. \quad (8)$$

其中, p 和 q 分别代表变量正向和负向跳跃次数的比例, 则 $p\lambda$ 和 $q\lambda$ 分别代表正向跳跃和负向跳跃的期望频率; $I_{\{y \geq 0\}}$ 和 $I_{\{y < 0\}}$ 均是示性函数, 当 $y \geq 0$ 时, $I_{\{y \geq 0\}}$ 取值 1 且 $I_{\{y < 0\}}$ 取值为 0, 当 $y < 0$ 时, $I_{\{y \geq 0\}}$ 取值为 0 且 $I_{\{y < 0\}}$ 取值为 1; η_1 代表着正向跳跃强度的期望值, 其倒数 η_1^{-1} 是正向跳跃指数函数的期望值, 那么若 η_1^{-1} 越小, 正向跳跃的强度也就越小; η_2 代表着负向跳跃强度的期望值, 其倒数 η_2^{-1} 是负向跳跃指数函数的期望值, 那么若 η_2^{-1} 越小, 负向跳跃的强度也就越小. 上述参数说明式 (8) 既能刻画正向跳跃, 又能刻画负向跳跃, 因此, DEJD 模型能够刻画本文所提出的跳跃不对称性.

DEJD 模型参数估计

目前,通常用于估计带跳随机模型参数的方法主要有矩估计方法、蒙特卡洛模拟法、极大似然估计法等. 由于 DEJD 的似然函数较为复杂,是泊松加权的混合密度函数,并且大部分参数是没有初始值,很难找到合适的初始值,因此不适合用极大似然估计法和蒙特卡洛模拟法,本文将使用矩估计方法来计算 DEJD 模型中的参数 $\{\alpha, \sigma; p, \lambda; \eta_1, \eta_2\}$.

首先,研究不带跳跃项的随机模型:

$$dk = \alpha dt + \sigma dW_t. \quad (9)$$

求解,得

$$k_t = k_0 + \alpha t + \sigma W_t. \quad (10)$$

在时间区间 $[0, T]$ 上,死亡强度时间序列为 $K = \{k_0, k_1, \dots, k_T\}$. k_t 每一期的增量为 $r_t = \Delta k_t = k_t - k_{t-1}$,且独立同分布,则 $\{r_t\} (t = 0, 1, \dots, T)$ 为

$$r_t = k_t - k_{t-1} = \alpha \Delta t + \sigma W_{\Delta t}. \quad (11)$$

又 $\Delta t = 1$, 即间隔为一年,则

$$r_t = \alpha \Delta t + \sigma W_{\Delta t} = \alpha + \sigma W_1, \quad r_t \sim N(\alpha, \sigma^2). \quad (12)$$

那么, $E(r_t) = \alpha$, $\text{Var}(r_t) = \sigma^2$, $t = 0, 1, \dots, T$. 其中, α 表示 $r_t(\Delta k_t)$ 的均值, σ 代表 $r_t(\Delta k_t)$ 的标准差,与 Lee-Carter 模型的估计值相同.

下面研究 DEJD 模型的参数估计. 对式 (12) 求解,可得

$$k_t = k_0 + \alpha t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i. \quad (13)$$

其中, $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 是复合泊松过程,根据复合泊松过程的性质可知, $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的增量具有独立性和平稳性,则

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t-\Delta t)} Y_i \stackrel{\text{dis}}{=} \sum_{i=1}^{N(\Delta t)} Y_i. \quad (14)$$

同样地,令每个时间间隔 $\Delta t = 1$,有

$$r_t = \alpha + \sigma W_1 + \sum_{i=1}^{N(1)} Y_i = \alpha + \sigma W_1 + \sum_{i=1}^{N_1(1)} Y_{1i} + \sum_{i=1}^{N_2(1)} Y_{2i}. \quad (15)$$

其中, $\sum_{i=1}^{N_1(1)} Y_{1i}$ 和 $\sum_{i=1}^{N_2(1)} Y_{2i}$ 是复合泊松分布 $\sum_{i=1}^{N(1)} Y_i$ 的展开项, $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ 且 λ_1 代表时间序列因子正向跳跃的期望频率, λ_2 代表时间序列因子负向跳跃的期望频率,从而 $\lambda_1 = q\lambda$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Y_{1i} 服从参数为 η_1 的指数分布且 $y \geq 0$, Y_{2i} 服从参数为 $(-\eta_2)$

的指数分布且 $y < 0$. 此时, 对于 α 和 σ 的估计值为剔除跳跃点后, 剩余 r_t 的均值和标准差, λ_1 和 λ_2 的估计值分别为观测值中 k_t 正向和负向跳跃的频率, η_1 和 η_2 的估计值分别为正向和负向跳跃幅度平均值的倒数, 具体结果见表 4.

表 4 参数 $\{\alpha, \sigma, p, \lambda, \eta_1, \eta_2\}$ 估计结果

分组	α	σ	p	λ	η_1	η_2
整体	-0.5135	0.5982	0.4000	0.2381	1.6667	0.2875
男性	-0.5332	0.5713	0.5556	0.4286	1.2965	0.2965
女性	-1.0897	0.6536	0.6000	0.2381	1.0639	0.2767

从表 4 中可以看出, 所有组的 η_1 均大于 η_2 , 说明所有组的 k_t 正向跳跃的强度是大于负向跳跃的强度, 这与图 5 中观察到的结果一致. 对比表 3 中的结果, 可以发现剔除正负向跳跃点后, 用标准差刻画波动率, 所有组的波动率均显著变小, 如整体组的 σ 值为 0.5982 < 原标准差 1.3358, 男性组的 σ 值为 0.5713 < 原标准差 1.5478, 女性组的 σ 值为 0.6536 < 原标准差 1.3876, 说明估计参数的结果更为稳定, 即 DEJD 模型的拟合效果更好. DEJD 模型拟合更好的主要原因在于, 传统 Lee-Carter 模型对 k_t 的估计仅包含了单纯的布朗运动, 有正态分布的假定在其中, 但是 k_t 的分布存在一些跳跃点和极端值, 这是传统 Lee-Carter 模型所不能刻画的, 而 DEJD 模型可以刻画 k_t 值正负向跳跃不对称的跳跃特征, 并且可以将极端值用双指数跳跃扩散的部分来描述, 所以使得模型的参数估计波动率更小, 拟合效果更好.

§4. 实证结果

1) 我国未来人口死亡率预测结果

由于 Lee-Carter 模型中时间序列因子存在正负向跳跃不对称性, 本文引入 DEJD 模型对时间序列因子进行重新刻画, 从而改进了 Lee-Carter 模型. 根据上文实证结果, 可以发现改进后的 Lee-Carter 模型拟合效果更好. 因此, 本文将使用改进后的模型来预测我国未来人口死亡率数据, 从而度量出我国未来潜在的长寿风险.

由式 (13) 计算 k_t 的矩母函数:

$$\begin{aligned}
 E[e^{q(k(t))}] &= E\left[\exp\left(q\left(k_0 + at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right)\right] \\
 &= \exp(\theta k_0) E\left[\exp\left(\theta\left(at + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)\right)\right] \\
 &= \exp(\theta k_0) \exp(G(\theta)t),
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中,

$$G(\theta) = \theta a + \frac{1}{2}\theta^2 s^2 + \lambda \left(\frac{ph_1}{h_1 - \theta} + \frac{ph_2}{h_2 + \theta} - 1 \right), \quad (17)$$

$$E(\mu_{x,t}) = \exp \left(a_x + b_x k_0 + atb_x + \frac{1}{2}b_x^2 \sigma^2 t + \lambda t \left(\frac{ph_1}{h_1 - b_x} + \frac{qh_2}{h_2 + b_x} - 1 \right) \right). \quad (18)$$

将 Lee-Carter 模型和 DEJD 模型的参数估计值代入式 (18), 并预测未来 20 年 (2018 年–2037 年) 的人口死亡率 (见附录). 为了更加清晰的比较未不同年龄段、不同性别组的人口死亡率预测结果, 本文选取 60 以上老龄人口 2018 年–2027 年死亡率预测值, 并按性别分组作出了人口死亡率预测结果三维图, 如图 6 (a)、图 6 (b) 和图 6 (c) 所示.

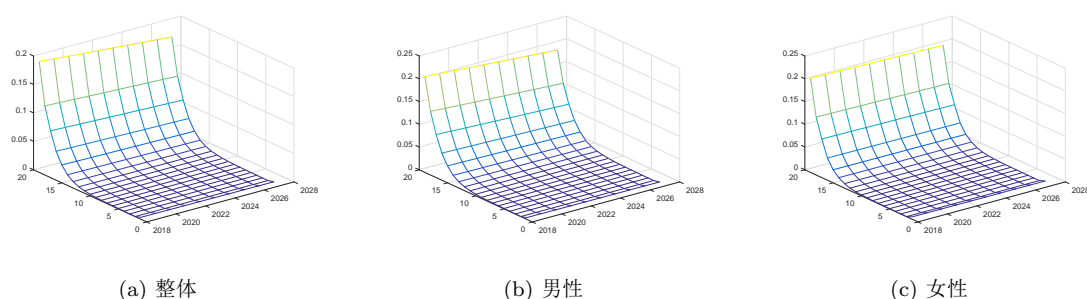


图 6 死亡率预测结果

根据图 6 显示, 未来十年内, 我国 60 岁以上人口死亡率均呈现出下降趋势. 更具体地来看: 第一, 图 6 (a) 表明, 我国所有年龄段人口死亡率均呈现出下降趋势, 其中 60 岁以上老龄人口的死亡率下降速度较其它年龄组更快, 说明未来十年内我国 60 岁以上老龄人的死亡率得到极大改善, 也意味着将要面临较为严重的长寿风险. 此外, 由于 90 岁以上人口较少, 每年的死亡率波动性较大, 预测结果存在偶然性, 并且其在老龄人口中占比较少, 在此不做深入探讨. 第二, 对比图 6 (b) 和图 6 (c), 可以发现, 较女性人口死亡率预测结果, 未来十年内 60 岁以上男性人口死亡率下降趋势更为明显, 并且在 60–64, 65–69, 70–74, 75–79, 80–84, 85–89, 90+ 等七个年龄组中, 男性死亡率变动频率是高于女性死亡率的, 两者均说明未来男性人口将面临的长寿风险问题更为严重.

因此, 人口死亡率下降是不可避免的趋势, 并且不同年龄段、不同性别的人口死亡率下降速度有所不同. 从而, 设计长寿风险管理工具时, 需要将年龄、性别等因素考虑在内. 本文将从不同的年龄和性别角度出发, 定价出 SM 债券的中国市场价格.

2) SM 债券定价示例

假定我国在 2007 年发行一款长期国债和 SM 债券, 相关信息见表 5.

表 5 国债和 SM 债券相关信息

	国债	SM 债券
发行日期	2007 年 10 月 31 日	2007 年 10 月 31 日
发行期限	30 年	30 年
面值	100 元	100 元
票面利率	3%	3%
付息日期	每年 10 月 31 日	每年 10 月 31 日
还本日期	2037 年 10 月 31 日	2037 年 10 月 31 日
是否可流通	是	S 债券必须保留, M 债券可自由流通
销售对象	全体人群	与 SM 挂钩的年龄段和性别对应的人群

若市场利率恒定不变为 4%, 那么发行时, 每份国债的发行价为

$$y = C \cdot \bar{a}_{\overline{T}|} + 1 \cdot e^{-rT} = 3 \times \bar{a}_{\overline{30}|} + 100e^{-0.04 \times 30} = 81.4886. \quad (19)$$

SM 债券按照年龄段和性别分类, 面向不同的人群发行. 其中, 按照年龄段划分为 30-34, 35-39, 40-44, 45-49, 50-54, 55-59 等六组, 按照性别分为两组, 共计 12 种. 那么, 各组对应的 M 债券和 S 债券发行价如表 6 所示.

表 6 各组对应的 SM 债券发行价

	S 债券价格		M 债券价格	
	男性	女性	男性	女性
30-34	27.1107	28.1152	54.3780	53.3735
35-39	25.7372	26.9718	55.7514	54.5169
40-44	23.5831	24.9868	57.9056	56.5019
45-49	20.2659	21.9222	61.2227	59.5665
50-54	15.7687	17.4474	65.7200	64.0412
55-59	10.5521	11.6432	70.9365	69.8455

图 7 将表 6 所示的数据直观的展现出来. 从图 7(a)中可以发现, 年龄越大, 对应的 S 债券发行价就会越低, 这是因为 S 债券本身的属性所导致的, S 债券不派发利息, 只有持有人在到期日存活时才会获得本金, 自然死亡率越高的年龄组发行价就越低. 同样, 因为男性死亡率普遍高于女性死亡率, 那么男性组对应的 S 债券价格就会越低. 男性人群死亡率较高, 主要是因为男性人群在社会和家庭中承担更多的社会负担和经济压力, 这将在一定程度上影响男性人口的预期寿命和死亡率变化, 从而导致男性人群的死亡率高于女性人群. 从图 7(b)中可以看出, 针对男性发行的 M 债券价格是要高于女性, 这是因为男性的死亡率普遍高于女性, 从而在到期日其对应的死亡池中的资金也会较多, 即 M 债券持有人到期收益更好, 导致其发行价相对较高. 与此同时, 随着年龄的增长, M 债券的发行价也越高, 这

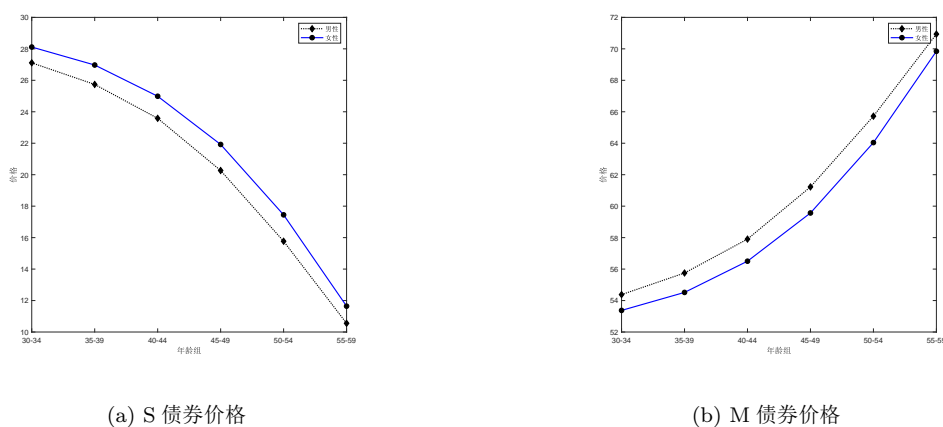


图 7 各组对应的 SM 债券价格

是因为伴随着年龄的增长死亡率也会逐渐上升, 导致年龄较大组对应的死亡池在到期日会积累较多的资金, 那么其对应的 M 债券发行价也会更高.

§5. 结论和建议

人口老龄化背景下的长寿风险会带来一系列的经济问题和社会问题, 尤其我国是人口老龄化大国, 更加需要重视长寿风险问题. 本文以 Lee-Carter 模型为基础研究适合我国国情的动态死亡率模型, 根据时间序列因子的变化特征, 引入 DEJD 模型对参数进行重新刻画, 并对比 DEJD 模型与 Lee-Carter 模型的参数估计结果, 发现 DEJD 模型更适用于我国人口死亡率预测. 基于此预测, 定价出 SM 债券的中国价格. 研究发现: 第一, 利用我国人口死亡率数据估计出的时间序列因子存在跳跃性, 且正负向跳跃不对称; 第二, DEJD 模型可以刻画时间序列因子的正负向不对称性, 且 DEJD 模型的拟合效果较 Lee-Carter 模型更好, 预测结果更为稳健; 第三, 从死亡率预测结果来看, 60 岁以上人口的死亡率下降速度较快, 按性别分类来看, 同一年龄段女性死亡率更低, 但是男性死亡率下降趋势更快, 男性在未来存在较大的长寿风险; 第四, M 债券的发行价与年龄成正比, 男性 M 债券价格通常要高于女性, 而 S 债券的发行价与年龄成反比, 男性 S 债券价格通常要低于女性.

根据本文研究, 提出如下几点建议: 第一, 政府、保险公司等需要重点研究死亡率预测模型, 构建出适合我国死亡率经验分布的模型. 我们不能仅仅满足于借鉴国外已成熟的预测模型, 更需要研究出适合我国国情的死亡率预测模型, 以便能够有效地度量出我国长寿风险问题. 第二, 政府应大力推广 SM 债券的发行, 鼓励社会保障基金、人寿保险公司等拥有大量养老资金的单位购买, 甚至可以通过税收优惠等手段, 刺激企业对 SM 债券的需求, 以便实现长寿风险向资本市场的转移和分散. 第三, 政府应当鼓励、支持发展我国资本市场, 完善投资相关的法律法规体系, 为长寿债券或其他长寿风险管理工具在资本市场的发行和流通创造良好的投资环境, 为实现长寿风险转移提供足够的现实条件和制度基础.

附录 我国 2018—2037 年人口死亡率预测结果 (%)

年份	分组	0—4	5—9	10—14	15—19	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	45—49
2018	全部	3.5381	0.3810	0.3277	0.5177	0.7438	0.8386	1.0680	1.3415	1.9025	2.8118
	男性	3.6916	0.4635	0.3797	0.6191	0.9628	1.0283	1.3796	1.7504	2.4268	3.5732
	女性	5.4025	0.3091	0.3377	0.4090	0.5509	0.6747	0.8402	0.9668	1.5216	2.1491
2019	全部	3.4154	0.3730	0.3210	0.5057	0.7255	0.8172	1.0454	1.3212	1.8754	2.7742
	男性	3.5856	0.4542	0.3711	0.6063	0.9414	1.0055	1.3522	1.7265	2.3897	3.5289
	女性	5.3592	0.3071	0.3354	0.4064	0.5470	0.6700	0.8349	0.9626	1.5141	2.1407
2020	全部	3.2969	0.3651	0.3144	0.4940	0.7076	0.7963	1.0232	1.3011	1.8487	2.7370
	男性	3.4826	0.4452	0.3627	0.5938	0.9205	0.9832	1.3254	1.7030	2.3531	3.4850
	女性	5.3163	0.3051	0.3331	0.4037	0.5432	0.6653	0.8296	0.9585	1.5065	2.1323
2021	全部	3.1825	0.3575	0.3080	0.4826	0.6901	0.7760	1.0015	1.2813	1.8224	2.7004
	男性	3.3826	0.4363	0.3545	0.5816	0.9001	0.9614	1.2991	1.6797	2.3170	3.4418
	女性	5.2737	0.3032	0.3308	0.4011	0.5393	0.6606	0.8243	0.9543	1.4990	2.1239
2022	全部	3.0720	0.3499	0.3017	0.4715	0.6731	0.7562	0.9803	1.2619	1.7965	2.6642
	男性	3.2855	0.4276	0.3465	0.5696	0.8802	0.9401	1.2734	1.6568	2.2815	3.3990
	女性	5.2314	0.3013	0.3285	0.3984	0.5355	0.6559	0.8191	0.9502	1.4916	2.1156
2023	全部	2.9654	0.3426	0.2955	0.4606	0.6565	0.7368	0.9596	1.2427	1.7710	2.6285
	男性	3.1911	0.4191	0.3386	0.5579	0.8607	0.9192	1.2481	1.6341	2.2466	3.3568
	女性	5.1895	0.2994	0.3262	0.3958	0.5317	0.6513	0.8139	0.9461	1.4841	2.1073
2024	全部	2.8625	0.3354	0.2895	0.4499	0.6403	0.7180	0.9392	1.2238	1.7458	2.5933
	男性	3.0994	0.4107	0.3310	0.5464	0.8416	0.8989	1.2234	1.6118	2.2122	3.3151
	女性	5.1480	0.2975	0.3239	0.3933	0.5280	0.6467	0.8088	0.9420	1.4768	2.0991
2025	全部	2.7632	0.3283	0.2836	0.4395	0.6245	0.6997	0.9193	1.2053	1.7209	2.5585
	男性	3.0104	0.4026	0.3235	0.5351	0.8229	0.8789	1.1991	1.5898	2.1783	3.2739
	女性	5.1067	0.2956	0.3217	0.3907	0.5243	0.6422	0.8037	0.9379	1.4694	2.0909
2026	全部	2.6673	0.3214	0.2778	0.4294	0.6091	0.6818	0.8999	1.1870	1.6965	2.5243
	男性	2.9240	0.3945	0.3162	0.5241	0.8047	0.8594	1.1753	1.5681	2.1449	3.2333
	女性	5.0658	0.2937	0.3194	0.3881	0.5206	0.6377	0.7986	0.9339	1.4621	2.0827
2027	全部	2.5747	0.3147	0.2721	0.4194	0.5941	0.6644	0.8808	1.1689	1.6723	2.4905
	男性	2.8400	0.3867	0.3090	0.5133	0.7868	0.8404	1.1520	1.5467	2.1121	3.1931
	女性	5.0252	0.2918	0.3172	0.3856	0.5169	0.6332	0.7935	0.9298	1.4548	2.0745
2028	全部	2.4854	0.3081	0.2665	0.4097	0.5794	0.6474	0.8621	1.1512	1.6486	2.4571
	男性	2.7584	0.3790	0.3020	0.5027	0.7694	0.8217	1.1292	1.5256	2.0797	3.1535
	女性	4.9850	0.2900	0.3150	0.3831	0.5133	0.6287	0.7885	0.9258	1.4476	2.0664
2029	全部	2.3991	0.3016	0.2611	0.4003	0.5651	0.6309	0.8439	1.1337	1.6251	2.4242
	男性	2.6792	0.3714	0.2952	0.4924	0.7523	0.8035	1.1068	1.5047	2.0479	3.1143
	女性	4.9450	0.2881	0.3128	0.3806	0.5096	0.6243	0.7835	0.9218	1.4404	2.0583
2030	全部	2.3159	0.2952	0.2558	0.3910	0.5512	0.6148	0.8260	1.1165	1.6020	2.3917
	男性	2.6023	0.3640	0.2885	0.4822	0.7357	0.7857	1.0849	1.4842	2.0165	3.0756
	女性	4.9054	0.2863	0.3107	0.3781	0.5060	0.6199	0.7785	0.9178	1.4332	2.0503
2031	全部	2.2355	0.2890	0.2505	0.3820	0.5376	0.5991	0.8085	1.0995	1.5792	2.3597
	男性	2.5275	0.3568	0.2820	0.4723	0.7194	0.7683	1.0633	1.4639	1.9856	3.0374
	女性	4.8661	0.2844	0.3085	0.3756	0.5025	0.6155	0.7736	0.9138	1.4260	2.0423
2032	全部	2.1580	0.2830	0.2454	0.3731	0.5243	0.5838	0.7914	1.0828	1.5567	2.3281
	男性	2.4549	0.3497	0.2756	0.4626	0.7034	0.7512	1.0423	1.4439	1.9552	2.9997
	女性	4.8271	0.2826	0.3064	0.3732	0.4989	0.6112	0.7687	0.9099	1.4189	2.0343
2033	全部	2.0831	0.2770	0.2404	0.3645	0.5114	0.5689	0.7746	1.0664	1.5346	2.2969
	男性	2.3844	0.3427	0.2694	0.4530	0.6878	0.7346	1.0216	1.4242	1.9253	2.9624
	女性	4.7884	0.2808	0.3042	0.3707	0.4954	0.6069	0.7638	0.9060	1.4119	2.0263
2034	全部	2.0108	0.2712	0.2355	0.3561	0.4988	0.5543	0.7582	1.0502	1.5128	2.2661
	男性	2.3159	0.3359	0.2633	0.4437	0.6726	0.7183	1.0013	1.4048	1.8958	2.9257
	女性	4.7501	0.2791	0.3021	0.3683	0.4919	0.6026	0.7590	0.9020	1.4049	2.0184
2035	全部	1.9410	0.2655	0.2307	0.3479	0.4865	0.5402	0.7421	1.0342	1.4913	2.2358
	男性	2.2494	0.3292	0.2573	0.4346	0.6577	0.7024	0.9815	1.3856	1.8668	2.8893
	女性	4.7120	0.2773	0.3000	0.3659	0.4884	0.5984	0.7542	0.8981	1.3979	2.0105
2036	全部	1.8737	0.2599	0.2260	0.3398	0.4745	0.5264	0.7264	1.0185	1.4701	2.2058
	男性	2.1848	0.3226	0.2515	0.4256	0.6431	0.6868	0.9620	1.3667	1.8382	2.8534
	女性	4.6743	0.2755	0.2979	0.3635	0.4850	0.5942	0.7494	0.8942	1.3909	2.0026
2037	全部	1.8086	0.2544	0.2213	0.3320	0.4628	0.5129	0.7110	1.0031	1.4491	2.1763
	男性	2.1221	0.3162	0.2458	0.4168	0.6288	0.6716	0.9429	1.3480	1.8100	2.8180
	女性	4.6368	0.2738	0.2959	0.3611	0.4816	0.5900	0.7447	0.8904	1.3840	1.9948

年份	分组	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90+
2018	全部	4.2815	6.7637	11.3260	18.7200	31.3960	50.8930	82.2410	121.4900	194.9100
	男性	5.4093	8.3906	13.8530	22.2040	37.2360	59.5070	94.5990	139.8200	210.7400
	女性	3.2167	5.4758	9.6429	16.9980	28.6760	48.8080	84.9050	127.2300	206.9400
2019	全部	4.2364	6.6771	11.1460	18.4320	30.9320	50.2340	81.1770	120.2200	192.5800
	男性	5.3643	8.2854	13.6380	21.8600	36.6810	58.6590	93.1330	137.7900	208.3200
	女性	3.2084	5.4540	9.5951	16.9150	28.5400	48.5860	84.4840	126.6500	206.1900
2020	全部	4.1917	6.5916	10.9690	18.1480	30.4740	49.5830	80.1270	118.9600	190.2800
	男性	5.3196	8.1816	13.4270	21.5200	36.1350	57.8230	91.6900	135.8000	205.9300
	女性	3.2001	5.4323	9.5477	16.8320	28.4050	48.3650	84.0640	126.0800	205.4400
2021	全部	4.1474	6.5072	10.7940	17.8690	30.0230	48.9410	79.0910	117.7200	188.0100
	男性	5.2752	8.0791	13.2190	21.1860	35.5970	56.9990	90.2700	133.8400	203.5600
	女性	3.1918	5.4106	9.5004	16.7490	28.2710	48.1450	83.6470	125.5100	204.7000
2022	全部	4.1037	6.4239	10.6220	17.5930	29.5790	48.3070	78.0680	116.4800	185.7700
	男性	5.2313	7.9779	13.0140	20.8570	35.0670	56.1870	88.8710	131.9000	201.2300
	女性	3.1835	5.3890	9.4534	16.6670	28.1370	47.9260	83.2310	124.9400	203.9500
2023	全部	4.0604	6.3416	10.4530	17.3230	29.1420	47.6820	77.0590	115.2600	183.5500
	男性	5.1877	7.8779	12.8130	20.5340	34.5450	55.3860	87.4940	130.0000	198.9200
	女性	3.1753	5.3675	9.4066	16.5860	28.0040	47.7080	82.8180	124.3800	203.2100
2024	全部	4.0176	6.2604	10.2870	17.0560	28.7110	47.0640	76.0620	114.0600	181.3600
	男性	5.1444	7.7792	12.6140	20.2150	34.0310	54.5970	86.1380	128.1200	196.6400
	女性	3.1671	5.3461	9.3601	16.5050	27.8710	47.4910	82.4070	123.8100	202.4800
2025	全部	3.9752	6.1802	10.1230	16.7930	28.2860	46.4540	75.0780	112.8700	179.1900
	男性	5.1016	7.6818	12.4190	19.9010	33.5240	53.8190	84.8040	126.2700	194.3800
	女性	3.1589	5.3248	9.3138	16.4240	27.7400	47.2750	81.9970	123.2500	201.7400
2026	全部	3.9332	6.1011	9.9622	16.5350	27.8670	45.8530	74.1070	111.6800	177.0600
	男性	5.0591	7.5855	12.2260	19.5920	33.0250	53.0520	83.4900	124.4400	192.1500
	女性	3.1507	5.3036	9.2677	16.3430	27.6080	47.0600	81.5900	122.7000	201.0100
2027	全部	3.8917	6.0230	9.8036	16.2800	27.4550	45.2590	73.1490	110.5200	174.9400
	男性	5.0169	7.4905	12.0370	19.2880	32.5330	52.2960	82.1960	122.6400	189.9400
	女性	3.1425	5.2824	9.2218	16.2630	27.4780	46.8460	81.1850	122.1400	200.2800
2028	全部	3.8507	5.9459	9.6476	16.0290	27.0490	44.6730	72.2030	109.3600	172.8600
	男性	4.9751	7.3966	11.8500	18.9890	32.0490	51.5510	80.9220	120.8700	187.7600
	女性	3.1344	5.2614	9.1762	16.1840	27.3480	46.6330	80.7820	121.5900	199.5500
2029	全部	3.8100	5.8697	9.4941	15.7820	26.6490	44.0940	71.2690	108.2200	170.7900
	男性	4.9336	7.3040	11.6670	18.6940	31.5720	50.8160	79.6690	119.1200	185.6100
	女性	3.1263	5.2404	9.1308	16.1050	27.2180	46.4210	80.3800	121.0400	198.8300
2030	全部	3.7698	5.7946	9.3430	15.5390	26.2550	43.5230	70.3480	107.0800	168.7500
	男性	4.8925	7.2125	11.4860	18.4040	31.1020	50.0920	78.4340	117.4000	183.4800
	女性	3.1182	5.2195	9.0856	16.0260	27.0890	46.2100	79.9810	120.4900	198.1100
2031	全部	3.7301	5.7204	9.1943	15.3000	25.8660	42.9590	69.4380	105.9600	166.7400
	男性	4.8517	7.1221	11.3080	18.1180	30.6390	49.3780	77.2190	115.7000	181.3700
	女性	3.1101	5.1987	9.0407	15.9470	26.9610	46.0000	79.5840	119.9500	197.3900
2032	全部	3.6907	5.6471	9.0480	15.0650	25.4840	42.4030	68.5400	104.8500	164.7500
	男性	4.8113	7.0329	11.1330	17.8370	30.1830	48.6740	76.0220	114.0300	179.2900
	女性	3.1021	5.1779	8.9959	15.8690	26.8340	45.7910	79.1890	119.4100	196.6700
2033	全部	3.6518	5.5748	8.9040	14.8330	25.1070	41.8530	67.6530	103.7600	162.7800
	男性	4.7712	6.9448	10.9600	17.5600	29.7330	47.9810	74.8440	112.3800	177.2400
	女性	3.0940	5.1573	8.9514	15.7910	26.7070	45.5820	78.7950	118.8700	195.9600
2034	全部	3.6132	5.5034	8.7622	14.6040	24.7350	41.3110	66.7780	102.6700	160.8400
	男性	4.7315	6.8577	10.7910	17.2870	29.2910	47.2970	73.6850	110.7500	175.2000
	女性	3.0860	5.1367	8.9071	15.7140	26.5800	45.3750	78.4040	118.3300	195.2500
2035	全部	3.5751	5.4330	8.6228	14.3790	24.3690	40.7760	65.9150	101.6000	158.9200
	男性	4.6920	6.7718	10.6230	17.0190	28.8550	46.6230	72.5430	109.1500	173.1900
	女性	3.0780	5.1162	8.8631	15.6370	26.4540	45.1690	78.0150	117.7900	194.5400
2036	全部	3.5374	5.3634	8.4856	14.1580	24.0090	40.2480	65.0620	100.5300	157.0300
	男性	4.6529	6.6870	10.4590	16.7550	28.4250	45.9580	71.4190	107.5800	171.2000
	女性	3.0701	5.0958	8.8192	15.5610	26.3290	44.9630	77.6270	117.2600	193.8300
2037	全部	3.5001	5.2947	8.3505	13.9400	23.6540	39.7270	64.2210	99.4820	155.1500
	男性	4.6141	6.6032	10.2970	16.4950	28.0020	45.3030	70.3120	106.0200	169.2400
	女性	3.0621	5.0755	8.7756	15.4840	26.2050	44.7590	77.2420	116.7300	193.1300

参 考 文 献

- [1] BLAKE D, BURROWS W. Survivor bonds: helping to hedge mortality risk[J]. *J Risk Insur*, 2001, **68(2)**: 339–348.
- [2] LIN Y J, COX S H. Securitization of mortality risks in life annuities[J]. *J Risk Insur*, 2005, **72(2)**: 227–252.
- [3] BLAKE D, CAIRNS A J G, DOWD K. Living with mortality: longevity bonds and other mortality-linked securities[J]. *British Actuarial J*, 2006, **12(1)**: 153–197.
- [4] DE JONG P, FERRIS S. SM bonds – a new product for managing longevity risk[J]. *J Risk Insur*, 2019, **86(1)**: 121–149.
- [5] WANG S S. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks[J]. *J Risk Insur*, 2000, **67(1)**: 15–36.
- [6] WANG S S. A universal framework for pricing financial and insurance risks[J]. *Astin Bull*, 2002, **32(2)**: 213–234.
- [7] 樊毅, 张宁, 王耀中. 基于双因素 Wang 转换方法的长寿风险债券定价研究[J]. 财经理论与实践, 2017, **38(4)**: 32–38.
- [8] COX J C, ROSS S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. *J Financ Econ*, 1976, **3(1-2)**: 145–166.
- [9] CAIRNS A J G, BLAKE D, DOWD K. Pricing death: frameworks for the valuation and securitization of mortality risk[J]. *Astin Bull*, 2006, **36(1)**: 79–120.
- [10] 宋平凡, 谭常春, 祁毓. 基于相对熵方法的长寿债券定价研究[J]. 中国管理科学, 2019, **27(5)**: 32–41.
- [11] LEE R D, CARTER L R. Modeling and forecasting U.S. mortality[J]. *J Amer Statist Assoc*, 1992, **87(419)**: 659–671.
- [12] RENSHAW A E, HABERMAN S. A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors[J]. *Insurance Math Econom*, 2006, **38(3)**: 556–570.
- [13] CURRIE I D. Smoothing and forecasting mortality rates with P-splines[R]. Talk given at the Institute of Actuaries, 2006.
- [14] 李志生, 刘恒甲. Lee-Carter 死亡率模型的估计与应用 —— 基于中国人口数据的分析[J]. 中国人口科学, 2010, **(3)**: 46–56+111.
- [15] 胡仕强, 陈荣达. 我国有限人口数据下长寿衍生产品定价的贝叶斯方法[J]. 系统科学与数学, 2018, **38(4)**: 497–510.
- [16] 樊毅, 张宁, 张万月. 随机死亡率模型的拟合与预测 —— 基于中国男性人口死亡率数据的比较分析[J]. 保险研究, 2017, **(9)**: 15–31.
- [17] CHEN H, COX S H. Modeling mortality with jumps: applications to mortality securitization[J]. *J Risk Insur*, 2009, **76(3)**: 727–751.
- [18] DENG Y L, BROCKETT P L, MACMINN R D. Longevity/mortality risk modeling and securities pricing[J]. *J Risk Insur*, 2012, **79(3)**: 697–721.
- [19] 田玲, 姜世杰, 樊毅. 基于风险立方方法的长寿风险债券定价研究[J]. 保险研究, 2017, **(7)**: 3–12.
- [20] KOU S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. *Management Sci*, 2002, **48(8)**: 1086–1101.
- [21] KOU S G, WANG H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model[J]. *Management Sci*, 2004, **50(9)**: 1178–1192.

Population Life Prediction and SM Bonds Pricing Based on DEJD Model

BIAN Huabin^{1,2} TONG Xinle² YAO Dingjun²

(¹*School of Economics, Fudan University, Shanghai, 200433, China*)

(²*School of Finance, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, 210023, China*)

Abstract: In the context of the aging population, longevity risk will increase great economic pressure to the national endowment security system. How to measure and manage longevity risk has become the focus of research in recent years. Based on the Chinese population mortality data, and Lee-Carter model, we introduce DEJD model (double exponential jump diffusion model) to describe the jump asymmetry of time series factors, and prove that DEJD model is more effective than Lee-Carter model in fitting time series factors. In addition, we use the population mortality data predicted by DEJD model to price the SM bonds in Chinese market, providing an important reference for the promotion of SM bond in China.

Keywords: longevity risk; Lee-Carter model; DEJD model; SM bonds

2020 Mathematics Subject Classification: 62P05