

## 带有随机延迟的最优分红和资本注资问题\*

汪浩

(安徽师范大学数学与统计学院, 芜湖, 241002)

程孝强

(安徽工程大学数理与金融学院, 芜湖, 241000)

官小洁\*

(华东师范大学统计学院, 上海, 200062)

**摘要:** 本文考虑了带有注资延迟的最优分红问题, 并且假设注资延迟服从指数分布. 该问题的目标是找到最优的分红策略和注资策略使得分红效用以及注资效用达到最大. 由于保险公司的盈余过程涉及到混合泊松过程, 应用扩散近似原则, 我们用一个随机微分方程来刻画盈余过程. 当值函数足够光滑时, 使用动态规划方法, 我们得到相应的拟变分不等式. 本文从三个不同的区域 (即分红区域、连续区域和注资区域) 来讨论值函数. 通过边界条件, 我们得到不同区域中值函数的表达式且给出了验证性定理. 数值例子呈现了注资延迟在不同参数下的影响.

**关键词:** 最优分红策略; 最优注资策略; 动态规划原理; 拟变分不等式; 验证性定理

**中图分类号:** O211.9

**英文引用格式:** WANG H, CHENG X Q, GONG X J. Optimal dividend and capital injection problem with random delay [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2022, 38(2): 267-284. (in Chinese)

### §1. 引言

最优分红问题一直是金融学和精算学中的一个热点问题. 分红决策对于公司来说是至关重要, 因为它不仅是公司未来盈利能力的重要体现, 而且可能对公司的投资和融资决策产生重要的影响. 作为精算学中的一个热点问题, 已经有众多学者讨论了最优分红问题, 如文献 [1-5] 等等. 在实际金融市场中, 交易成本是一个不可避免的问题, 交易成本通常包括两部分: 比例交易成本和固定交易成本. 作为以前工作的延伸, 很多学者假定分红是在支付一定的交易成本的约束条件下进行的. 如文献 [6] 考虑了混合泊松过程模型下带有交易费用的最优分红问题. 文献 [7] 研究了布朗运动风险模型下带有交易费用的最优分红问题.

在经典破产理论中, 我们认为盈余一旦变为负数, 则公司会发生破产. 在分红模型中, 保险公司会面临着破产的风险. 在实践中, 如果保险公司没有足够的偿付能力, 公司经理就可以从市场上筹集新的资本以防止破产, 从而为保险公司的继续经营提供保障. 因此, 允许注资成为保险公司降低风险的一种重要途径. 有很多学者考虑了不同情形下的注资问题.

\*安徽省高等学校自然科学研究项目 (批准号: KJ2021A0104, SK2021A0284, KJ2021A0107) 资助.

\*通讯作者, E-mail: 1019532356@qq.com.

本文 2020 年 10 月 19 日收到, 2020 年 11 月 11 日收到修改稿.

如文献 [8,9] 中考虑了对偶风险模型下带有比例和固定交易费用的最优分红和注资问题. 为了使得分红减去注入资金的贴现值达到最大, 当允许股东进行股利分红和资本注资时, 文献 [8,9] 得到最优的分红和注资控制策略. 事实上, 文献 [10] 建议在现金流不足时可以考虑注资以维持业务. 此外, 文献 [11] 得到了分红率受到限制时的最优注资和分红策略. 结合再保险问题, 文献 [12] 讨论了经典风险模型中最优分红、注资及再保险问题, 并且得到了相应的最优策略. 文献 [13] 考虑了破产终端值影响下保险公司的最优分红、注资和溢额再保险策略. 还有许多讨论带有注资问题的成果, 如文献 [14-18] 等.

近年来, 人们开始研究带有延迟的随机控制模型. 文献 [19] 考虑了银行在固定延迟期进行资本重组的最优策略问题. 文献 [20] 提出了一维扩散的延迟脉冲控制问题的直接求解方法, 并且解决了火灾延迟的最优劳动力问题. 文献 [21] 研究了固定成本和延迟下的最优再保险策略. 文献 [22] 应用动态规划原理, 得到固定注资延迟的最优分红策略. 考虑到资本注资的延迟, 带有延迟的模型更加符合实际情形, 每当公司濒临破产时, 它就可以筹集足够的资金来继续生存.

本文对文献 [22] 中考虑的问题做了进一步扩展. 我们考虑了注资存在延迟, 并且注资延迟服从指数分布情形下的最优分红问题. 实际情况中, 并不是每次注资都立刻发生作用, 并且注资需要时间. 由于注资的规模不一样等原因导致每次注资需要的时间不固定, 我们假设注资延迟的参数服从指数分布, 找到具有脉冲控制的随机延迟系统的最优策略. 固定延迟与随机延迟的模型之间存在根本区别, 本文的主要贡献就是对延迟随机化处理. 当分红无额外交易费用, 注资存在固定交易费用时, 最优策略即为收益的最大化, 即要使得股利的贴现效用减去注资贴现效用的期望达到最大.

本文的主要结构如下: 第 2 节介绍了具体的数学模型. 第 3 节中, 我们给出了性能函数以及相应的值函数, 并且推导出受控过程的拟变分不等式. 第 4 节得到了三个区域的边界条件, 并且给出了验证性定理. 数值模拟将在第 5 节中呈现.

## §2. 数学模型

我们假设本文中所出现的随机变量和随机过程均定义在带流的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, P)$  上, 其中  $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  是由盈余过程  $X(\cdot)$  生成的且满足通常条件的信息流. 在这种情形下,  $\mathcal{F}_t$  是一个  $\sigma$  代数族, 并且满足当  $s < t$  时,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  以及  $\mathcal{F}_0$  包含所有的零测集. 在传统的风险理论中, 在不考虑分红以及资本注入的情况下, 通常假设保险公司的盈余过程  $X(t)$  满足经典的 Cramér-Lundberg 过程:

$$X(t) = x + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

其中  $x$  是初始盈余,  $c$  是保费率. 令  $\rho_j$  表示第  $j-1$  次理赔和第  $j$  次理赔之间的时间间隔,

则第  $n$  次理赔的发生时间为:

$$w_n = \sum_{j=1}^n \rho_j.$$

进一步, 我们假设  $t$  时刻前理赔发生的次数  $N(t)$  服从泊松计数过程:

$$N(t) = \max\{n \in N : w_n \leq t\},$$

则  $t$  时刻为止的理赔总额为

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

其中  $Y_i$  表示第  $i$  次的理赔额度,  $S(t)$  是一个理赔发生率为  $\lambda$  的复合泊松过程. 我们假设  $\{Y_i\}$  是一列独立同分布且严格正的随机变量, 其分布函数为  $\Pi(y)$ .  $f(y)$ ,  $y \geq 0$  为  $Y_i$  的概率密度函数,  $\mu$  表示  $Y$  的数学期望, 并且假设  $N$  与  $\{Y_i\}$  相互独立, 则泊松测度  $N(t)$  的强度为  $\lambda dt \times \Pi(dy)$ , 其中  $\Pi(dy) = f(y) dy$ .

## 1) 股利分配过程

本节中我们将考虑股利分配策略. 常用的股利分配策略有波段分红策略、边界分红策略和阈值分红策略. 其中, 波段分红策略是指保险公司根据盈余过程  $X(\cdot)$  所处的区域进行分红, 用集合  $A$  表示无需分红区域, 用集合  $B$  表示分红区域.  $A$  和  $B$  中有  $n-1$  对区域用来刻画分红策略, 是否需要进行分红只需看盈余所处的位置即可. 当波段分红区域为两个区域时, 就是边界分红策略. 边界分红策略要求盈余不能超过某个界限, 一旦超过界限就需要马上进行分红使得盈余过程小于界限. 如果超出的部分不需要全部分掉, 即盈余过程不需要马上减少到界限, 就是阈值分配策略. 在本文中, 我们考虑的是阈值分配策略.

假设分红策略  $Z(t)$  是  $\mathcal{F}_t$ -适应过程,  $\{Z(t) : t \geq 0\}$  表示  $t$  时刻前总的分红额度, 这里  $Z(t)$  是一个满足右连续左极限存在、非负且非降的随机过程. 本文中, 我们约定  $Z(0^-) = 0$ . 在  $t \geq 0$  时, 随机过程  $Z$  的跳跃大小为:

$$\Delta Z(t) := Z(t) - Z(t^-),$$

$Z(t)$  的连续部分为:

$$Z^c(t) := Z(t) - \sum_{0 \leq s < t} \Delta Z(s).$$

## 2) 注资过程

如果保险公司仅考虑最优分红策略, 会加速该保险公司破产, 如果只考虑破产概率最小, 又会牺牲股东的利益. 另外, 为了保证保险公司的正常运营, 监管部门要求保险公司的盈余必须为正值. 股东投资保险公司主要原因是为了得到收益, 在进行股利分配时, 他们得

到了分红收益. 当然股东并不愿意看到保险公司破产, 为了避免破产, 当盈余小于 0 时, 我们允许股东进行资本注资. 那么, 何时进行注资, 注资多少, 这些问题都需要我们进行考虑, 于是注资问题成为人们的研究兴趣. 文献 [14] 曾指出, 最优的策略应当同时考虑分红和注资两种情形. 也就是说, 当盈余很高时考虑分红策略, 当盈余很低时考虑注资策略, 这样既降低了保险公司破产的风险, 又提高了股东的收益.

上文我们已经讨论了分红过程, 接下来我们考虑注资过程. 假设注资时间  $\{\tau_n : n = 1, 2, \dots\}$  为一个单调递增的停时序列. 第  $n$  次注资的大小  $\{\zeta_n : n = 1, 2, \dots\}$  是一个随机变量序列, 那么资本注入过程可以表示为:

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau_n \leq t\}} \zeta_n.$$

然而在现实生活中, 并不是每次注资都会立刻发生作用. 本文中我们假设在资本注资过程中存在长度为  $\Delta$  的时间延迟. 另外, 由于注资的规模以及保险公司经营情况不同等原因导致每次注资需要的延迟时间不固定, 因此我们假设  $\Delta$  服从参数为  $\lambda_0$  的指数分布, 即  $\Delta \sim \exp(\lambda_0)$ .

### 3) 盈余过程

考虑到保险公司的盈余在运营过程中受到股利分配过程和注资过程的影响, 而且现实中股利分配和注资为典型的逐段的, 股利分配和注资的时间是由盈余的变化过程所决定的, 所以我们引入脉冲控制. 脉冲控制只在分红时刻以及  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  点进行控制, 并且可通过选择一个合适的脉冲值直接影响盈余过程. 类似于文献 [22], 我们定义如下的控制策略  $u$ :

$$u = \{Z; L\} = \{Z; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tau_{n+1}, \dots; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \dots\}.$$

我们假设对所有的  $t > \tau_0$ , 都有  $X(t) = 0$ , 其中  $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : X(t) < 0\}$  表示破产的时间,  $Z$  表示股利分配过程,  $\tau_i$  表示注资时间,  $\zeta_i$  表示注资金额. 此时保险公司在  $t$  时刻带有注资的盈余 (仍用  $X(t)$  表示) 演变为:

$$X(t) = x + ct - S(t) - Z(t) + \sum_n I_{\{\tau_n + \Delta \leq t\}} \zeta_n, \quad t < \tau_0,$$

其中  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$  表示累积索赔总额,  $Z(t)$  表示累积股利分配额,  $\sum_n I_{\{\tau_n + \Delta \leq t\}} \zeta_n = L(t)$  表示累积注资金额. 上述方程的微分形式为:

$$dX_t = c dt - dS(t) - dZ(t) + dL(t).$$

对于索赔额, 我们令  $E[Y_i] = \mu$ ,  $E[Y_i^2] = \sigma^2$ . 应用扩散逼近方法,  $X(t)$  可近似为

$$X(t) = x + (c - \lambda\mu)t + \sigma\lambda^{0.5}W(t) - Z(t) + \sum_n I_{\{\tau_n + \Delta \leq t\}} \zeta_n,$$

其中  $W(t)$  是一维标准布朗运动. 简单起见, 在我们的模型中不考虑安全负荷因子. 当随机注资延迟  $\Delta$  是一个确定的常数时, 我们的模型将退化为文献 [22] 中讨论的情形.

**注记 1** 本文中, 我们主要考虑股利分配策略和带有随机延迟的注资策略, 忽略再保险策略在保险公司经营过程中的影响, 并且假设理赔的风险均由保险公司自己承担.

### §3. 性能函数和值函数

我们假设股东需要支付  $K + \zeta$  来完成额度为  $\zeta$  的资本注入, 其中  $K > 0$  是固定交易成本. 简单起见, 我们忽略了注资和分红过程中的比例交易成本以及分红过程中的固定交易成本. 假设贴现因子为常数  $r > 0$ . 对于任意的可容许策略  $u = (Z, L)$ , 定义性能函数:

$$\begin{aligned} J(x, u) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_0} e^{-rt} dZ - \sum_n e^{-r(\tau_n + \Delta)} (K + \zeta_n) I_{\{\tau_n + \Delta < \tau_0\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_0} e^{-rt} dZ - \sum_n \int_0^{\infty} \lambda_0 e^{-r(\tau_n + s) - \lambda_0 s} (K + \zeta_n) I_{\{\tau_n + s < \tau_0\}} ds \right], \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $J(x, u)$  可以理解为股东进行股利分配产生的效用的贴现值减去注资效用贴现值的期望, 即股东的净收益.

类似于文献 [22], 我们称策略  $u = (Z, L)$  是可容许的, 如果股利分配过程  $Z(t)$  和注资过程  $L(t)$  满足:

1. 对于任何  $t \geq 0$ ,  $Z(t)$  和  $L(t)$  都是非负的;
2.  $Z(t)$  是右连左极的 (即右连续左极限存在)、非递减且  $\{\mathcal{F}_t\}$ -适应的随机过程;
3.  $\tau_n$  是关于  $\{\mathcal{F}_t\}$ -可测的停时序列, 并且  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$  几乎必然成立;
4.  $\zeta_n$  是  $\mathcal{F}_{\tau_n}$ -可测的;
5. 对所有的  $T > 0$ , 有  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < T) = 0$ ;
6. 对任意  $x$  和可容许策略  $u = (Z, L)$ , 都有  $J(x, u) < \infty$ , 其中  $J(x, u)$  是 (1) 式定义的函数.

另外, 我们假设可容许控制  $u$  满足:

- a. 对所有的  $n \geq 1$ ,  $\tau_{n+1} - \tau_n \geq \Delta$ ;
- b. 对所有的  $t \in [\tau_n, \tau_n + \Delta]$ ,  $n \geq 1$ ,  $dZ(t) = 0$ .

条件 a 告诉我们, 在前一次注资的等待期间内不允许进行新的注资. 条件 b 表明在注资的等待期间不允许进行分红.

假设  $A$  是所有可容许策略的集合, 定义值函数:

$$V(x) := \sup_{u \in A} J(x, u)$$

$$= \sup_{u \in A} \left[ \int_0^{\tau_0} e^{-rt} dZ - \sum_n \int_0^{\infty} \lambda_0 e^{-r(\tau_n+s)-\lambda_0 s} (K + \zeta_n) I_{\{\tau_n+s < \tau_0\}} ds \right]. \quad (2)$$

本文的目标是找到最优的控制策略  $u$  使得性能函数  $J(x)$  达到最大. 应用随机控制的知识, 可以求得最优股利分配和注资策略, 并得到值函数的表达式. 由于值函数  $V(x)$  和最优的控制策略  $u$  的计算依赖于拟变分不等式 (Quasi Variational Inequality, 以下缩写为 QVI), 我们首先来推导值函数  $V(x)$  满足的 QVI.

对所有的  $V(x) \in C^2(R)$ , 定义微分算子  $L$ :

$$LV(x) = (c - \lambda\mu)V_x(x) + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2V_{xx}(x) - rV(x), \quad (3)$$

其中  $V_x$  和  $V_{xx}$  分别表示关于  $x$  的一阶导数和二阶导数. 对于 (3) 式, 在初始值  $x$  邻域一个小的开区间内不进行任何干预 (即既不进行股利分配也不进行注资) 是最优的. 假设第一次索赔发生在较小的时间间隔  $[0, h]$  内, 并且在这个小间隔中既不发生股利分配也不发生注资, 那么  $X_\Delta$  满足随机微分方程:

$$dX(t) = (c - \lambda\mu) dt + \sigma\lambda^{1/2}dW(t), \quad X(0) = x.$$

由可积性条件, 我们定义算子:

$$\begin{aligned} MV(x) &= E_x \left[ e^{-r\Delta} \sup_{s \geq 0} \{V(x_\Delta + s) - s - K\} I_{\{\tau_0 > \Delta\}} \right] \\ &= E_x \left[ \int_0^{\infty} \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \sup_{v \geq 0} \{V(x_v + s) - s - K\} I_{\{\tau_0 > v\}} dv \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

如果 (2) 式中定义的值函数足够光滑, 应用动态规划原理, 可以得到 QVI:

$$\max_u \{LV(x), 1 - V_x(x), MV(x) - V(x)\} = 0. \quad (5)$$

**定理 2** 我们称一个递增的凹函数  $V \in C^1 : [0, \infty) \rightarrow R$  是 QVI (5) 式的解, 如果对所有的  $x \geq 0$ , 都有

$$LV(x) \leq 0, \quad (6)$$

$$MV(x) \leq V(x), \quad (7)$$

$$1 - V'(x) \leq 0, \quad (8)$$

$$LV(x)[MV(x) - V(x)][1 - V'(x)] = 0. \quad (9)$$

由于 (6)–(9) 式与 (5) 式是等价的. 想要证明 (5) 式, 只需证明 (6)–(9) 式成立. 证明类似于文献 [22] 中附录 A, 此处略去.

类似于文献 [22], 对于所有的  $x \geq 0$ , 我们观察到 QVI 的解将区间  $[0, \infty)$  分为三个区域:

连续区域:  $C := \{LV(x) = 0, 1 < V_x(x), MV(x) < V(x)\}$ ;

分红区域:  $D := \{LV(x) < 0, 1 = V_x(x), MV(x) < V(x)\}$ ;

注资区域:  $I := \{LV(x) < 0, 1 < V_x(x), MV(x) = V(x)\}$ .

给出 QVI 方程 (5) 式的一个解, 那么我们就可以定义一个脉冲控制下的可容许策略.

当保险公司没有足够的偿付能力来维持业务时, 将会考虑注资. 为了使公司持续运营, 当  $x = 0$  时, 注资一定发生. 直观地说, 在没有注资延迟时, 在注资区域的边界上, 值函数满足

$$M'V(x) = \sup_{s \geq 0} \{V(x+s) - s - K\},$$

则最优支付或值函数  $V(x)$  在注资的瞬间不会为零, 这可以始终保证公司资本结构的稳定性 (参见文献 [23]). 然而, 由于受到资本注资延迟的影响, 当持有资本注入时剩余资金达到零, 公司将违反资本充足率. 因此, 考虑到资本注入的时间延迟, 我们将得到边界条件:

$$V(0) = 0. \quad (10)$$

此外, 当盈余足够低时, 注资也会发生. 注资的发生取决于盈余过程的状态, 并且会导致注资区域边界的变化.

我们考虑带有随机延迟注资的分红策略, 结合 (5) 式和 (10) 式, 得到具有边界条件的 QVI:

$$\max_u \{LV(x), 1 - V_x(x), MV(x) - V(x)\} = 0, \quad V(0) = 0. \quad (11)$$

**注记 3** 值函数  $V(x)$  不一定是光滑的, 事实上, 值函数的二阶导数并不总是连续的. 在找不到 QVI 的经典解时, 可以考虑 (11) 式的粘性解.

## §4. 模型的求解

### 1) 求解拟变分不等式

为了求解拟变分不等式, 我们首先假设解的一般形式. 当盈余处于在不同的区间时, 我们可以得到相应解的表达式. 参考文献 [23], 我们考虑带有资本注资的分红策略. 决策者在盈余没有达到下界前不采取任何策略, 只有当盈余达到下界时才会进行资本注资. 当盈余达到上界时, 保险公司会进行立即分红. 也就是说, 假设存在将这三个区域分开的两个阈值  $b_1$  和  $b_2$ , 其中  $0 < b_1 < b_2 < \infty$ . 所求的解应满足如下条件:

1. 当  $x \in [0, b_1)$  时, 注资是最佳的;
2. 当  $x \in [b_1, b_2)$  时, 既不进行注资, 也不进行分红;
3. 当  $x \in [b_2, \infty)$  时, 将超出的部分盈余进行分红.

在 (11) 式中, 我们希望找到满足上一节中 QVI 每个分量的函数. 由注记 3 知, 这个函数应满足在控制边界  $b_1$  处连续可微, 且在控制边界  $b_2$  处连续二次可微.

我们首先来构造连续区域的解. 由于连续区域和分红区域并没有涉及到随机延时, 与文献 [22] 相同, 不妨假设  $f(x; b_2)$  是连续区域中的解. 此时, 我们有

$$\frac{1}{2}\lambda\sigma^2 V_{xx}(x) + (c - \lambda\mu)V_x(x) - rV(x) = 0. \quad (12)$$

易知 (12) 式的解为

$$f(x; b_2) = m_1 e^{d_+ x} + m_2 e^{d_- x}, \quad (13)$$

其中

$$d_{\pm} = \frac{-(c - \lambda\mu) \pm \sqrt{(c - \lambda\mu)^2 + 2r\lambda\sigma^2}}{\lambda\sigma^2}.$$

此外, 分红区域的解满足

$$1 = V_x(x), \quad (14)$$

则分红区域的解  $g(x; b_2)$  为

$$g(x; b_2) = x + a.$$

基于解的形式可知,  $b_2$  是区分连续区域和分红区域的阈值. 因此,  $b_2$  处的解应同时满足 (12) 式和 (14) 式. 另一方面, 由于  $g(x; b_2)$  在  $b_2$  处是二次连续可微的, 则有  $f_x(b_2; b_2) = 1$ ,  $f_{xx}(b_2; b_2) = 0$ . 根据这些边界条件和 (13) 式可得到

$$f(x; b_2) = a_1 e^{-d_+(b_2-x)} + a_2 e^{-d_-(b_2-x)}, \quad (15)$$

其中

$$a_1 = \frac{d_-}{d_+(d_- - d_+)} > 0, \quad a_2 = \frac{d_+}{d_-(d_+ - d_-)} < 0.$$

另外, 将  $f_x(b_2; b_2) = 1$  和  $f_{xx}(b_2; b_2) = 0$  代入 (12) 式可得

$$f(b_2; b_2) = \frac{c - \lambda\mu}{r}. \quad (16)$$

此外, 根据  $b_2$  处的边界条件,  $g(x; b_2)$  变为

$$g(x; b_2) = x + \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2. \quad (17)$$

**注记 4** 由于随机延时只发生在注资过程中, 只会对注资区域值函数的表达式产生影响, 因此这里在连续区域和分红区域值函数的表达式与文献 [22] 中的表达式一致.

最后, 我们求注资区域值函数的解. 假设  $h(x; b_2)$  是一个凹函数并且满足  $V_x(x; b_2)|_{x=b_2} = 1$  和 (16) 式. 由凹函数的性质易知当  $s = b_2 - X_\Delta$  时,  $h(x; b_2)$  达到最大值. 因此, (4) 式可简化为

$$\begin{aligned} h(x; b_2) &= \mathbb{E}_x[e^{-r\Delta}[V(b_2; b_2) - b_2 + X_\Delta - K]I_{\{\tau_0 > \Delta\}}] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left(X_v + \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K\right) I_{\{\tau_0 > v\}} dv\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

记  $\gamma = (c - \lambda\mu)/r - b_2 - K$ , 其中参数  $\gamma$  可解释为资本注资的收益. 表达式 (18) 可进一步简化为

$$\begin{aligned} h(x; b_2) &= \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} (X_v + r) I_{\{\tau_0 > v\}} dv\right] \\ &= \mathbb{E}_{x+\gamma}\left[\int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} X_v I_{\{\tau_\gamma > v\}} dv\right], \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\tau_\gamma = \inf\{t \geq 0 : X(t) = \gamma\}$ . 定义马尔科夫转移概率密度函数  $p(v, x + \gamma, y)$ ,  $y \in [0, \infty)$ , 它是初始状态为  $x + \gamma$  的吸收过程  $X_{v \wedge \tau_\gamma}$  的密度函数(见文献 [22]), 则

$$\begin{aligned} p(v, x + \gamma, y) &= \varphi(y, (c - \lambda\mu)v + x + \gamma, \sigma\lambda^{1/2}\sqrt{v}) \\ &\quad - \exp\left(-\frac{2(c - \lambda\mu)x}{\sigma^2}\right) \varphi(y, (c - \lambda\mu)v - x + \gamma, \sigma\lambda^{1/2}\sqrt{v}), \end{aligned}$$

其中,  $\varphi(y, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$  表示均值为  $\hat{\mu}$ , 标准差为  $\hat{\sigma}$  的正态分布的密度函数, 即

$$\varphi(y, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - \hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right).$$

因此, 根据 (19) 可得

$$\begin{aligned} h(x; b_2) &= \mathbb{E}_{x+\gamma}\left[\int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} X_v I_{\{\tau_\gamma > v\}} dv\right] \\ &= \mathbb{E}_{x+\gamma}\left[\int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} X_{v \wedge \tau_\gamma} I_{\{\tau_\gamma > v\}} dv\right] \\ &= \int_0^\infty \int_\gamma^\infty \lambda_0 y e^{-(r+\lambda_0)v} p(v, x + \gamma, y) dv dy. \end{aligned}$$

最后, 我们可以得到如下函数:

$$h(x; b_2) = \int_0^\infty \lambda_0 e^{-\lambda_0 v} h_1(x, v; b_2) dv, \quad (20)$$

其中

$$h_1(x, v; b_2) = e^{-rv} \left\{ \left[ x + (c - \lambda\mu)v + \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K \right] \phi\left(\frac{x + (c - \lambda\mu)v}{\sigma\lambda^{1/2}\sqrt{v}}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v} \varphi \left( \frac{x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) - \exp \left( - \frac{2(c - \lambda \mu)x}{\lambda \sigma^2} \right) \\
& \times \left\{ \left[ -x + (c - \lambda \mu)v + \frac{c - \lambda \mu}{r} - b_2 - K \right] \phi \left( \frac{-x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) \right. \\
& \left. + \sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v} \varphi \left( \frac{-x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

其中  $\phi(x)$  和  $\varphi(x)$  分别表示累积标准正态分布和密度函数. 显然,  $h(0; b_2) = 0$ .

另一方面, 资本注资区域  $b_1$  边界上函数  $h(x; b_2)$  的边界条件可以表示为

$$h(b_1; b_2) = f(b_1; b_2), \quad (21)$$

$$\frac{\partial h(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=b_1} = \frac{\partial f(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=b_1}. \quad (22)$$

由于 QVI 的非线性性, 很难得到边界  $b_1$  和  $b_2$  的显式表达式. 然而, 我们可以利用 Matlab 编程, 根据 (21) 式和 (22) 式的条件, 在可允许误差内, 求得  $b_1$  和  $b_2$  的解. 下文中我们验证了在某些条件下  $b_1$  和  $b_2$  的存在性. 结合 (15)、(17) 和 (20) 式, 如果存在  $b_1$  和  $b_2$ , 则值函数  $V(x)$  可以写为

$$V(x) = \begin{cases} h(x; b_2), & \text{if } 0 \leq x < b_1; \\ f(x; b_2), & \text{if } b_1 \leq x < b_2; \\ g(x; b_2), & \text{if } b_2 \leq x < \infty. \end{cases} \quad (23)$$

**注记 5** 由于资本注资可能受到随机延迟的影响, 因此这里注资区域值函数的表达式  $h(x; b_2)$  与文献 [22] 中的表达式有所差异. 当盈余小于  $b_1$  时,  $h(x; b_2)$  中求解了当随机延迟服从参数为  $\lambda_0$  的指数分布时的情形, 同时给出了显式表达式. 在下文中我们对固定延迟与随机延迟两种情形下的结果进行了比较.

## 2) 验证性定理

本节中我们验证连续区域边界  $b_1$  和  $b_2$  的存在, 并且给出在一般条件下验证  $b_1$  和  $b_2$  存在性的充分条件. 此外, 我们验证了 (23) 式中定义的值函数就是 (11) 式的解. 为了证明这个定理, 我们需要给出如下几个重要的引理.

**引理 6** 令  $q(x, t) = P(\tau_0 \leq t | X(0) = x)$ , 则

$$E_x[X_v I_{\{\tau_0 > v\}}] = x + (c - \lambda \mu)v - (c - \lambda \mu) \int_0^v q(x, t) dt.$$

证明参见文献 [22] 中引理 A.1.

**引理 7** 如果  $\gamma \geq 0$ , 那么对于所有的  $x > 0$ ,

$$\frac{\partial h(x; b_2)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 h(x; b_2)}{\partial x^2} < 0.$$

**证明:** 根据 (19) 式,

$$\begin{aligned} h(x; b_2) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} (X_v + \gamma) I_{\{\tau_0 > v\}} dv \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} X_v I_{\{\tau_0 > v\}} dv \right] + \mathbb{E}_x [e^{-r\Delta} X_\Delta I_{\{\tau_0 > \Delta\}}] \\ &= \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \gamma [1 - q(x, v)] dv + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} X_v I_{\{\tau_0 > \Delta\}} dv \right] \\ &= \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \gamma [1 - q(x, v)] dv + \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \mathbb{E}_x [X_v I_{\{\tau_0 > \Delta\}}] dv \\ &= \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \gamma [1 - q(x, v)] dv \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ x + (c - \lambda\mu)v - (c - \lambda\mu) \int_0^v q(x, t) dt \right] dv. \end{aligned}$$

$h(x; b_2)$  的一阶导数和二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x; b_2)}{\partial x} &= - \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \gamma \frac{\partial q(x, v)}{\partial x} dv + \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} dv \\ &\quad - (c - \lambda\mu) \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ \int_0^v \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dt \right] dv, \\ \frac{\partial^2 h(x; b_2)}{\partial x^2} &= - \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \gamma \frac{\partial^2 q(x, v)}{\partial x^2} dv \\ &\quad - (c - \lambda\mu) \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ \int_0^v \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} dt \right] dv. \end{aligned}$$

由于  $q(x, t) = P(\tau_0 \leq t | X(0) = x)$  满足 Kolmogorov 向后方程并且其导数满足

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} > 0,$$

我们得到, 当  $\gamma > 0$  时,

$$\frac{\partial h(x; b_2)}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 h(x; b_2)}{\partial x^2} < 0.$$

证毕.  $\square$

引理 7 表明了注资区域的价值函数  $h(x; b_2)$  是凹函数. 现在我们考虑连续区域上正的边界, 与文献 [22] 相同, 我们定义函数  $\tilde{f}(x, b)$ :

$$\tilde{f}(x, b) = a_1 e^{-d+(b-x)} + a_2 e^{-d-(b-x)},$$

其中  $d_+$  与  $d_-$  由 (13) 式给定. 考虑一个正的边界  $b_0$ , 并且满足  $\tilde{f}(0, b_0) = 0$ , 则易得

$$b_0 = \frac{2}{d_+ - d_-} \ln \left( -\frac{d_-}{d_+} \right).$$

**引理 8** 如果  $b_2$  和  $b_0$  如前文定义, 则

$$\max(b_2, b_0) < (c - \lambda\mu)r.$$

证明参见文献 [22] 中引理 A.3.

**引理 9** 对于所有的  $b_2 \in (0, b_0]$ , 都有

$$h(x; b_2) < g(x; b_2) = \frac{c - \lambda\mu}{r} + x - b_2.$$

**证明:** 由 (18) 式、引理 6 和引理 7 可得

$$\begin{aligned} h(x; b_2) &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-r\Delta} \left( X_\Delta + \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K \right) I_{\{\tau_0 > \Delta\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x [e^{-r\Delta} X_\Delta I_{\{\tau_0 > \Delta\}}] + \mathbb{E}_x \left[ e^{-r\Delta} \left( \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K \right) I_{\{\tau_0 > \Delta\}} \right] \\ &= \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ x + (c - \lambda\mu)v - (c - \lambda\mu) \int_0^v q(x, t) dt \right] dv \\ &\quad + \left( \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K \right) \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} [1 - q(x, v)] dv \\ &= \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left\{ x + (c - \lambda\mu)v - (c - \lambda\mu) \int_0^v q(x, t) dt \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 - K \right) [1 - q(x, v)] \right\} dv \\ &\leq \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ \frac{c - \lambda\mu}{r} + x + (c - \lambda\mu)v - b_2 \right. \\ &\quad \left. - (c - \lambda\mu) \int_0^v q(x, t) dt - \left( \frac{c - \lambda\mu}{r} - b_2 \right) q(x, v) \right] dv \\ &\leq \int_0^\infty \lambda_0 e^{-(r+\lambda_0)v} \left[ \frac{c - \lambda\mu}{r} + x + (c - \lambda\mu)v - b_2 \right] dv \\ &\leq \left( \frac{c - \lambda\mu}{r} + x - b_2 \right) \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + r} \\ &\leq \frac{c - \lambda\mu}{r} + x - b_2 = g(x; b_2). \end{aligned}$$

因此, 验证了不等式.  $\square$

定义双变量函数  $\tilde{h}(x, b)$ :

$$\tilde{h}(x, b) = \int_0^\infty \lambda_0 e^{-\lambda_0 v} \left\{ e^{-rv} \left[ x + (c - \lambda\mu)v + \frac{c - \lambda\mu}{r} - b - K \right] \phi \left( \frac{x + (c - \lambda\mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v} \varphi \left( \frac{x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) - \exp \left( - \frac{2(c - \lambda \mu)x}{\lambda \sigma^2} \right) \\
& \times \left\{ \left[ -x + (c - \lambda \mu)v + \frac{c - \lambda \mu}{r} - b - K \right] \phi \left( \frac{-x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) \right. \\
& \left. + \sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v} \varphi \left( \frac{-x + (c - \lambda \mu)v}{\sigma \lambda^{1/2} \sqrt{v}} \right) \right\} \} \} dv,
\end{aligned}$$

其中  $(x, b) \in R_+ \times R_+$ ,  $\tilde{h}(x, b) = h(x; b_2)$ .

**引理 10** 如果

$$\frac{\partial \tilde{h}(x, b_0)}{\partial x} \Big|_{x=0} > \frac{\partial \tilde{f}(x, b_0)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \gamma \geq 0,$$

那么存在满足 (21)–(22) 式的解  $(b_1, b_2)$ ,  $0 < b_1 < b_2 < b_0$ , 使得对所有的  $0 \leq x \leq b_2$ , 都有  $\tilde{h}(x, b_2) \leq \tilde{f}(x, b_2)$ .

**证明:** 由引理 7、引理 9 以及文献 [22] 中引理 A.5 可直接得证.  $\square$

下面我们给出了本节的主要内容, 即验证性定理.

**定理 11** 假设如引理 10 所定义的满足 (21)–(22) 式的解存在, 并且  $V(x)$  由 (23) 式所定义, 则  $V(x)$  是 (11) 式的一个凹函数解.

**证明:** 首先我们分别证明在三个不同区域中  $V(x)$  都是凹函数. 由文献 [22] 中结论知, 值函数  $V(x)$  在分红区域和连续区域上均为凹函数. 在注资区域中, 引理 7 同样能够保证  $h(x; b_2)$  是凹函数. 进而  $V(x)$  在整个区间上是凹函数. 与文献 [22] 相同, 我们将分成以下四个步骤来证明  $V(x)$  是 (11) 式的解:

步骤 1.  $V(0) = h(0; b_2) = 0$ ;

步骤 2. 当  $x \in [b_2, \infty)$  时, 构造  $V_x(x) = 1$ . 根据  $V(x)$  的凹性, 当  $x \in [0, b_2)$  时,  $V_x(x) > 1$ ;

步骤 3. 当  $x \in [0, b_1)$  时, 构造  $V(x) = h(x; b_2) = MV(x)$ . 根据引理 10, 当  $x \in [b_1, b_2)$  时,  $V(x) = f(x; b_2) \geq h(x; b_2) = M(x)$ . 当  $x \in [b_2, \infty)$  时,  $V(x) = g(x; b_2) > M(x)$ . 因此, 对所有的  $x$ , 有  $V(x) \geq M(x)$ ;

步骤 4. 当  $0 \leq x < b_1$  时,  $V(x) = h(x; b_2)$ . 对于某些  $\varepsilon > 0$ , 定义  $\tau_\varepsilon^* = \tau_\varepsilon \wedge \varepsilon$ , 使得  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in (0, b_1)$  并且  $\tau_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (X(0) - \varepsilon, X(0) + \varepsilon)\}$ . 根据 Dynkin 公式,

$$\mathbf{E}_x[e^{-r\tau_\varepsilon^*} h(X(\tau_\varepsilon^*); b_2)] = h(x; b_2) + \mathbf{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\varepsilon^*} Lh(X(s); b_2) ds \right],$$

其中  $\mathbf{E}_x[e^{-r\tau_\varepsilon^*} h(X(\tau_\varepsilon^*); b_2)]$  表示在  $\tau_\varepsilon^*$  之后发生新的资本注入时的最优支付或值函数的贴现值. 注意到在注资区域中,  $h(x; b_2)$  为最优的值函数. 因此由最优化原理可知

$$\mathbf{E}_x[e^{-r\tau_\varepsilon^*} h(X(\tau_\varepsilon^*); b_2)] \leq h(x; b_2).$$

因此, 在注资区域  $x \in [0, b_1)$  中, 我们有

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\epsilon^*} Lh(X(s)) ds \right] \leq 0,$$

取极限得到

$$LV(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_\epsilon^*]} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_\epsilon^*} Lh(X(s)) ds \right] \leq 0,$$

其中  $x \in [0, b_1)$ . 当  $x \in [b_1, b_2)$  时, 构造  $Lh(x) = 0$ . 当  $x \in [b_2, \infty)$  时,  $V(x) = (c - \lambda\mu)/r + x - b_2$ , 则

$$\begin{aligned} LV(x) &= (c - \lambda\mu)V_x(x) + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2V_{xx}(x) - rV(x) \\ &= c - \lambda\mu - r\left(\frac{c - \lambda\mu}{r} + x - b_2\right) \\ &= r(b_2 - x) \leq 0. \end{aligned}$$

因此, 对所有的  $x$ , 有  $Lh(x) \leq 0$ .

综上所述, (23) 式中的值函数  $V(x)$  满足 QVI (11) 式. 证毕.  $\square$

## §5. 数值模拟

本节中我们应用 Matlab 对前文中所求的显式表达式进行了数值模拟. 在假设分红过程中既没有固定交易成本也没有比例交易成本, 注资过程中没有比例交易成本时, 我们构造 (21) 式描述的值函数. 当保险公司的盈余  $S(t)$  已知, 即索赔额的期望和标准差、保费率均已知的情况下, 我们分析了随机延迟服从不同参数的指数分布对分红边界和注资边界的影响, 并对比了注资延迟服从指数分布时与注资延迟为固定值时值函数的不同趋势.

令索赔额的期望  $\mu = 0.01$ , 标准差  $\sigma = 0.01$ , 保费率  $c = 0.02$ ,  $\lambda = 1$ , 注资固定交易成本  $K = 0.01$  时, 我们讨论了指数分布参数  $\lambda_0$  为不同值时对注资边界  $b_1$  和分红边界  $b_2$  的影响.

首先对边界  $b_1$  和  $b_2$  进行求解, 分别对  $h(x; b_2)$  和  $f(x; b_2)$  关于  $x$  求导. 在假设给定的条件下, 当盈余为  $b_1$  时,  $h(x; b_2)$  和  $f(x; b_2)$  的函数值和一阶导数值均相等, 即

$$\begin{aligned} h(b_1; b_2) &= f(b_1; b_2), \\ \frac{\partial h(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=b_1} &= \frac{\partial f(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=b_1}. \end{aligned}$$

根据这个条件, 我们可以求出当随机延迟服从参数为  $\lambda_0 = 1$  的指数分布时,  $b_1$  和  $b_2$  的解为:

$$b_1 = 0.0069, \quad b_2 = 0.0369.$$

当注资延迟服从参数为  $\lambda_0 = 10$  的指数分布时,  $b_1$  和  $b_2$  的解为:

$$b_1 = 0.0062, \quad b_2 = 0.0321.$$

不妨令贴现因子  $r = 0.04$ . 当  $\lambda_0 = 1$  和  $\lambda_0 = 10$  时, 在最优股利分红策略下, 值函数关于盈余的模拟图像分别如图 1 和图 2 所示.

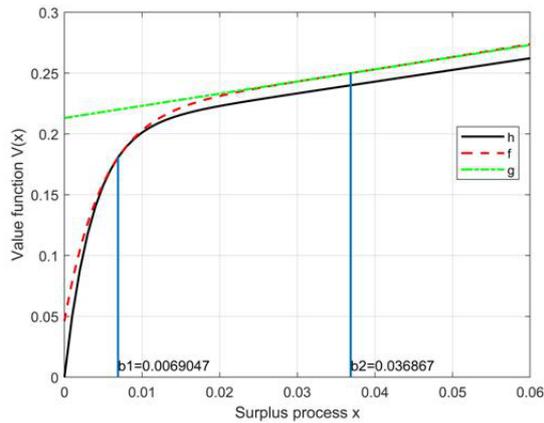


图 1 注资延迟服从参数为 1 的指数分布时的值函数图像

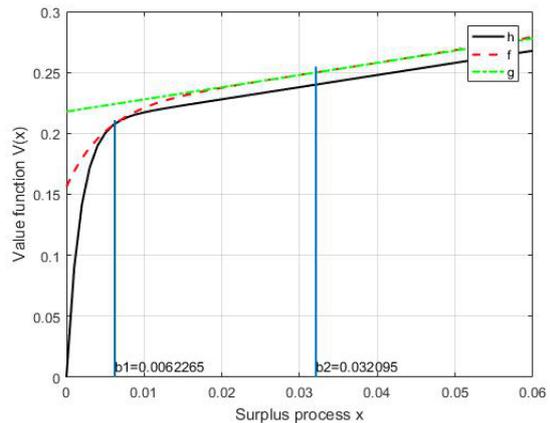


图 2 注资延迟服从参数为 10 的指数分布时的值函数图像

当延迟服从参数为  $\lambda_0 = 1$  的指数分布时, 我们知道此时指数分布的期望为 1. 不妨假设注资延迟为一个固定值  $\Delta$ . 注意到此时分红区域和连续区域的边界与随机延迟情况下相同, 而在注资区域的解为  $h(x; b_2) = h_1(x, \Delta; b_2)$  (见文献 [22]).

假设延迟  $\Delta = 1$ , 我们首先对  $b_1$  和  $b_2$  进行求解. 同样, 根据在注资与连续区域的边界处,  $h$  和  $f$  的函数值相等, 关于  $x$  的一阶导函数相等, 我们可以求出  $b_1$  和  $b_2$  的解:

$$b_1 = 0.0060, \quad b_2 = 0.0379.$$

由于  $\Delta$  为注资延迟, 假设为固定值时, 不宜太大, 当  $\Delta = 0.5$  时,  $b_1$  和  $b_2$  的解为:

$$b_1 = 0.0090, \quad b_2 = 0.0366.$$

根据所得  $b_1$  和  $b_2$  解, 利用 Matlab 编程, 我们可以模拟出值函数  $V(x)$  关于盈余  $x$  的图像. 当  $\Delta = 1$  和  $\Delta = 0.5$  时的图像分别如图 3 和图 4 所示.

比较随机延迟服从  $\lambda_0 = 1$  与固定延迟  $\Delta = 1$  的情形, 根据计算结果可知: 注资边界往前移, 分红边界往后移, 即两者之间的距离变大, 连续区域 (既不进行注资也不进行分红的) 的范围也在增大, 这对于投资保险公司的股民来说更加稳定.

比较随机注资延迟参数服从  $\lambda_0 = 1$  与  $\lambda_0 = 10$  的情形, 由图像可知参数越大, 注资边界和分红边界越小. 具体注资延迟服从的参数为多少, 还需要根据实际情况进行定义. 比较

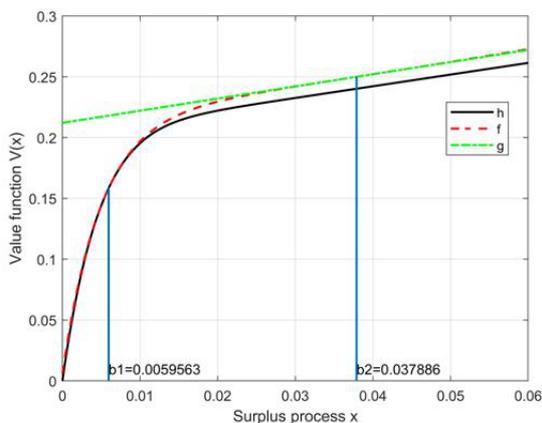


图 3 注资延迟为固定值 1 时的值函数图像

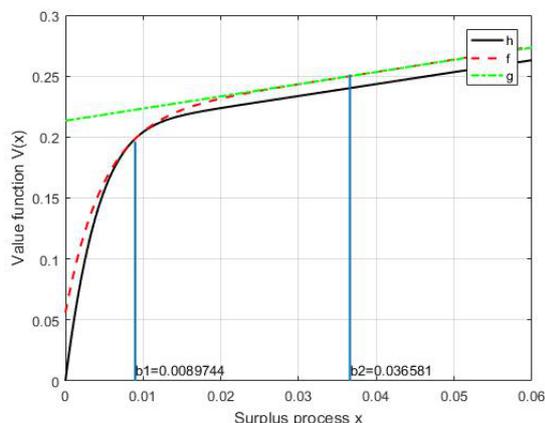


图 4 注资延迟为固定值 0.5 时的值函数图像

注资延迟为固定值 1 与固定值 0.5 的情况, 延迟越大, 注资边界越小, 而分红边界却越大, 符合实际情况.

## §6. 总结与展望

本文考虑了带有随机延迟的最优分红和注资问题. 为了贴合实际, 我们假设当盈余足够低时不马上宣布破产, 而是在某个范围内对其进行注资. 现实情况中, 由于注资的规模不一样等原因导致每次注资需要的时间不固定, 我们假设注资延迟服从参数为  $\lambda_0$  的指数分布. 应用动态规划原理, 我们得到不同区域值函数的表达式. 最后, 数值模拟呈现了不同参数对边界函数以及值函数的影响.

然而, 本文并未对注资延迟服从其他类型的分布进行讨论. 在后续的研究中, 可对这一部分展开讨论, 使得结果更加接近真实情况. 另外, 文中并未得到最优策略的表达式, 这也是将要解决的难点之一.

## 参 考 文 献

- [1] JEANBLANC-PICQUÉ M, SHIRYAEV A N. Optimization of the flow of dividends [J]. *Russian Math Surveys*, 1995, **50(2)**: 257–277.
- [2] HØJGAARD B, TAKSAR M. Controlling risk exposure and dividends payout schemes: insurance company example [J]. *Math Finance*, 1999, **9(2)**: 153–182.
- [3] HØJGAARD B, TAKSAR M. Optimal dynamic portfolio selection for a corporation with controllable risk and dividend distribution policy [J]. *Quant Financ*, 2004, **4(3)**: 315–327.
- [4] BELHAJ M. Optimal dividend payments when cash reserves follow a jump-diffusion process [J]. *Math Finance*, 2010, **20(2)**: 313–325.

- [5] JIN Z, YIN G, ZHU C. Numerical solutions of optimal risk control and dividend optimization policies under a generalized singular control formulation [J]. *Automatica*, 2012, **48(8)**: 1489–1501.
- [6] THONHAUSER S, ALBRECHER H. Optimal dividend strategies for a compound Poisson process under transaction costs and power utility [J]. *Stoch Models*, 2011, **27(1)**: 120–140.
- [7] HE L, LIANG Z X. Optimal financing and dividend control of the insurance company with fixed and proportional transaction costs [J]. *Insurance Math Econom*, 2009, **44(1)**: 88–94.
- [8] YAO D J, YANG H L, WANG R M. Optimal financing and dividend strategies in a dual model with proportional costs [J]. *J Ind Manag Optim*, 2010, **6(4)**: 761–777.
- [9] YAO D J, YANG H L, WANG R M. Optimal dividend and capital injection problem in the dual model with proportional and fixed transaction costs [J]. *European J Oper Res*, 2011, **211(3)**: 568–576.
- [10] DICKSON D C M, WATERS H R. Some optimal dividends problems [J]. *Astin Bull*, 2004, **34(1)**: 49–74.
- [11] ZHU J X. Optimal financing and dividend distribution with transaction costs in the case of restricted dividend rates [J]. *Astin Bull*, 2017, **47(1)**: 239–268.
- [12] 李岩. 经典风险模型中最优分红与注资及最优再保险策略的研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2009.
- [13] 姚定俊, 汪荣明, 徐林. 破产终端值影响下保险公司最优分红、注资和溢额再保险策略 [J]. *中国科学: 数学*, 2017, **47(8)**: 969–994.
- [14] SETHI S P, TAKSAR M I. Optimal financing of a corporation subject to random returns [J]. *Math Finance*, 2002, **12(2)**: 155–172.
- [15] KULENKO N, SCHMIDLI H. Optimal dividend strategies in a Cramér-Lundberg model with capital injections [J]. *Insurance Math Econom*, 2008, **43(2)**: 270–278.
- [16] EISENBERG J, SCHMIDLI H. Optimal control of capital injections by reinsurance in a diffusion approximation [J]. *Bl DGVFM*, 2009, **30(1)**: 1–13.
- [17] 姚定俊, 汪荣明, 徐林. 方差保费准则下最优分红、注资和再保险策略 [J]. *中国科学: 数学*, 2014, **44(10)**: 1123–1140.
- [18] 王翠莲, 刘晓, 徐林. 具有随机观测周期的经典风险模型中最优分红和注资策略 [J]. *应用概率统计*, 2014, **30(6)**: 661–672.
- [19] PEURA S, KEPPO J. Optimal bank capital with costly recapitalization [J]. *J Bus*, 2006, **79(4)**: 2163–2201.
- [20] BAYRAKTAR E, EGAMI M. The effects of implementation delay on decision-making under uncertainty [J]. *Stochastic Process Appl*, 2007, **117(3)**: 333–358.
- [21] EGAMI M, YOUNG V R. Optimal reinsurance strategy under fixed cost and delay [J]. *Stochastic Process Appl*, 2009, **119(3)**: 1015–1034.
- [22] JIN Z, YIN G. An optimal dividend policy with delayed capital injections [J]. *ANZIAM J*, 2013, **55(2)**: 129–150.
- [23] JIN Z, YANG H L, YIN G. Numerical methods for optimal dividend payment and investment strategies of regime-switching jump diffusion models with capital injections [J]. *Automatica*, 2013, **49(8)**: 2317–2329.

# Optimal Dividend and Capital Injection Problem with Random Delay

WANG Hao

*(School of Mathematics and Statistics, Anhui Normal University, Wuhu, 241002, China)*

CHENG Xiaoqiang

*(School of Mathematics and Finance, Anhui Polytechnic University, Wuhu, 241000, China)*

GONG Xiaojie

*(School of Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200062, China)*

**Abstract:** This article considers the optimal dividend policy with delayed capital injections, and assumes that the capital injection delay follows the exponential distribution. We aim to find the optimal dividend and capital injection strategies to maximize the utility of dividend and capital. Since surplus process of the insurance company involves a mixed Poisson process, we use a stochastic differential equation to characterize the surplus process by adopting diffusion approximation techniques, and then we obtain the value function under the utility criterion. When the value function is smooth, the quasi variational inequality is obtained by using the dynamic programming principle. In this paper, we consider the value function from three different regions (the dividend area, the continuous area and the capital injection area). Through the boundary conditions, we derive the expression of the value function in different regions and present the verification theorem. A numerical example is presented to illustrate the effects of the capital injection delay under different parameters.

**Keywords:** optimal dividend strategies; optimal capital injection strategies; dynamic programming principle; quasi variational inequality; verification theorem

**2020 Mathematics Subject Classification:** 62P05; 90B50