应用概率统计　第二十二卷
第四期　2006 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 22 No. 4 Nov. 2006

Erlang(2) 过程的风险分析与美式看跌期权

丁　钊　鹏

(北京联合大学商务学院，北京， 100025)

摘　要

在经典的风险理论中涉及到的索赔风险是服从复合 Poission 过程的，与之不同，我们考虑 Erlang(2) 风险过程．Erlang(2) 分布往往见诸于控制理论中，这里它作为索赔发生间隔时间的分布被引入了．本文中，我们介绍一个与破产时刻、破产前时刻的盈余以及破产时刻赤字有关的辅助函数 $\phi(\cdot)$, 函数中涉及的这三个变量对风险模型的研究都是最基本也是最重要的．Willmot and Lin (1999) 曾在古典连续时间风险模型之中研讨过这一函数．受 Gerber and Shiu (1997) 及 Willmot and Lin (2000) 在古典模型下的研究过程的启发，本文的一个重要结果就是找到破产前时刻的盈余以及破产时刻赤字的联合分布密度函数．更得益于 Gerber and Landry (1998) 及 Gerber and Shiu (1999) 的思想，我们应用以上的结果去寻求基础资产服从一定风险资产价格过程的美式看跌期权最优交易策略．

关 键 词： Erlang(2) 过程，古典风险模型，破产时刻，美式看跌期权．

学 科 分 类 号： O211.9.

§1.　引　　言

在本文中，我们将考虑一个索赔间隔时间服从 Erlang(2) 分布的风险过程．定义一列独立同分布的随机变量 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, 它们共同的密度函数服从 Erlang(2) 密度函数

$$k(t)=\beta^2\cdot t\cdot\exp\{-\beta t\},\qquad t>0,$$

这一列随机变量就代表了索赔发生间隔时间．其中 β 称作 Erlang(2) 参数．因为古典风险模型的索赔发生间隔时间是服从指数分布，上面的假设正是 Erlang(2) 风险模型与古典风险模型差异的根本所在．也因为这个差异，导致对两者采用了不同的研究方法．

另引入一列独立同分布的随机变量 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, 其中 X_i 代表了第 i 个索赔发生之时的索赔大小．以 $P(x)$ 作为随机变量 X_i 的分布函数，同时假设 $P(x)$ 是可微的，而以 $p(x)$ 作为个体索赔额的概率密度函数，以 m_k 作为 X_i 的 k 次矩 $E(X_i^k)$.

考虑一家保险公司，并以 $U(t)$ 表示该公司在时刻 $t\ge0$ 时刻的盈余．记 $U(0)=u$ 为初始盈余，则盈余过程 $\{U(t)\}_{t\ge0}$ 可以表示为：

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i,\qquad t\ge0,\tag{1}$$

其中： c 是一常数，它表示单位时间内收到的保费，而且 $c\cdot E(T_i)>E(X_i)$ 这个条件对任意的 i 都满足，即 $2c/\beta>m_1$, 这一假设保证了此过程的非平凡性；计数过程 $\{N(t)\}_{t\ge0}$ 表示至 t 时刻为止索赔发生的个数．

本文 2003 年 2 月 14 日收到．

由上面的盈余过程，可以派生出另两个过程 $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{U'_n\}_{n=0}^{\infty}$, 其中 U_0 和 U'_0 等同于同一个初始值 u, U_n 表示当第 n 个索赔发生之时的盈余值，而 U'_n 则表示第 n 个索赔发生前一时刻之盈余值．于是这两个派生过程可以由下面的方程式所刻画：

$$\begin{cases} U'_n = u + c\sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{n-1} X_i, & n = 1, 2, \cdots; \\ U_n = u + c\sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{n} X_i, & n = 0, 1, 2, \cdots; \\ U'_0 = U_0 = u. \end{cases}$$

显而易见， $\{(U'_n, U_n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个马氏过程．

令

$$T = \begin{cases} \inf\{t | U(t) < 0\}; \\ \infty, \qquad \text{if } U(t) \geq 0, \text{ 任意 } t > 0, \end{cases}$$

它表示破产发生的时刻；令 $\psi(u) = \mathsf{P}(T < \infty | U(0) = u)$, 它表示破产发生的概率．与破产时刻相关联的有两个非负随机变量，一个是破产前盈余值 $U(T-)$, 另一个就是破产时刻的赤字．细节的描述请参见 Browers et al. (1997, ch. 13) 或者 De Vylder (1996, Part I, ch. 7).

有以上的准备，我们引入一个惩罚函数 $\phi(u)$, 它的表达式联系着一个非负函数 $\omega(x_1, x_2)$, $0 < x_1$, $x_2 < \infty$, 具体形式如下：

$$\phi(u) = \mathsf{E}[e^{-\delta T} \omega(U(T-), |U(T)|) 1_{\{T<\infty\}} | U(0) = u],$$

其中参数 $\delta \geq 0$, $1_{\{\cdot\}}$ 是指示函数．在古典风险模型的假设之下， Willmot and Lin (1999) 与 Willmot and Lin (2000) 曾研究过此函数．当 $\omega(\cdot, \cdot) \equiv 1$ 之时， Dickson and Hipp (2001) 曾在 Erlang(2) 风险模型之下研究过它．

对于一般的 $\omega(\cdot, \cdot)$, 我们可以得到 $\phi(u)$ 所满足的一个积分微分方程．然后, 通过它找到 $\phi(u)$ 的 Laplace 变换形式．接下来，就可以得到 $\phi(0)$ 的一般表达形式．下一步，对几个特殊的但与后面的应用息息相关的 $\omega(\cdot, \cdot)$ 形式，将之带入 $\phi(0)$ 之中获得几个特殊的表达式．至此， $U(T-)$ 与 $|U(T)|$ 的联合分布密度函数的获取已近在咫尺了，这也是我们在本文中预期的一个重要结果.

文章的第二个部分主要的结果是：通过假设美式看跌期权基础资产价格的对数服从上述的盈余过程，我们将第一部分所获得的一些显著结论付诸于求取期权最优交易策略的边界交割价格之中．

§ 2. $\phi(u)$ 积分微分方程

这一节，我们将推导出 $\phi(u)$ 所满足的积分微分方程．由于与古典风险模型在索赔间隔时间分布之上的显著差别，导致在古典风险模型中典型的推导过程在 Erlang(2) 风险模型中已然失效，因此，一个全然不同的推导方法介入其中．

定理 2.1 $\phi(u)$ 的积分微分方程式可以表达为

$$\begin{aligned} & c^2\phi''(u)-2(\beta+\delta)c\phi'(u)+(\beta+\delta)^2\phi(u) \\ = & \beta^2\int_0^u\phi(u-x)\mathrm{d}P(x)+\beta^2\int_u^\infty\omega(u,x-u)\mathrm{d}P(x). \end{aligned} \tag{2}$$

证明: 考虑第一次索赔发生的时刻 T_1 与索赔额 X_1 这两个随机变量. 倘若索赔的大小 $X_1=x$ 不超过 $u+cT_1$, 则 $T_1<T$; 否则, T_1 正是破产时刻 T, 即索赔额 x 已逾越 $u+cT_1$ 这一界限了. 于是

$$\begin{aligned} \phi(u) = & \int_0^\infty k(T_1)e^{-\delta T_1}\int_0^{u+cT_1}\phi(u+cT_1-x)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}T_1 \\ & +\int_0^\infty k(T_1)e^{-\delta T_1}\int_{u+cT_1}^\infty\omega(u+cT_1,x-(u+cT_1))\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}T_1. \end{aligned}$$

在右侧的两个积分之中, 作 T_1 到 $s=u+cT_1$ 的变量替换, 于是

$$\begin{aligned} \phi(u) = & \frac{1}{c}\int_u^\infty k\Big(\frac{s-u}{c}\Big)e^{-\delta((s-u)/c)}\int_0^s\phi(s-x)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s \\ & +\frac{1}{c}\int_u^\infty k\Big(\frac{s-u}{c}\Big)e^{-\delta((s-u)/c)}\int_s^\infty\omega(s,x-s)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

然后, 对两边求 u 的一阶导数, 可得到

$$\begin{aligned} c\phi'(u) = & -\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\Big(\frac{s-u}{c}\Big)e^{-\delta((s-u)/c)}\int_0^s\phi(s-x)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s \\ & -\frac{1}{c}\int_u^\infty k'\Big(\frac{s-u}{c}\Big)e^{-\delta((s-u)/c)}\int_s^\infty\omega(s,x-s)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s+\delta\phi(u) \\ = & -\frac{1}{c}\int_u^\infty\beta^2\exp\Big\{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}\Big\}\int_0^s\phi(s-x)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s \\ & -\frac{1}{c}\int_u^\infty\beta^2\exp\Big\{-\frac{(\beta+\delta)(s-u)}{c}\Big\}\int_s^\infty\omega(s,x-s)\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}s+(\beta+\delta)\phi(u). \end{aligned}$$

之后再对两边求 u 的导数, 可得

$$c\phi''(u)=\frac{\beta^2}{c}\int_0^u\phi(u-x)\mathrm{d}P(x)+\frac{\beta^2}{c}\int_u^\infty\omega(u,x-u)\mathrm{d}P(x).$$

上面的结果正是定理结论的一个变形. #

§3. Laplace 变换与联合分布密度函数

对于任意一个函数 $\zeta(\cdot)$, 其 Laplace 变换可以通过以下的式子表达为: $\zeta^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\zeta(x)\mathrm{d}x$. 则个体索赔额分布函数 $P(x)$ 的 Laplace 变换可以写作 $p^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}P(x)$.

引理 3.1 假设 δ 是严格正的常数, 定义 $\eta(s)=c^2s^2-2(\beta+\delta)cs+(\beta+\delta)^2$, 于是方程 $\eta(\lambda_i)=\beta^2p^*(\lambda_i)$, $i=1,2$ 存在两个正解 λ_1 与 λ_2, 且 $\lambda_1<(\beta+c)/\delta<\lambda_2$.

证明：既然 $\eta(s)=(cs-(\beta+\delta))^2$，则 $\eta(s)$ 在 $s=(\beta+\delta)/c$ 取得最小值．又由于 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)p^*(s)=-\int_0^\infty xe^{-sx}\mathrm{d}P(x)$ 是负值，易知，对 $s>0$，$\eta(s)$ 将与 $\beta^2p^*(s)$ 交于两个不同的点 λ_1 与 λ_2，而且 $\lambda_1<(\beta+c)/\delta<\lambda_2$． #

定义 $q(x)=\int_x^\infty \omega(x,z-x)\mathrm{d}P(z)$，则 $q^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty \omega(x,z-x)\mathrm{d}P(z)\mathrm{d}x$.

定理 3.1 根据 $q^*(\cdot)$ 的定义，$\phi^*(s)$ 可以如下地写出来：

$$\phi^*(s)=\frac{\beta^2\cdot[q^*(s)(\lambda_2-\lambda_1)+q^*(\lambda_1)(s-\lambda_2)+q^*(\lambda_2)(\lambda_1-s)]}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\eta(s)-\beta^2p^*(s))},$$

特别地

$$\phi(0)=\frac{\beta^2(q^*(\lambda_1)-q^*(\lambda_2))}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)} \tag{3}$$

证明：由 $\phi^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\phi(x)\mathrm{d}x$，可得

$$\int_0^\infty e^{-sx}\phi'(x)\mathrm{d}x=s\phi^*(s)-\phi(0) \qquad \text{及} \qquad \int_0^\infty e^{-sx}\phi''(x)\mathrm{d}x=s^2\phi^*(s)-s\phi(0)-\phi'(0).$$

对 (2) 式求 Laplace 变换

$$\begin{aligned}&c^2(s^2\phi^*(s)-s\phi(0)-\phi'(0))-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot(s\phi^*(s)-\phi(0))+(\beta+\delta)^2\phi^*(u)\\ =\ &\beta^2\phi^*(s)p^*(s)+\beta^2q^*(s).\end{aligned}$$

通过移项与合并可知

$$\begin{aligned}\phi^*(s)&=\frac{c^2\phi(0)\cdot s+c^2\phi'(0)-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot\phi(0)+\beta^2q^*(s)}{c^2s^2-2(\beta+\delta)cs+(\beta+\delta)^2-\beta^2p^*(s)}\\ &=\frac{c^2\phi(0)\cdot s+c^2\phi'(0)-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot\phi(0)+\beta^2q^*(s)}{\eta(s)-\beta^2p^*(s)}.\end{aligned} \tag{4}$$

由引理 3.1 知，λ_1 与 λ_2 是 (4) 式分母的两个零点，即 $\eta(\lambda_i)=\beta^2p^*(\lambda_i)$，$i=1,2$. 于是这两个点也一定是式 (4) 分子的两个零点．因此

$$\begin{cases}c^2\lambda_1\phi(0)+c^2\phi'(0)-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot\phi(0)+\beta^2q^*(\lambda_1)=0;\\ c^2\lambda_2\phi(0)+c^2\phi'(0)-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot\phi(0)+\beta^2q^*(\lambda_2)=0.\end{cases}$$

通过合并上面的方程组，得到

$$\phi(0)=(\beta^2(q^*(\lambda_1)-q^*(\lambda_2)))/(c^2(\lambda_2-\lambda_1)).$$

将等式 $c^2\lambda_1\phi(0)+c^2\phi'(0)-2(\beta+\delta)\cdot c\cdot\phi(0)+\beta^2q^*(\lambda_1)=0$ 与 $\phi(0)$ 的表达式代入式 (4) 就获得了最终的结果

$$\begin{aligned}\phi^*(s)&=\frac{c^2\phi(0)\cdot(s-\lambda_1)+\beta^2(q^*(s)-q^*(\lambda_1))}{\eta(s)-\beta^2p^*(s)}\\ &=\frac{\beta^2\cdot[q^*(s)(\lambda_2-\lambda_1)+q^*(\lambda_1)(s-\lambda_2)+q^*(\lambda_2)(\lambda_1-s)]}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\eta(s)-\beta^2p^*(s))}.\end{aligned} \qquad \#$$

3.1 几个特殊 $\omega(\cdot,\cdot)$ 函数的 $\phi(0)$ 估值

对于初始盈余 $U(0)=u\geq 0$ 的盈余过程，令 $f(x,y,t|u)$ 表示 $U(T-)$ 、 $|U(T)|$ 与 T 的联合概率密度函数．同时记 $f(x,y|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\cdot f(x,y,t|u)\mathrm{d}t$. 于是对于 $\delta\geq 0$

$$\psi(u)=\mathrm{P}(T<\infty|U(0)=u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y,t|u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

与

$$\begin{aligned}\phi(u)&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}\cdot\omega(x,y)\cdot f(x,y,t|u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\omega(x,y)\cdot f(x,y|u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

皆成立．

接下来，对于以下几个与后面的应用紧密联系的特殊 $\omega(\cdot,\cdot)$ 函数，我们可以通过 (3) 式对 $\phi(0)$ 进行估值．

(a) 对任意给定的正实数 x 与 y, $\omega(s,z)=\begin{cases}1 & \text{如果 } 0<s\leq x,\ 0<z\leq y\\0 & \text{否则}\end{cases}$, 于是

$$\int_0^x\mathrm{d}s\int_0^y f(s,z|0)\mathrm{d}z=\phi(0)=\frac{\beta^2\Big(\int_0^x(e^{-\lambda_1 s}-e^{-\lambda_2 s})\int_s^{s+y}\mathrm{d}P(z)\mathrm{d}s\Big)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

可以得到

$$f(x,y|0)=\frac{\partial^2\Big(\int_0^x\mathrm{d}s\int_0^y f(s,z|0)\mathrm{d}z\Big)}{\partial x\partial y}=\frac{\beta^2(e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 x})p(x+y)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}.\tag{5}$$

记 $g(y)=\int_0^\infty f(x,y|0)dx$, 则 $g(y)dy$ 可以解释为盈余第一次跌至初始盈余 u 之下，且此时的盈余值处于 $u-y$ 与 $u-y-dy$ 之间的折扣概率；或解释为初始盈余为 0, 破产发生之时的赤字处于 y 与 $y-dy$ 之间的折扣破产概率．

(b) 对于任意给定的正实数 y, $\omega(x,z)=\begin{cases}1 & \text{如果 } 0<z\leq y,\ 0<x<\infty\\0 & \text{否则}\end{cases}$, 令

$$G(y)=\phi(0)=\frac{\beta^2\Big(\int_0^\infty(e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 x})\int_x^{x+y}\mathrm{d}P(z)\mathrm{d}x\Big)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)},$$

于是

$$\begin{aligned}g(y)=G'(y)&=\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\frac{d\Big(\int_0^\infty(e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 x})\int_x^{x+y}\mathrm{d}P(z)\mathrm{d}x\Big)}{\mathrm{d}y}\\&=\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\int_y^\infty(e^{-\lambda_1(x-y)}-e^{-\lambda_2(x-y)})\mathrm{d}P(x).\end{aligned}\tag{6}$$

(c) 令 $\omega(x,z)\equiv 1,\ 0<x,\ z<\infty$, 于是

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[e^{-\delta T}|U(0)=0] &= \mathsf{E}[e^{-\delta T}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]=\phi(0)\\ &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\int_0^\infty(e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 x})\int_x^\infty \mathrm{d}P(z)\mathrm{d}x\Big)\\ &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big).\end{aligned}\tag{7}$$

上面的 $\phi(0)$ 可以解释为当盈余跌落至初始盈余 u 以下这一事件发生之时一单位罚金的折现值；或者解释为初始盈余为 0 的折扣破产概率.

下面考虑初始盈余为 0 的破产概率.

除 0 之外, 令 λ 作为 $c^2s^2-2\beta^2\cdot c\cdot s+\beta^2=\beta^2p^*(s)$ 另一解. 于是当 $\delta\to 0$ 之时, $\begin{cases}\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to\lambda\end{cases}$.

可得

$$\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to 0}\Big(\dfrac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}\Big)=\lim\limits_{\lambda_1\to 0}\Big(\dfrac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}\Big)=m_1;\\ \lim\limits_{\delta\to 0}\Big(\dfrac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)=\lim\limits_{\delta\to 0,\lambda_2\to 0}\Big(\dfrac{\beta^2-[c^2\lambda_2^2-2(\beta+\delta)c\lambda_2+(\beta+\delta)^2]}{\beta^2\lambda_2}\Big)=\dfrac{2\beta c-c^2\lambda}{\beta^2}.\end{cases}$$

因此我们就能获得初始盈余为 0 的破产概率

$$\psi(0)=\mathsf{E}[1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]=\frac{\beta^2}{c^2\lambda}\cdot\Big(m_1-\frac{2\beta c-c^2\lambda}{\beta^2}\Big)=1-\Big(\frac{2\beta c-\beta^2m_1}{c^2\lambda}\Big),$$

其中, 由初始的假设 $cE(T_i)>E(X_i)$ 和 T_i 服从参数为 β 的 Erlang(2) 分布可知, $2\beta c-\beta^2m_1>0$.

(d) 令 $\omega(x,z)=\exp\{-z\},\ 0<x,\ z<\infty$, 则

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\int_0^\infty(e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x})\int_x^\infty e^{x-z}\mathrm{d}P(z)\mathrm{d}x\Big)\\ &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\int_0^\infty e^{-z}\mathrm{d}P(x)\int_0^z(e^{(1-\lambda_1)x}-e^{(1-\lambda_2)x})\mathrm{d}x\Big)\\ &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big).\end{aligned}\tag{8}$$

此处的 $\phi(0)$ 可以被看作当盈余值跌破初始值 u 时, 也就是当初始盈余为 0 时的破产时刻, 惩罚额为 $\exp\{U(T)\}$ 的折现值.

3.2　更新方程与联合分布

对 $0\le u<x$, 考虑到此保险公司在破产前的盈余值是否会跌破初始盈余，分作两种情况，其中 x 是前面所说的破产前时刻的盈余值；对于任意的 $u\ge 0$, 考虑到在盈余值第一次跌穿初始盈余的时刻是否就是破产时刻，也分作两种情况．于是有：

$$f(x,y|u)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^u f(x,y|u-z)g(z)\mathrm{d}z+f(x-u,y+u|0), & \text{如果 } 0\le u<x;\\ \displaystyle\int_0^u f(x,y|u-z)g(z)\mathrm{d}z, & \text{如果 } 0<x\le u,\end{cases}\tag{9}$$

其中，由 (5) 式可得

$$f(x-u,y+u|0)=\frac{\beta^2(e^{-\lambda_1(x-u)}-e^{-\lambda_2(x-u)})p(x+y)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}.$$

上式可换写作

$$f(x,y|u)=\int_0^u f(x,y|u-z)g(z)\mathrm{d}z+f(x-u,y+u|0)1_{\{u<x\}}. \tag{10}$$

为以后讨论的方便，我们再引入一个函数 $\varpi(\cdot)$, 它是下面一个方程式的函数解

$$\varpi(u)=\int_0^u \varpi(u-z)g(z)\mathrm{d}z+(e^{-\lambda_1(x-u)}-e^{-\lambda_2(x-u)})\cdot 1_{\{u<x\}},$$

其中 x 是一个取值于实数范围的常数. 易见, 当 y 亦是一个取值于实数范围的常数时，$f(x,y|u)$ 与 $\varpi(u)$ 之间就只存在一个常系数的差别了，故

$$f(x,y|u)=\frac{\beta^2\cdot p(x+y)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\varpi(u).$$

由于一个卷积的 Laplace 变换是他们各自 Laplace 变换的乘积，于是对 $\varpi(\cdot)$ 求 Laplace 变换可得

$$\varpi^*(\xi)=\varpi^*(\xi)\cdot g^*(\xi)+\Big(\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1-\xi}-\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2-\xi}\Big),$$

或写作

$$\varpi^*(\xi)=\Big(\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1-\xi}-\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2-\xi}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{1-g^*(\xi)}\Big). \tag{11}$$

另一方面，对于任意一个常数 α, 我们引入一个函数 $\varphi(u)$ 如下

$$\varphi(u)=\mathsf{E}[e^{-\delta T+\alpha U(T)}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=u],\qquad u\geq 0,$$

可知它是 $\phi(u)$ 一个特殊的表达式.

定理 3.2 破产前时刻的盈余 $U(T-)$ 与破产发生时的赤字 $U(T)$ 的联合概率密度函数如下

$$f(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{\beta^2\cdot p(x+y)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\dfrac{e^{\lambda_1(u-x)}-\varphi_1(u)\cdot e^{-\lambda_1 x}}{1-\varphi_1(0)}\Big)-\Big(\dfrac{e^{\lambda_2(u-x)}-\varphi_2(u)\cdot e^{-\lambda_2 x}}{1-\varphi_2(0)}\Big)\Big], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{倘若 } 0\leq u<x; \\ \dfrac{\beta^2\cdot p(x+y)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\dfrac{\varphi_1(u-x)-\varphi_1(u)\cdot e^{-\lambda_1 x}}{1-\varphi_1(0)}\Big)-\Big(\dfrac{\varphi_2(u-x)-\varphi_2(u)\cdot e^{-\lambda_2 x}}{1-\varphi_2(0)}\Big)\Big], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{倘若 } 0<x\leq u.\end{cases}$$

上式中的 $\varphi_1(u)$ 与 $\varphi_2(u)$ 这两个函数是通过将 α 分别替换为 λ_1 与 λ_2 代入 $\varphi(u)$ 中得到的.

证明： 记盈余值第一次跌穿初始盈余 u 的时刻为 $T_\star$, 并根据此时破产发生与否划分作两种情形讨论，于是

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \mathsf{E}[e^{-\delta T+\alpha U(T)}1_{\{T<\infty\}}1_{\{T_\star<T\}}|U(0)=u]+\mathsf{E}[e^{-\delta T+\alpha U(T)}1_{\{T_\star=T\}}|U(0)=u]\\ &= \mathsf{E}\Big\{\int_0^u \mathsf{E}[e^{-\delta T+\alpha U(T)}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=u,U(T_\star)=u-z]\cdot\mathsf{P}(U(T_\star)\in u-\mathrm{d}z|U(0)=u)\Big\}\\ &\quad+\mathsf{E}\Big\{\int_u^\infty \mathsf{E}[e^{-\delta T_\star+\alpha U(T_\star)}|U(0)=u,U(T_\star)=u-z]\cdot\mathsf{P}(U(T_\star)\in u-\mathrm{d}z|U(0)=u)\Big\}\\ &= \mathsf{E}\Big\{\int_0^u \mathsf{E}[e^{-\delta T+\alpha U(T)}1_{\{T<\infty\}}|U(T_\star)=u-z]\cdot\mathsf{P}(U(T_\star)\in u-\mathrm{d}z|U(0)=u)\Big\}\\ &\quad+\mathsf{E}\Big\{\int_u^\infty e^{-\delta T_\star}\cdot e^{\alpha(u-z)}\mathsf{P}(U(T_\star)\in u-\mathrm{d}z|U(0)=u)\Big\}.\end{aligned}$$

最后一个等式的成立用到了随机过程 $\{(U'_n,U_n)\}_{n=0}^\infty$ 的马氏性，这一随机过程如前所述．根据 $g(z)\mathrm{d}z$ 与 $T_\star$ 的定义，以下的等式成立

$$g(z)\mathrm{d}z=\mathsf{E}[e^{-\delta T_\star}\cdot\mathsf{P}(U(T_\star)\in u-\mathrm{d}z|U(0)=u)].$$

倘若 $T_\star$ 并非破产时刻，则不妨以这一时刻的盈余 $u-z$ 作为新的初始盈余值点．于是可得

$$\varphi(u)=\int_0^u\varphi(u-z)g(z)\mathrm{d}z+\int_u^\infty e^{-\alpha(z-u)}g(z)\mathrm{d}z, \tag{12}$$

并且上式中若 $u=0$, 则 $\varphi(0)=g^*(\alpha)$. 对 (12) 求 Laplace 变换有

$$\varphi^*(\xi)=\varphi^*(\xi)\cdot g^*(\xi)+\int_0^\infty e^{-\xi u}\int_u^\infty e^{-\alpha(z-u)}g(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u.$$

通过改换上式右侧的积分秩序，则上式的二重积分可以写作

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z}g(z)\int_0^z e^{(\alpha-\xi)u}\mathrm{d}u\mathrm{d}z=\frac{g^*(\xi)-g^*(\alpha)}{\alpha-\xi}=\frac{g^*(\xi)-\varphi(0)}{\alpha-\xi}.$$

因此

$$\varphi^*(\xi)=\frac{g^*(\xi)-\varphi(0)}{\alpha-\xi}\cdot\frac{1}{1-g^*(\xi)}.$$

且上式可分化为

$$\varphi^*(\xi)=\frac{1}{\xi-\alpha}-\frac{1-\varphi(0)}{\xi-\alpha}\cdot\frac{1}{1-g^*(\xi)}.$$

故而

$$\varphi^*(\xi)=\frac{1}{\xi-\alpha}-\frac{1-\varphi(0)}{\xi-\alpha}\cdot\sum_{i=0}^\infty(g^*(\xi))^i.$$

于是，我们得到

$$\varphi(u)=e^{\alpha u}\cdot\Big[1-(1-\varphi(0))\Big(1+\int_0^u e^{-\alpha z}\sum_{i=1}^\infty \mathrm{d}(G^{\star i}(z))\Big)\Big],$$

其中， $G^{\star i}(z)=\mathsf{P}(Y_1+Y_2+\cdots+Y_i\le z)$, 而 $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ 是一列独立同分布的随机变量，其 (瑕疵) 分布函数为 $G(x)$, 或者说 (瑕疵) 分布密度函数为 $g(x)$.

基于函数 $\varphi(\cdot)$, 为了方便起见，引入一个过渡函数

$$\theta(u)=\begin{cases}\exp\{\alpha(u-x)\}, & 0\le u<x;\\ \varphi(u-x), & 0<x\le u.\end{cases}$$

于是近似于 $\varphi_1(u)$ 与 $\varphi_2(u)$ 的定义，我们将 α 分别替换为 λ_1 与 λ_2 代入 $\theta(u)$ 中就可得到另外两个函数 $\theta_1(u)$ 与 $\theta_2(u)$ 了. 对 $\theta(\cdot)$ 作 Laplace 变换得

$$\theta^*(\xi)=\frac{e^{-\xi x}-e^{-\alpha x}}{\alpha-\xi}+e^{-\xi x}\varphi^*(\xi).$$

因此

$$\theta^*(\xi)-\varphi^*(\xi)\cdot e^{-\alpha x}=(e^{-\xi x}-e^{-\alpha x})\cdot\Big(\frac{1}{\alpha-\xi}+\varphi^*(\xi)\Big)=\frac{e^{-\xi x}-e^{-\alpha x}}{\alpha-\xi}\cdot\frac{1-\varphi(0)}{1-g^*(\xi)}.$$

上式中，将 α 分别替换为 λ_1 与 λ_2, 可得

$$\theta_1^*(\xi)-\varphi_1^*(\xi)\cdot e^{-\lambda_1 x}=\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1-\xi}\cdot\frac{1-\varphi_1(0)}{1-g^*(\xi)}\tag{13}$$

与

$$\theta_2^*(\xi)-\varphi_2^*(\xi)\cdot e^{-\lambda_2 x}=\frac{e^{-\xi x}-e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2-\xi}\cdot\frac{1-\varphi_2(0)}{1-g^*(\xi)}.\tag{14}$$

将 (13) 与 (14) 式代入 (11) 可得

$$\varpi^*(\xi)=\frac{\theta_1^*(\xi)-\varphi_1^*(\xi)\cdot e^{-\lambda_1 x}}{1-\varphi_1(0)}-\frac{\theta_2^*(\xi)-\varphi_2^*(\xi)\cdot e^{-\lambda_2 x}}{1-\varphi_2(0)}.$$

此结果正是我们所期望得到的. #

注 3.1 令

$$\frac{1}{1+\theta}=\mathsf{E}[e^{-\delta T}|U(0)=0]=\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big),$$

并让 $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 作为一列独立同分布的随机变量，且有正常分布函数 $B(x)=(1+\theta)\cdot G(x)$, 或正常概率密度函数 $(1+\theta)\cdot g(x)$. 于是

$$\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\Big[1+\sum_{i=1}^{\infty}G^{\star i}(x)\Big]=\frac{\theta}{1+\theta}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{1+\theta}\Big)^i\cdot B^{\star i}(x).\tag{15}$$

在古典风险模型下，倘以 θ 作为安全负荷数，以 $B(x)$ 作为个体索赔分布的平衡分布，则通过 Beekman 卷积公式，古典风险模型下的生存概率与我们在 Erlang(2) 风险模型中得到的上式 (15) 有着同样的形式. 这一事实意味着对古典模型生存概率的上限、下限以及数字近似的结果皆可应用于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}G^{\star i}(x)$ 中. 最终，对 Erlang(2) 风险模型之下本文中一般 $\phi(u)$ 的求取或近似可依此而得到.

§4.　重设担保

4.1　风险资产模型

令 $S(t)$ 表示在 $t\geq 0$ 时刻的风险资产价格，此风险资产可比之于无红利的股票或者股票指数．假定此风险资产价格的对数服从一个如式 (1) 这样的盈余过程，即

$$S(t)=e^{U(t)}=\exp\Big\{u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\Big\},\qquad t\geq 0. \tag{16}$$

因此这类风险资产价格过程具有下连续性．假设无风险利息率是一个正常数 r. 由于在如股票这样的资产上的投资是颇具风险的，所以同时假定 $c>r$.

4.2　重设担保定价

考虑到一类根据股票指数而定其权益的共同基金，而股票指数服从上述的资产价格过程．令 $F(0)$ 表示此共同基金的客户在初始时刻的投资金额，而将此客户 t 时刻的在此基金之中的帐面价值记为 $F(t)$. 于是

$$F(t)=F(0)\cdot\frac{S(t)}{S(0)}=F(0)\cdot\exp\{U(t)-u\},\qquad t\geq 0.$$

假如此共同基金公司对客户提供一种资金回溯担保的服务，其含义是指一旦客户的帐面价值跌落至初始投资金额 $F(0)$ 之下时，他 (她) 的帐面价值立即被重设回至初始投资金额 $F(0)$. 这里，也称这样的服务项目为重设担保．下面，我们的任务是如何对此重设担保进行定价．

令 $T^\star$ 为股票指数首次跌破初始价值的时刻．即

$$T^\star=\inf\{t|S(t)<S(0)\}=\inf\{t|U(t)<U(0)=u\}.$$

这一停时等同于盈余过程 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ 跌落至其初始盈余之下的首发时，或说是当此盈余过程初始盈余为 0 之时的破产时刻 T, 三者是别无二致的．故而，随机变量 $U(T^\star)-u$ 与初始盈余 $U(0)=0$ 的盈余过程 $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ 在破产时刻的赤字 $U(T)$ 这一随机变量具有相同的分布．

由上述重设担保的含义，可知在停时 $T^\star$, 客户的帐面价值将立即从 $F(0)\cdot\exp\{U(T^\star)\}$ 重设至 $F(0)$. 于是重设担保的价格将是

$$\begin{aligned}G_1 &= \mathsf{E}[e^{-rT^\star}F(0)(1-\exp\{U(T^\star)-u\})1_{\{T^\star<\infty\}}|U(0)=u]\\ &= \mathsf{E}[e^{-rT}F(0)(1-e^{U(T)})1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]\\ &= F(0)\cdot\int_0^\infty(1-e^{-y})g(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $g(y)$ 依上一节的定义，表达式如式 (6). 重设担保价格 G_1 也可以依以下形式出现

$$\begin{aligned}G_1 &= F(0)(\mathsf{E}[e^{-rT}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]-\mathsf{E}[e^{-rT\cdot}e^{U(T)}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0])\\ &= \frac{\beta^2\cdot F(0)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)-\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{17}$$

后一个等式中两项的结果分别源于式 (7) 与式 (8) 的结论．

4.3 n 次重设担保定价

进一步，可以假设此共同基金公司对它的客户提供 n 次重设担保服务，其含义是指一旦客户的帐面价值跌落至初始投资金额 $F(0)$ 之下，他 (她) 的帐面价值立即被重设回至初始投资金额 $F(0)$, 重设的过程则延至第 n 次帐面价值的亏损时．令 G_n 作为此 n 次重设担保的价格，立即可以得到如下的递归公式

$$G_n = G_{n-1} + \mathsf{E}[e^{-rT}F(0)(1-e^{U(T)})1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]\cdot(\mathsf{E}[e^{-rT}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0])^{n-1},$$

此递归公式对于 $n\geq 2$ 的自然数皆成立．其中，上面右方的第二项是第 n 次重设担保费用折现值，以 $\mathsf{E}[e^{-rT}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0]$ 作为折现因子，且从第 $(n-1)$ 次帐面价值跌落至初始投资金额之下的时刻开始往回折现，因此折现了 $(n-1)$ 次．于是有

$$\begin{aligned} G_n &= G_1\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)\Big]^i \\ &= G_1\sum_{i=0}^{n-1}\Big[1-\frac{2\beta r+r^2}{c^2\lambda_1\lambda_2}\Big]^i. \end{aligned}$$

后一等式的成立是因为 $c^2\lambda_i^2-2(\beta+r)\cdot c\cdot\lambda_i+(\beta+r)^2=\beta^2p^*(\lambda_i),\ i=1,2.$

考虑一种特殊的情况，倘若此重设担保的资金回溯次数可以无限多次，则这样一个担保的价格应可以表达为如下的等式

$$G_\infty = G_1\cdot\frac{c^2\lambda_1\lambda_2}{2\beta r+r^2}.$$

它是 $n\to\infty$ 时 G_n 的极限值．

§5. 美式看跌期权的定价

考虑一支永期看跌期权，其基础资产的价格过程服从 (16) 式．"永期" 是指此期权并无一定的交割期，期权的持有者可以在现在或将来的任意时刻进行交割，交割也仅限一次．故这样的一支期权一定是美式期权，也称之美式看跌期权．

令交割价格为 K, 倘若交割时刻为 t, 则此看跌期权交割时价值可表达为

$$\Pi(S(t))=\max\{K-S(t),0\}=(K-S(t))_+.$$

为方便起见，我们假设此期权的最优交易策略是，对于一个满足 $L\leq\min\{e^u,K\}$ 的数 L, 交易时刻相应于这样一个停时

$$T_L=\inf\{t|S(t)<L\}.$$

我们的任务是找到这个最优期权交易策略的边界交割价格，不妨记之为 $\widetilde{L}$. 为此，引入一个函数 $V(e^u;L)$, 它表示相对于期权交易策略 T_L 的期权价格

$$V(e^u;L)=\mathsf{E}[e^{-rT_L}\Pi(S(T_L))|S(0)=e^u].$$

若 $e^u = L$, 最优策略就是一旦其基础资产的价格跌落至其初始值之下时就进行交易，从而等同于上一节中讨论的重设担保，只是此处 $F(t)$ 为 $S(t)$ 所替代. 分解在交易策略 T_L 下交易时刻的期权价值为

$$\Pi(S(T_L) = K - S(T_L) = (K - L) + (L - S(T_L)),$$

于是

$$V(L;L) = (K - L)\cdot \mathsf{E}[e^{-rT_L}|S(0) = L] + G_1.$$

其中右边的期望值项在 (7) 式中已经给出，只是 r 取代了 δ. 而 G_1 在 (17) 式中给出，此处 $F(0)$ 被换作了 $S(0) = L$. 因此

$$\begin{aligned} V(L;L) &= \frac{\beta^2(K-L)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big] \\ &\quad +\frac{\beta^2\cdot L}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)-\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big)\Big] \\ &= \frac{\beta^2\cdot K}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big] \\ &\quad -\frac{\beta^2\cdot L}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

上面的公式可以引导我们找到 $\widetilde{L}$:

(i) 若 $V(L;L) < \Pi(L)$, 则对于任意的 $L_1 > L$, 倘以之作为边界交割价格，其最优交易策略是立即交割，即 $\Pi(L) = V(L;L_1)$, 故 $V(L;L) < V(L;L_1)$, 因此 $\widetilde{L} > L$.

(ii) 若 $V(L;L) > \Pi(L)$, 则对于任意的 $L_1 > L$, 有 $\Pi(L) = V(L;L_1)$, 故 $V(L;L) > V(L;L_1)$, 由此 $\widetilde{L} \le L$. 根据式 (8) 可知,

$$0 \le \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big) < 1;$$

根据式 (18) 可知,

$$\begin{aligned} V(L;L)-\Pi(L) &= K\cdot\Big[\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)-1\Big] \\ &\quad +L\cdot\Big[1-\frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big)\Big], \end{aligned}$$

它是一个关于 L 的连续增函数. 综上所述, 任意只要满足 $0 \le L \le K$ 的 L, 倘若 $V(L;L) > \Pi(L)$, 必有 $\widetilde{L} < L$.

由 (i) 与 (ii) 可知， $\widetilde{L}$ 惟取决于以下条件

$$V(\widetilde{L};\widetilde{L}) = \Pi(\widetilde{L}) = K - \widetilde{L}. \tag{19}$$

将式 (18) 与 $L = \widetilde{L}$ 代入式 (19) 之中，可以取得如下的 $\widetilde{L}$ 显性解

$$\widetilde{L} = \frac{c^2(\lambda_2-\lambda_1)-\beta^2\Big(\frac{1-p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}-\frac{1-p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)-\beta^2\Big(\frac{p^*(\lambda_1)-p^*(1)}{1-\lambda_1}-\frac{p^*(\lambda_2)-p^*(1)}{1-\lambda_2}\Big)}\cdot K,$$

其中 λ_1 与 λ_2 如前定义.

$\widetilde{L}$ 正是美式看跌期权最优交易策略的边界交割价格.

注 5.1 据式 (7) 与 $G_1 \geq 0$ 的界定，易知 $\widetilde{L} \leq K$.

注 5.2 令 $\zeta_u(x) = V(e^{u+x}, e^u)$, $x \geq 0$. 考虑期权基础资产价格首次跌落至初始价格 $S(0) = e^{u+x}$ 之下的时刻，且一旦此时的价格低于 e^u 就进行交割. 因此

$$\zeta_u(x) = \int_0^x \zeta_u(x-y)g(y)\mathrm{d}y + \int_x^\infty \Pi(e^{u+x-y})g(y)\mathrm{d}y. \tag{20}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(y)\mathrm{d}y &= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)} \cdot \int_0^\infty \int_y^\infty (e^{-\lambda_1(x-y)} - e^{-\lambda_2(x-y)})\mathrm{d}P(x)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)} \cdot \Big[\Big(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{p^*(\lambda_1)}{\lambda_1}\Big) - \Big(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{p^*(\lambda_2)}{\lambda_2}\Big)\Big] \\
&= \frac{c^2\lambda_1\lambda_2 - (\beta+r)^2 + \beta^2}{c^2\lambda_1\lambda_2} = 1 - \frac{2\beta r + r^2}{c^2\lambda_1\lambda_2} < 1,
\end{aligned}$$

其中，$c^2\lambda_i^2 - 2(\beta+r)\cdot c\cdot\lambda_i + (\beta+r)^2 = \beta^2 p^*(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

因此式 (20) 是函数 $\zeta_u(\cdot)$ 的一个瑕疵更新方程. 对瑕疵更新方程细节的讨论可参见 Gerber (1979) 与 Grandell (1991).

§6. 例 子

假定盈余过程的个体索赔服从均值为 $1/\nu$ 的指数分布，即其分布函数为 $P(x) = 1 - e^{-\nu x}$. 于是前文所述的 λ_1 与 λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ 在这里是一元三次线性方程 $c^2s^3 + (c^2\nu - 2(\beta+\delta)c)\cdot s^2 + [(\beta+\delta)^2 - 2(\beta+\delta)c\nu]\cdot s + (2\beta\delta\nu + \delta^2\nu) = 0$ 的两个解，它们清晰但颇复杂的表达式可以被表达出来.

对于个体索赔为指数分布的 Erlang(2) 风险模型，一些本文中提到的表达式可以列述如下：

$$\begin{aligned}
f(x, y|0) &= \frac{\nu\beta^2(e^{-(\lambda_1+\nu)x} - e^{-(\lambda_2+\nu)x})\cdot e^{-\nu y}}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}, \\
g(y) &= \frac{\nu\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)} \cdot \Big(e^{\lambda_1 y}\int_y^\infty e^{-(\nu+\lambda_1)x}\mathrm{d}x - e^{\lambda_2 y}\int_y^\infty e^{-(\nu+\lambda_2)x}\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{\nu\beta^2}{c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)} \cdot e^{-\nu y}, \\
\mathsf{E}[e^{-\delta T}|U(0)=0] &= \frac{\beta^2}{c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

当 $\delta \to 0$ 时，

$$\lambda_2 \to \lambda = \frac{2\beta - c\nu + \sqrt{c^2\nu^2 + 4\beta c\nu}}{2c},$$

则特别地，初时盈余为 0 的破产概率

$$\psi(0) = \frac{\beta^2}{c^2\nu(\nu+\lambda)}.$$

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}[e^{-\delta T+U(T)}1_{\{T<\infty\}}|U(0)=0] \\
= \;& \frac{\nu\beta^2}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big(\frac{1/(\nu+\lambda_1)-1/(\nu+1)}{1-\lambda_1}-\frac{1/(\nu+\lambda_2)-1/(\nu+1)}{1-\lambda_2}\Big) \\
= \;& \frac{\nu\beta^2}{c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)(\nu+1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(u) &= e^{\lambda_1 u}\cdot\Big[1-(1-\varphi(0))\cdot\Big(1+\int_0^u e^{-\lambda_1 z}\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{d}(G^{\star i}(z))\Big)\Big] \\
&= e^{\lambda_1 u}\cdot\Big\{1-(1-\varphi(0))\cdot\Big[1+\int_0^u e^{-\lambda_1 z}\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\frac{\beta^2}{c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)}\Big)^i(\nu e^{-\nu z})^{\star i}\Big]\Big\} \\
&= e^{\lambda_1 u}\cdot\Big\{1-\Big[1-g(0)\cdot\frac{1}{\nu+\lambda_1}\Big]\cdot\Big[1+\int_0^u e^{-\lambda_1 z}\sum_{i=1}^{\infty}(g(0))^i\Big(\frac{z^{i-1}e^{-\nu z}}{\Gamma(i)}\Big)\Big]\Big\} \\
&= e^{\lambda_1 u}\cdot\Big\{1-\Big[1-g(0)\cdot\frac{1}{\nu+\lambda_1}\Big]\cdot\Big[1+g(0)\cdot\int_0^u e^{-(\nu+\lambda_1-g(0))z}\Big]\Big\} \\
&= \varphi_1(0)\cdot\exp\{(g(0)-\nu)u\},
\end{aligned}
$$

其中 $g(0)=\nu\beta^2/[c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)]$, 且 $\varphi_1(0)=g^*(\lambda_1)=g(0)\cdot[1/(\nu+\lambda_1)]$.

同理， $\varphi_2(u)=\varphi_2(0)\cdot\exp\{(g(0)-\nu)u\}$, 其中 $\varphi_2(0)=g(0)\cdot[1/(\nu+\lambda_2)]$.

$$
f(x,y|u)=\begin{cases}
\dfrac{\nu\beta^2\cdot e^{-\nu y}}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\dfrac{(\nu+\lambda_1)e^{\lambda_1 u}-g(0)e^{(g(0)-\nu)u}}{\nu+\lambda_1-g(0)}\Big)e^{-(\nu+\lambda_1)x} \\
\qquad -\Big(\dfrac{(\nu+\lambda_2)e^{\lambda_2 u}-g(0)e^{(g(0)-\nu)u}}{\nu+\lambda_2-g(0)}\Big)e^{-(\nu+\lambda_2)x}\Big] & \text{如果 } 0\le u<x; \\
\dfrac{\nu\beta^2\cdot g(0)\cdot e^{(g(0)-\nu)u}\cdot e^{-\nu y}}{c^2(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot\Big[\Big(\dfrac{e^{-g(0)x}-e^{-(\nu+\lambda_1)x}}{\nu+\lambda_1-g(0)}\Big)-\Big(\dfrac{e^{-g(0)x}-e^{-(\nu+\lambda_2)x}}{\nu+\lambda_2-g(0)}\Big)\Big] & \\
& \text{如果 } 0<x\le u.
\end{cases}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}[e^{-\delta T}\cdot\omega_1(U(T-))\cdot\omega_2(|U(T)|)1_{\{T<\infty\}}|U(0)=u] \\
= \;& \int_0^{\infty}\omega_1(x)f(x,0|u)\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\infty}\omega_2(y)e^{-\nu y}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

则最终破产概率

$$
\psi(u)=\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x,y|u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\beta^2}{c^2\nu(\nu+\lambda)}\cdot\exp\Big\{\Big(\frac{\beta^2}{c^2(\nu+\lambda)}-\nu\Big)u\Big\},
$$

其中

$$
\lambda=\frac{2\beta-c\nu+\sqrt{c^2\nu^2+4\beta c\nu}}{2c}.
$$

最后，我们根据以上的结果得到美式看跌期权最优交易策略的边界交割价格

$$
\widetilde{L}=\Big(1-\frac{\beta^2}{c^2(\nu+\lambda_1)(\nu+\lambda_2)(\nu+1)-\nu\beta^2}\Big)\cdot K. \qquad \#
$$

参 考 文 献

[1] Willmot, G.E., Lin, X.S., Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, **25**(1999), 63–84.

[2] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **21**(1997), 129–137.

[3] Willmot, G.E., Lin, X.S., The moments of the time to ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**(2000), 19–44.

[4] Gerber, H.U., Landry, B, On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual option, *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**(1998), 263–276.

[5] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options, *Insurance: Mathematics and Economics*, **24**(1999), 3–14.

[6] Dickson, D.C.M., Hipp, C., On the time to ruin for Erlang(2) risk processes, *Insurance: Mathematics and Economics*, **29**(2001), 333–344.

[7] Dickson, D.C.M., Hipp, C., Ruin probability for Erlang(2) risk processes, *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**(1998), 251–262.

[8] Willmot, G.E., A Laplace transform representation in a class of renewal queueing and risk processes, *Journal of Applied Probability*, **36**(1999), 570–584.

[9] Gerber, H.U., *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1979.

[10] Grandell, J., *Aspects of Risk Thoery*, Springer-Verlag, New York, 1991.

Ruin Analysis for Erlang(2) Risk Process and American Put Option

DING ZHAOPENG

(*Business College of Beijing Union University, Beijing, 100025*)

In the classical risk theory, the risk of the accumulative claims follows Poission process. We will consider Erlang(2) risk process with the time between two claims following Erlang(2) distribution which always appears in control theory. In this paper, we consider an auxiliary function $\phi(\cdot)$ which involves the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at the time of ruin for our model within the three variables are essential and principal for the study of risk process. This auxiliary function has been studied by Willmot and Lin (1999) in the classical continuous time risk model. Motivated by the exposition in Gerber and Shiu (1997) and Willmot and Lin (2000), the first important result is to find the joint distribution density function of $U(T-)$ and $|U(T)|$ which is convenient to get the expression of $\phi(\cdot)$. But our approach is rather different from the technique for the classical risk model because of the distinct internal characteristic between two models. Influenced by the ideas in Gerber and Landry (1998) and Gerber and Shiu (1999), we will determine the optimal exercise price for an American put option whose foundation property price follows some risk process as an application.