应用概率统计　第二十四卷
第三期　2008年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.3 Jun. 2008

指数分布危险函数的经验Bayes双侧检验的收敛速度: II 型截尾情形 *

陈家清
(武汉理工大学统计系, 武汉, 430063)

刘次华
(华中科技大学数学系, 武汉, 430074)

摘　要

本文讨论了 II 型截尾情形下指数分布危险函数的经验Bayes (EB)双侧检验问题. 利用概率密度函数的核估计构造了经验Bayes检验函数, 在适当的条件下获得了它的收敛速度.

关键词: 密度函数的核估计, 经验Bayes检验, 收敛速度, II 型截尾.

学科分类号: O212.1.

§1. 引　言

经验Bayes (EB)检验问题在文献中已有许多的研究, 大多是关于指数族的. Johns & VR[1, 2]研究了离散型和连续型指数族单侧EB检验问题; Van Houwelingen[3], Liang[4, 5]讨论了连续型单参数指数族单调的EB检验问题; 韦来生[6]研究了一类离散型单参数指数族双侧的EB检验问题; 胡太忠[7], Singh & Wei[8]分别讨论了刻度指数族单侧和双侧的EB检验问题. II 型截尾寿命试验又称定数截尾寿命试验, 这种寿命试验是要求在试验样本中终止寿命的个体达到事先指定的个数时就停止试验, 它在生存分析和可靠性理论中应用非常广泛, 研究这类试验的统计分析有着重要的实际意义. 本文将研究 II 型截尾情形下指数分布危险函数的经验Bayes双侧检验问题.

设随机变量t的指数概率分布密度函数为

$$u(t;\theta)=\theta^{-1}e^{-t/\theta}I_{[t>0]}, \tag{1.1}$$

此处$I_{[A]}$为事件A的示性函数. 对于寿命试验数据, 分布的均值θ即为平均寿命, $\lambda(\theta)=\theta^{-1}$为分布的危险函数.

本文讨论下列关于危险函数的双侧检验问题:

$$H_0:\theta_2\le\lambda(\theta)\le\theta_1\leftrightarrow H_1:\lambda(\theta)<\theta_2 \text{ 或 } \lambda(\theta)>\theta_1, \tag{1.2}$$

---

*国家自然科学基金资助项目(10301011).

本文2005年5月23日收到, 2006年2月28日收到修改稿.

其中θ_1和θ_2为给定的常数. 若取$\theta_0=(\theta_1+\theta_2)/2$和$\gamma_0=(\theta_1-\theta_2)/2$, 则检验问题(1.2)等价于下述的检验问题:

$$H_0^*:|\lambda(\theta)-\theta_0|\le\gamma_0\leftrightarrow H_1^*:|\lambda(\theta)-\theta_0|>\gamma_0. \tag{1.3}$$

与经典的统计方法不同, Bayes判决问题需要引入所采取行动的损失函数和风险函数. 取假设检验问题(1.3)的损失函数($i=0,1$)为

$$L_i(\theta,d_i)=(1-i)a[(\lambda(\theta)-\theta_0)^2-\gamma_0^2]I_{[|\lambda(\theta)-\theta_0|>\gamma_0]}+ia[\gamma_0^2-(\lambda(\theta)-\theta_0)^2]I_{[|\lambda(\theta)-\theta_0|\le\gamma_0]},$$

此处a为正的常数, $d=\{d_0,d_1\}$是行动空间, d_0表示接受H_0^*, d_1表示拒绝H_0^*. 对于双侧检验问题(1.3)取上述损失函数较为合理, 便于导出的Bayes检验函数易于用非参数方法获得其EB估计.

设$t_1,t_2,\cdots,t_n$为来自分布(1.1)中的相互独立同分布(i.i.d)的随机样本, 若在全样本中仅观测到前r个观测值: $t_{(1)}<t_{(2)}<\cdots<t_{(r)}$ $(1\le r\le m)$, 则由[9]知, 可得到$t_{(1)},\cdots,t_{(r)}$的联合密度函数及θ的充分统计量为$T=\sum\limits_{i=1}^{r}t_{(i)}+(n-r)t_{(r)}$, 且$2T/\theta\sim\chi^2_{(2r)}$. 因此, 随机变量$T$的概率密度函数为

$$f(x|\theta)=\frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-x/\theta}I_{[x>0]}, \tag{1.4}$$

其中$r\ge1$. 随机变量T的样本空间为$\Omega=\{x|x>0\}$, θ的参数空间为$\Theta=\{\theta|\theta>0\}$.

本文中设参数θ的未知先验分布为$G(\theta)$, 满足条件

$$G(\theta)\in\vartheta=\Big\{G(\theta):\int_\Theta\theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta)<\infty\Big\}.$$

设

$$\delta(x)=\mathsf{P}(\text{ 接受 }H_0^*|T=x) \tag{1.5}$$

为随机化判决函数. 则在先验分布$G(\theta)$下$\delta(x)$的风险函数为

$$\begin{aligned}R(\delta(x),G(\theta))&=\int_\Theta\int_\Omega[L_0(\lambda(\theta),d_0)f(x|\theta)\delta(x)+L_1(\lambda(\theta),d_1)f(x|\theta)(1-\delta(x))]\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)\\&=\int_\Theta\int_\Omega[L_0(\lambda(\theta),d_0)-L_1(\lambda(\theta),d_1)]f(x|\theta)\delta(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)\\&\quad+\int_\Theta\int_\Omega L_1(\lambda(\theta),d_1)f(x|\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta)\\&=a\int_\Omega\beta(x)\delta(x)\mathrm{d}x+C_G,\end{aligned} \tag{1.6}$$

此处

$$C_G=\int_\Theta L_1(\lambda(\theta),d_1)\mathrm{d}G(\theta),$$
$$\beta(x)=\int_\Theta[(\lambda(\theta)-\theta_0)^2-\gamma_0^2]f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\int_\Theta[(\theta^{-1}-\theta_0)^2-\gamma_0^2]f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta). \tag{1.7}$$

令随机变量T的边缘分布为:

$$f_G(x)=\int_\Theta f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\int_\Theta \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta)=x^{r-1}\phi_G(x), \tag{1.8}$$

其中

$$\phi_G(x)=\int_\Theta \frac{\theta^{-r}}{\Gamma(r)}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta). \tag{1.9}$$

令

$$\phi_G^{(1)}(x)=-\int_\Theta \frac{\theta^{-(r+1)}}{\Gamma(r)}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta), \tag{1.10}$$

$$\phi_G^{(2)}(x)=\int_\Theta \frac{\theta^{-(r+2)}}{\Gamma(r)}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta). \tag{1.11}$$

进而由(1.7)得

$$\beta(x)=x^{r-1}[\phi_G^{(2)}(x)+2\theta_0\phi_G^{(1)}(x)+(\theta_0^2-\gamma_0^2)\phi_G(x)], \tag{1.12}$$

这里$\phi_G^{(1)}(x)$和$\phi_G^{(2)}(x)$分别表示$\phi_G(x)$的一阶、二阶导数. 因此, 由(1.6)可知Bayes检验函数为:

$$\delta_G(x)=\begin{cases}1, & \beta(x)\le 0,\\ 0, & \beta(x)>0.\end{cases} \tag{1.13}$$

于是检验函数$\delta_G(x)$的Bayes风险为

$$R(G)=\inf_\delta R(\delta,G)=R(\delta_G,G)=a\int_\Omega \beta(x)\delta_G(x)\mathrm{d}x+C_G. \tag{1.14}$$

上述风险当先验分布$G(\theta)$已知且$\delta(x)=\delta_G(x)$时, $R(\delta_G,G)$是可以精确达到的. 但此处$G(\theta)$未知, 因而$\delta_G(x)$也未知, 所以Bayes检验函数$\delta_G(x)$无实用价值, 于是需要引入EB方法. 这就导致构造其风险可任意接近$R(\delta_G,G)$的EB检验函数.

本文第二节将导出危险函数的EB检验函数, 第三节给出EB检验函数的收敛速度并举一个符合定理要求的先验分布的例子.

§2. EB检验函数的构造

在EB问题的结构中, 设$(T_1,\theta_1),(T_2,\theta_2),\cdots,(T_n,\theta_n)$和$(T,\theta)$是独立同分布的随机向量, 其中$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$和$\theta$具有共同的先验分布$G(\theta)$; T_i $(i=1,2,\cdots,n)$是第i次截尾试验所获得的数据, 且$T_1,T_2,\cdots,T_n$, T为i.i.d.样本, 具有共同的边缘密度如(1.8)所示. 通常称$T_1,T_2,\cdots,T_n$为历史样本, 称T为当前样本.

为构造EB检验函数, 采用如下的核估计方法. 令$s>2$为任意确定的自然数, $K_i(y)$ $(i=0,1,2)$为有界的Borel可测函数, 在区间$(0,1)$之外取值为零; 对$i=0,1,2$满足条件:

$$\text{(A1)}\quad \frac{1}{j!}\int_0^1 y^j K_i(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\ j=0,1,2,\cdots,s-1.\end{cases}$$

设$\phi_G^{(i)}(x)$ $(i=0,1,2)$表示$\phi_G(x)$的第i阶导数, 记$\phi_G^{(0)}(x)=\phi_G(x)$. 对$i=0,1,2$, 类似于Singh[10], 定义$\phi_G^{(i)}(x)$的核估计为

$$\phi_n^{(i)}(x)=\frac{1}{nb_n^{i+1}}\sum_{j=1}^n K_i\Big(\frac{T_j-x}{b_n}\Big)\Big/T_j^{r-1},\qquad i=0,1,2. \tag{2.1}$$

其中$\{b_n\}$为一正数序列, 且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

由(1.12)和(2.1)可得$\beta(x)$的估计量为

$$\beta_n(x)=x^{r-1}[\phi_n^{(2)}(x)+2\theta_0\phi_n^{(1)}(x)+(\theta_0^2-\gamma_0^2)\phi_n(x)]. \tag{2.2}$$

于是定义$\delta_G(x)$的估计为

$$\delta_n(x)=\begin{cases}1, & \beta_n(x)\le 0,\\ 0, & \beta_n(x)>0.\end{cases} \tag{2.3}$$

则$\delta_n(x)$即为检验问题(1.2)的EB检验函数.

在本文以下令E_n表示对随机变量$(T_1,T_2,\cdots,T_n,T)$的联合分布求均值, 则$\delta_n(x)$的全面Bayes风险为

$$R(\delta_n,G)=a\int_\Omega \beta(x)\mathsf{E}_n[\delta_n(x)]\mathrm{d}x+C_G. \tag{2.4}$$

按定义, 若对每个$G\in\vartheta$有$\lim\limits_{n\to\infty}R(\delta_n,G)=R(\delta_G,G)$, 则称$\{\delta_n\}$为关于$\vartheta$渐近最优(a.o.)的EB检验函数. 若$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O(n^{-q})$, $q>0$, 则称EB检验函数$\{\delta_n\}$的收敛速度的阶为$O(n^{-q})$.

由定义可知, EB检验函数优良性的评价取决于其风险逼近Bayes风险的程度.

本文以下令$c,c_1,c_2,\cdots$表示不依赖于n的正的常数, 且在不同之处可表示不同的值, 即使在同一表达式中也是如此. 为得到EB检验函数的收敛速度, 需要下面的几个引理.

引理 2.1 若$\mathsf{E}[\theta^{-(\eta+r)}]<\infty$, r为正整数, $\eta=0,1,\cdots,s$, 其中$s>2$为任意确定的自然数, 则存在常数$W>0$使得

$$\sup_x|\phi_G^{(\eta)}(x)|\le W<\infty.$$

证明: 由于

$$\phi_G^{(\eta)}(x)=(-1)^\eta\int_\Theta\frac{\theta^{-(r+\eta)}}{\Gamma(r)}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta),$$

于是对于任意的$x>0$有

$$|\phi_G^{(\eta)}(x)|\le \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \theta^{-(r+\eta)}\mathrm{d}G(\theta)=c\mathsf{E}[\theta^{-(r+\eta)}]\le W<\infty.$$

引理得证. □

引理 2.2 设$\phi_G(x)$、$\phi_G^{(1)}(x)$和$\phi_G^{(2)}(x)$分别由(1.9)、(1.10)及(1.11)给出, $\phi_n^{(i)}(x)$ $(i=0,1,2)$由(2.1)定义, 若$\mathsf{E}[\theta^{-(r+s)}]<\infty$, $s>2$和r均为正整数. 则当取$b_n=n^{-1/(2s+1)}$时, 对$0<\mu\le 2$有

$$\mathsf{E}_n|\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|^\mu\le[c_{1i}+c_{2i}x^{-\mu(r-1)/2}]n^{-\mu(s-i)/(2s+1)},\qquad i=0,1,2.$$

证明: 由C-R不等式得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_n|\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|^\mu &\le 2|\mathsf{E}_n\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|^\mu+2[\mathsf{Var}\,(\phi_n^{(i)}(x))]^{\mu/2}\\ &= 2(Q_{1i}^\mu+Q_{2i}^{\mu/2}),\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中

$$\mathsf{E}_n\phi_n^{(i)}(x)=\frac{1}{b_n^{i+1}}\mathsf{E}_n\Big[K_i\Big(\frac{T_1-x}{b_n}\Big)\frac{1}{T_1^{r-1}}\Big]=\frac{1}{b_n^i}\int_0^1 K_i(v)\phi_G(x+b_nv)\mathrm{d}v.$$

将$\phi_G(x+b_nv)$在x处作Taylor展开到第$s+1$项有

$$\phi_G(x+b_nv)=\phi_G(x)+\phi_G^{(1)}(x)b_nv+\cdots+\frac{\phi_G^{(s)}(x+\xi b_nv)}{s!}(b_nv)^s.$$

其中$0<\xi<1$. 利用核函数$K_i(y)$ $(i=0,1,2)$的正交性条件(A1)及考虑到$|\phi_G^{(s)}(x)|$的单调性, 可知

$$|\mathsf{E}_n\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|\le\frac{b_n^{s-i}}{s!}\int_0^1|K_i(v)|v^s|\phi_G^{(s)}(x+\xi b_nv)|\mathrm{d}v\le c_1|\phi_G^{(s)}(x)|b_n^{s-i}.$$

因此, 当取$b_n=n^{-1/(2s+1)}$时有

$$Q_{1i}^\mu\le c_1|\phi_G^{(s)}(x)|^\mu n^{-\mu(s-i)/(2s+1)}.\tag{2.6}$$

再证$Q_{2i}^{\mu/2}$. 利用$\phi_G(x)$的单调性及核函数的性质, 可得

$$\begin{aligned}Q_{2i} &= \mathsf{Var}\,(\phi_n^{(i)}(x))=\frac{1}{nb_n^{2(i+1)}}\mathsf{Var}\Big[K_i\Big(\frac{T_1-x}{b_n}\Big)\frac{1}{T_1^{r-1}}\Big]\\ &\le \frac{1}{nb_n^{2(i+1)}}\mathsf{E}_n\Big[K_i\Big(\frac{T_1-x}{b_n}\Big)\frac{1}{T_1^{r-1}}\Big]^2\\ &= \frac{1}{nb_n^{2i+1}}\int_0^1\frac{K_i^2(v)}{(x+b_nv)^{r-1}}\phi_G(x+b_nv)\mathrm{d}v\\ &\le \frac{\phi_G(x)}{nb_n^{2i+1}x^{r-1}}\int_0^1 K_i^2(v)\mathrm{d}v\\ &\le c_{2i}\Big(\frac{\phi_G(x)}{x^{r-1}}\Big)\cdot(nb_n^{2i+1})^{-1}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

由(2.7)知, 当取$b_n=n^{-1/(2s+1)}$时有

$$Q_{2i}^{\mu/2}\le c_2\Big(\frac{\phi_G(x)}{x^{r-1}}\Big)^{\mu/2}n^{-\mu(s-i)/(2s+1)}. \tag{2.8}$$

将(2.6)、(2.8)代入(2.5)有

$$\mathsf{E}_n|\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|^\mu\le\Big[c_{1i}|\phi_G^{(s)}(x)|^\mu+c_{2i}\Big(\frac{\phi_G(x)}{x^{r-1}}\Big)^{\mu/2}\Big]n^{-\mu(s-i)/(2s+1)}.$$

由引理2.1可知, 当$\mathsf{E}[\theta^{-(s+r)}]<\infty$时$\sup\limits_x|\phi_G^{(s)}(x)|\le W<\infty$, $\sup\limits_x|\phi_G(x)|\le W<\infty$, 故有

$$\mathsf{E}_n|\phi_n^{(i)}(x)-\phi_G^{(i)}(x)|^\mu\le[c_{1i}+c_{2i}x^{-\mu(r-1)/2}]n^{-\mu(s-i)/(2s+1)}.$$

引理得证. □

引理 2.3 设$R(\delta_G,G)$和$R(\delta_n,G)$分别由(1.14)和(2.4)给出, 则

$$0\le R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\le a\int_\Omega|\beta(x)|p(|\beta_n(x)-\beta(x)|\ge|\beta(x)|)\mathrm{d}x.$$

证明: 见Johns, Van Ryzin[2]之引理1. □

引理 2.4 若$\displaystyle\int_\Theta\theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta)<\infty$, $\mathsf{E}(\theta^{l-r-i+1})<\infty$, 其中$l=[(1+\rho)\mu+\kappa]/(1-\mu)$, $i=0,1,2$, $r\ge1$为正整数, $0<\mu<1$, $\kappa\ge0$, ρ为任意小的正数, 则有

$$\int_0^\infty x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x<\infty,\qquad i=0,1,2.$$

证明: 由于

$$\int_0^\infty x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x+\int_1^\infty x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x=J_1+J_2. \tag{2.9}$$

由引理2.1知$|\phi_G^{(i)}(x)|\le c<\infty$ $(i=0,1,2)$, 故有

$$J_1=\int_0^1 x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x<\infty. \tag{2.10}$$

由Hölder不等式, 可知

$$\begin{aligned}J_2&=\int_1^\infty x^{-\mu(1+\rho)}[x^{\mu(1+\rho)+\kappa}|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}]\mathrm{d}x\\&\le\Big[\int_1^\infty x^{-(1+\rho)}\mathrm{d}x\Big]^\mu\cdot\Big[\int_1^\infty x^{[\mu(1+\rho)+\kappa]/(1-\mu)}|\phi_G^{(i)}(x)|\mathrm{d}x\Big]^{1-\mu}\\&=J_{21}^\mu\cdot J_{22}^{1-\mu}.\end{aligned}$$

显然$J_{21} < \infty$, 又有

$$\begin{aligned} J_{22} &= \int_1^\infty x^l|\phi_G^{(i)}(x)|\mathrm{d}x \le \int_0^\infty x^l\mathrm{d}x\int_\Theta \frac{\theta^{-(r+i)}}{\Gamma(r)}e^{-x/\theta}\mathrm{d}G(\theta) \\ &= \int_\Theta \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(r)}\theta^{(l-r-i+1)}\mathrm{d}G(\theta)\int_0^\infty \frac{\theta^{-(l+1)}}{\Gamma(l+1)}x^{(l+1)-1}e^{-x/\theta}\mathrm{d}x \\ &\le c\mathsf{E}(\theta^{(l-r-i+1)}) < \infty. \end{aligned}$$

所以

$$J_2 = \int_1^\infty x^\kappa|\phi_G^{(i)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x \le J_{21}^\mu J_{22}^{1-\mu} < \infty. \tag{2.11}$$

将(2.10)和(2.11)代入(2.9), 引理得证. □

引理 2.5 设$\beta(x)$由(1.12)给出, 若$\int_\Theta \theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta) < \infty$, $\mathsf{E}[\theta^{\mu(r+\rho)/(1-\mu)}] < \infty$, 其中$2/(3+\rho) < \mu < 1$, ρ为任意小的正数, r由(1.4)给出, 则

(i) $\int_0^\infty x^{\mu(r-1)}|\beta(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x < \infty$,

(ii) $\int_0^\infty x^{\mu(r-1)/2}|\beta(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x < \infty$.

证明: 首先证(i). 由(1.12)有

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{\mu(r-1)}|\beta(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x \\ =& \int_0^\infty x^{\mu(r-1)}|x^{r-1}[\phi_G^{(2)}(x) + 2\theta_0\phi_G^{(1)}(x) + (\theta_0^2-\gamma_0^2)\phi_G(x)]|^{1-\mu}\mathrm{d}x \\ \le& c_1\int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G^{(2)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x + c_2\int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G^{(1)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x \\ &+ c_3\int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x \\ =& c_1I_1 + c_2I_2 + c_3I_3. \end{aligned} \tag{2.12}$$

在引理2.4中取$\kappa = r-1$, $i = 0,1,2$, 则当在$\int_\Theta \theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta) < \infty$且$2/(3+\rho) < \mu < 1$条件下有$\mathsf{E}(\theta^{l-r-1}) \le \mathsf{E}(\theta^{l-r}) \le \mathsf{E}(\theta^{l-r+1}) = \mathsf{E}[\theta^{\mu(\rho+r)/(1-\mu)}] < \infty$时, 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G^{(2)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x < \infty, \\ I_2 &= \int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G^{(1)}(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x < \infty, \\ I_3 &= \int_0^\infty x^{r-1}|\phi_G(x)|^{1-\mu}\mathrm{d}x < \infty. \end{aligned} \tag{2.13}$$

将(2.13)代入(2.12), 引理2.5结论(i)得证.

再证(ii). 同理(i)的证明过程, 只需在引理2.4中取$\kappa=(2-\mu)(r-1)/2$, $i=0,1,2$, 则当在$\int_\Theta \theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta)<\infty$且$2/(3+\rho)<\mu<1$条件下

$$\mathsf{E}(\theta^{l-r-1})\le \mathsf{E}(\theta^{l-r})\le \mathsf{E}(\theta^{l-r+1})=\mathsf{E}[\theta^{\mu(1+2\rho+r)/[2(1-\mu)]}]\le \mathsf{E}[\theta^{\mu(\rho+r)/(1-\mu)}]<\infty$$

时, 引理2.5结论(ii)得证. $\square$

§3. EB检验函数的收敛速度

本节中, 我们在适当的条件下获得了所构造的经验Bayes检验函数的收敛速度, 并给出了相应地证明.

定理 3.1 设$R(\delta_G,G)$和$R(\delta_n,G)$分别由(1.14)和(2.4)给出, 若

$$\mathsf{E}[\theta^{-(r+s)}]<\infty,\qquad \mathsf{E}[\theta^{\mu(r+\rho)/(1-\mu)}]<\infty,$$

其中ρ为任意小的正数, 正整数r由(1.4)给出, $2/(3+\rho)<\mu<1$, $s>2$为任意确定的自然数. 则当取$b_n=n^{-1/(2s+1)}$时, 有

$$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O(n^{-\mu(s-2)/(2s+1)}).$$

注 当$\mathsf{E}[\theta^{-(r+s)}]<\infty$时, 由Hölder不等式可推知$\int_\Theta \theta^{-(r+2)}\mathrm{d}G(\theta)<\infty$, 因此这一条件可在定理中省略.

证明: 类似文献[11]的证明方法, 由引理2.3和Markov不等式得

$$\begin{aligned}0 &\le R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\\ &\le a\int_\Omega |\beta(x)|p(|\beta_n(x)-\beta(x)|\ge|\beta(x)|)\mathrm{d}x\\ &\le a\int_\Omega |\beta(x)|^{1-\mu}\mathsf{E}_n|\beta_n(x)-\beta(x)|^\mu\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(1.12)和(2.2)可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_n|\beta_n(x)-\beta(x)|^\mu &\le x^{\mu(r-1)}[c_1\mathsf{E}_n|\phi_n^{(2)}(x)-\phi_G^{(2)}(x)|^\mu\\ &\quad +c_2\mathsf{E}_n|\phi_n^{(1)}(x)-\phi_G^{(1)}(x)|^\mu+c_3\mathsf{E}_n|\phi_n(x)-\phi_G(x)|^\mu].\end{aligned}$$

又由引理2.2得

当$i=0$时, 有$\mathsf{E}_n|\phi_n(x)-\phi_G(x)|^\mu\le[c_{10}+c_{20}x^{-\mu(r-1)/2}]n^{-\mu s/(2s+1)}$,
当$i=1$时, 有$\mathsf{E}_n|\phi_n^{(1)}(x)-\phi_G^{(1)}(x)|^\mu\le[c_{11}+c_{21}x^{-\mu(r-1)/2}]n^{-\mu(s-1)/(2s+1)}$,
当$i=2$时, 有$\mathsf{E}_n|\phi_n^{(2)}(x)-\phi_G^{(2)}(x)|^\mu\le[c_{12}+c_{22}x^{-\mu(r-1)/2}]n^{-\mu(s-2)/(2s+1)}$.

故

$$\begin{aligned}R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G) &\leq a\int_0^\infty |\beta(x)|^{1-\mu}\{x^{\mu(r-1)}[c_1\mathsf{E}_n|\phi_n^{(2)}(x)-\phi_G^{(2)}(x)|^\mu \\ &\quad +c_2\mathsf{E}_n|\phi_n^{(1)}(x)-\phi_G^{(1)}(x)|^\mu+c_3\mathsf{E}_n|\phi_n(x)-\phi_G(x)|^\mu]\}\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^\infty |\beta(x)|^{1-\mu}[c_1x^{\mu(r-1)}+c_2x^{\mu(r-1)/2}]\mathrm{d}x \\ &\quad \cdot[c_3n^{-\mu(s-2)/(2s+1)}+c_4n^{-\mu(s-1)/(2s+1)}+c_5n^{-\mu s/(2s+1)}] \\ &\leq c_1n^{-\mu(s-2)/(2s+1)}+c_2n^{-\mu(s-1)/(2s+1)}+c_3n^{-\mu s/(2s+1)} \\ &\leq cn^{-\mu(s-2)/(2s+1)}.\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等号由引理2.5得到, 于是有

$$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O(n^{-\mu(s-2)/(2s+1)}),$$

定理3.1证毕. □

满足定理3.1条件的先验分布是较容易找到的. 例如设θ取如下的共轭先验分布

$$g(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\theta^{-(\gamma+1)}e^{-1/\theta},$$

其中$r\geq 1$, $2/(3+\rho)<\mu<1$, ρ为任意小的正数, $\gamma>(r+\rho)\mu/(1-\mu)$. 则有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\theta^{-(r+2)}) &= \frac{\Gamma(r+\gamma+2)}{\Gamma(\gamma)}<\infty, \\ \mathsf{E}(\theta^{-(r+s)}) &= \frac{\Gamma(r+\gamma+s)}{\Gamma(\gamma)}<\infty, \\ \mathsf{E}[\theta^{(r+\rho)\mu/(1-\mu)}] &= \frac{\Gamma[\gamma-(r+\rho)\mu/(1-\mu)]}{\Gamma(\gamma)}<\infty.\end{aligned}$$

由以上计算结果可知定理3.1的条件都成立.

参 考 文 献

[1] Johns, M.V., Jr., Van Ryzin, J., Convergence rates in empirical Bayes two-action problems I: discrete case, *Ann. Math. Statist.*, **42**(1971), 1521–1539.

[2] Johns, M.V., Jr., Van Ryzin, J., Convergence rates in empirical Bayes two-action problems II: continuous case, *Ann. Math. Statist.*, **43**(1972), 934–947.

[3] Van Houwelingen, J.C., Monotone empirical Bayes test for the continuous one-parameter exponential family, *Ann. Statist.*, **4**(1976), 981–989.

[4] Liang, T.C., On empirical Bayes tests in a positive exponential family, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **83**(2000), 169–181.

[5] Liang, T.C., On optimal convergence rate of empirical Bayes tests, *Statistics & Probability Letters*, **68**(2004), 189–198.

[6] 韦来生, 一类离散单参数指数族的双侧的经验Bayes检验问题, 应用概率统计, **7**(1991), 299–310.

[7] 胡太忠, 刻度参数指数族经验Bayes检验收敛速度, 数理统计与应用概率, **7**(1991), 86–96.

[8] Singh, R.S., Wei, L.S., Nonparametric empirical Bayes procedures, asymptotic and rates of convergence for two-sides tests in exponential family, *Nonparametric Statistics*, **12**(2000), 475–501.

[9] Lawless, J.F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley & Sons, Ins, New York, 1982.

[10] Singh, R.S., Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential families with rates near the best possible rate, *Ann. Statist.*, **7**(1979), 890–902.

[11] Shi, Y.M., Shi, X.L., Yan, J., Two-sided empirical Bayes test for truncation parameter using NA samples, *Information Sciences*, **173**(2005), 65–74.

Convergence Rates of Empirical Bayes Two-Sided Tests for the Hazard Function of Exponential Distribution: In the Case of Type Ⅱ Censored

Chen Jiaqing

(*Department of Statistics, Wuhan University of Technology, Wuhan, 430063*)

Liu Cihua

(*Department of Mathematics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074*)

In this paper, by using the kernel-type density estimation, the empirical Bayes two-sided tests rules for the hazard function of exponential family in the case of type Ⅱ censored samples are constructed. The convergence rates of the proposed EB test rules are obtained under suitable conditions.

Keywords: The kernel estimation of density function, empirical Bayes test, convergence rates, type Ⅱ censored.

AMS Subject Classification: 62C12, 62F12.