

可变参数的联合中位值和极差控制图

张维铭 宗云南 刘建斌
(浙江理工大学, 杭州, 310018)

摘要

最近设计了可变样本容量和抽样区间的联合中位值 (\tilde{x}) 和极差 (R) 控制图^[1], 本文利用 Costa 的可变参数控制图的方法^[2], 设计包括可变控制限的可变参数的联合 \tilde{x} 和 R 图 (CVP \tilde{x} - R 图). 计算了在可变参数下发出信号前的平均时间, 并同联合常规 \tilde{x} - R 图 (CFSSI 图) 和可变样本容量和抽样区间的联合 \tilde{x} - R 图 (CVSSI 图) 作比较, 所设计的控制图能较快地发现过程平均值和方差的小变化, 提高 CVSSI 图的效率.

关键词: 中位值, 极差, 控制图, 可变参数, 发信号的平均时间.

学科分类号: O213.1.

§ 1. 前言

当样本容量 n 、抽样区间 h 、 \tilde{x} 图的控制限系数 r 和 R 图的控制限系数 D 都可变时, 研究联合 \tilde{x} 图和 R 图有更大的实际意义. 这四个参数的最小和最大值之间的变化是与最近 \tilde{x} 和 R 值有关. 若 \tilde{x} 和 R 点落在 \tilde{x} 图或 R 图的警戒域, 则应加紧控制, 等待较短时间 (最小的 h)、增加样本容量 (最大的 n) 抽取其次样本, 将该样本的 \tilde{x} 点和 R 点分别描绘在具有狭窄控制限的 \tilde{x} 和 R 图上. 若最近的 \tilde{x} 和 R 点分别落在 \tilde{x} 图和 R 图的中心域, 则应放松控制, 等待较长时间 (最大的 h)、减少样本容量 (最小的 n) 抽取其次样本, 将该样本的 \tilde{x} 和 R 点分别描在具有宽阔控制限的 \tilde{x} 和 R 图上. 同具有固定参数的联合 \tilde{x} - R 图一样, 当一个 \tilde{x} 或 R 点落在 \tilde{x} 图或 R 图的控制域时, CVP \tilde{x} - R 图发出信号.

§ 2. CVP \tilde{x} 和 R 控制图的描述

设质量特征 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 过程从平均值和标准差在接近目标值 ($\mu = \mu_0$ 和 $\sigma = \sigma_0$) 时开始, 在将来某一随机区间, 平均值从 μ_0 变至 $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma_0$, $\delta > 0$, 标准差从 σ_0 变至 $\sigma = g\sigma_0$ ($g > 1$).

对常规控制图, 每隔 h_0 小时随机抽取容量为 n_0 的样本, 通常 $n_0 = 5$. 对 \tilde{x} 图, 控制限为 $\mu_0 \pm r_0 c_m \sigma_0 / \sqrt{n_0}$, 记作 $\mu_0 \pm c_0 \sigma_0$; 对 R 图, 只需控制上限, 上限为 $E(R) + r_0 \sigma_R = (d_2 + r_0 b_2) \sigma_0$, 记作 $D_0 \sigma_0$, 式中 c_m 、 d_2 和 b_2 同样本容量 n 有关^[3]. 对可变参数控制图, 图上的界限分为控制限和警戒限, 警戒限位于中心线和控制限之间. \tilde{x} 图的中心线为 μ_0 , 控制限为 $\mu_0 \pm r_i c_m \sigma_0 / \sqrt{n_i}$, 记作 $\mu_0 \pm c_i \sigma_0$, 警戒限为 $\mu_0 \pm r'_i c_m \sigma_0 / \sqrt{n_i}$, 记作 $\mu_0 \pm c'_i \sigma_0$. R 图的控制上限为 $(d_2 + r_i b_2) \sigma_0$, 记作 $D_i \sigma_0$,

本文 2004 年 9 月 9 日收到, 2005 年 4 月 29 日收到修改稿.

警戒上限为 $(d_2 + r'_i b_2) \sigma_0$, 记作 $D'_i \sigma_0$, $i = 1, 2$. 为了方便, 可将统计量 $V = (\tilde{x} - \mu_0) \sqrt{n_i} / (c_m \sigma_0)$ 描在图上, 因此 V 图的控制限和警戒限可简写为 $\pm r_i$ 和 $\pm r'_i$, 这里 $c_1 > c_0 > c_2$, $c'_1 > c'_2$, $D_1 > D_2$, $D'_1 < D'_2$. 若 \tilde{x} 或 R 值落在警戒域, 则其次样本在较短时间区间后 ($h_1 < h_0$) 抽取大样本 ($n_2 > n_0$). 若 \tilde{x} 和 R 值落在中心域, 则其次样本在较长时间区间后 ($h_2 > h_0$) 抽取小样本 ($n_1 < n_0$).

为了避免一个图使用小样本, 另一图使用大样本, 可用两种刻度绘制 \tilde{x} 图和 R 图, 如图 2 所示.

在过程刚开始或伪警报以后从过程抽取的第一个样本容量是随机决定的. 在受控期间, 所有样本包括第一个样本, 取得小样本的概率为 p_0 , 取得大样本的概率为 $(1 - p_0)$, p_0 由下式决定:

$$p_0 = P(|V| < r'_i | |V| < r_i) P(R/\sigma_0 < D'_i | R/\sigma_0 < D_i), \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

为了计算方便, 指定 r'_i 、 r_i 、 D'_i 和 D_i , 使在受控期间已知样本点不位于控制域而位于中心域(或警戒域)的条件概率对 \tilde{x} 和 R 图是相同的, 亦即:

$$P(|V| < r'_i | |V| < r_i) = P(R/\sigma_0 < D'_i | R/\sigma_0 < D_i), \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

§ 3. CVP \tilde{x} 和 R 控制图发信号的平均时间

控制图发现过程变化的速度由发信号的平均时间 (ATS) 或修正平均时间 (AATS) 来度量. 当过程自开始就离开目标值 ($\mu = \mu_1$ 或 $\sigma = \sigma_1$) 时采用 ATS. 此时, ATS 是过程开始直至 \tilde{x} 或 R 图发信号的平均时间. 当过程从 $\mu = \mu_0$ 和 $\sigma = \sigma_0$ 开始, 在将来某一随机区间变至 μ_1 或 σ_1 时采用 AATS, AATS 是过程变化直至 \tilde{x} 或 R 图发信号的平均时间.

在建立 CVP $\tilde{x}-R$ 图的 ATS 和 AATS 的表示式时, 必须考虑 \tilde{x} 和 R 图上由每个样本点 \tilde{x} 和 R 的位置决定的三个不同信号:

- (1) 绿色信号: 当两个点都落在中心域时;
- (2) 黄色信号: 其中至少一个点落在警戒域(但没有一个落在控制域);
- (3) 红色信号: 其中至少一个点落在控制域.

因此, ATS 是直至红色信号的平均时间, AATS 是直至红色信号的修正平均时间.

CVP $\tilde{x}-R$ 图的 ATS, 依赖于第一个样本的容量. 当第一个是小样本时, 求 ATS 要考虑红色信号以前的绿色信号数 M_1 , M_1 是具有参数 $(1 - p_1)$ 的几何分布, 这里 p_1 是已知当前的信号是绿色而得到另一个绿色信号的条件概率, 亦即:

$$p_1 = p_{11} + p_{12} \sum_{i=1}^{\infty} p_{22}^{i-1} p_{21}.$$

这里:

$$\begin{aligned} p_{11} &= P(|V| < r'_1 | n_1, \delta, g) P(R/\sigma_0 < D'_1 | n_1, g), \\ p_{12} &= P(r'_1 < |V| < r_1 | n_1, \delta, g) P(R/\sigma_0 < D_1 | n_1, g) \\ &\quad + P(|V| < r'_1 | n_1, \delta, g) P(D'_1 < R/\sigma_0 < D_1 | n_1, g), \end{aligned}$$

《应用概率统计》

$$\begin{aligned}
 p_{22} &= \mathbb{P}(r'_2 < |V| < r_2 | n_2, \delta, g) \mathbb{P}(R/\sigma_0 < D_2 | n_2, g) \\
 &\quad + \mathbb{P}(|V| < r'_2 | n_2, \delta, g) \mathbb{P}(D'_2 < R/\sigma_0 < D_2 | n_2, g), \\
 p_{21} &= \mathbb{P}(|V| < r'_2 | n_2, \delta, g) \mathbb{P}(R/\sigma_0 < D'_2 | n_2, g).
 \end{aligned} \tag{3}$$

因此,

$$\mathbb{E}(M_1) = \frac{1}{1 - p_1} = \frac{1 - p_{22}}{Q}.$$

这里: $Q = 1 - p_{11} - p_{22} + p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$.

从过程开始直至第一个红色信号的时间为: $T_1 = \sum_{i=1}^{M_1} L_i$. 变量 L_i 是当前信号是绿色而获得红色信号或那个绿色信号的时间长度. L_i 是独立同分布, 具有:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(L_i = h_2) &= 1 - p_{12}, \\
 \mathbb{P}(L_i = h_2 + ih_1) &= p_{12}p_{22}^{i-1}(1 - p_{22}), \quad i = 1, 2, \dots.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\mathbb{E}(L_i) = h_2(1 - p_{12}) + \sum_{i=1}^{\infty} (h_2 + ih_1)p_{12}p_{22}^{i-1}(1 - p_{22}) = h_2 + h_1 \frac{p_{12}}{1 - p_{22}}.$$

若第一个样本是小样本, 则 ATS 是 T_1 的期望值, 可表为:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(M_1)\mathbb{E}(L_i) = \frac{h_2(1 - p_{22}) + h_1p_{12}}{Q}. \tag{4}$$

当第一个样本是大样本时, 求 ATS 要考虑红色信号以前黄色信号数 M_2 , M_2 是具有参数 $(1 - p_2)$ 的几何分布, 这里 p_2 是已知当前信号是黄色而获得另一个黄色信号的条件概率, 亦即:

$$p_2 = p_{22} + p_{21} \sum_{i=1}^{\infty} p_{11}^{i-1} p_{12}.$$

从过程开始直至第一个红色信号的时间为: $T_2 = \sum_{i=1}^{M_2} O_i$, 变量 O_i 是当前信号是黄色而获得红色信号或那个黄色信号的时间长度, O_i 是独立同分布, 具有:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(O_i = h_1) &= 1 - p_{21}, \\
 \mathbb{P}(O_i = h_1 + ih_2) &= p_{21}p_{11}^{i-1}(1 - p_{11}), \quad i = 1, 2, \dots.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\mathbb{E}(O_i) = h_1 + h_2 \frac{p_{21}}{1 - p_{11}}.$$

若第一个样本是大样本, 则 ATS 是 T_2 的期望值, 这里:

$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(M_2)\mathbb{E}(O_i) = \frac{h_1(1 - p_{11}) + h_2p_{21}}{Q}. \tag{5}$$

当第一个样本为小样本时有概率 p_0 , 为大样本时有概率 $(1 - p_0)$, ATS 由下式给出:

$$\text{ATS} = \mathbb{E}(T_1)p_0 + \mathbb{E}(T_2)(1 - p_0).$$

要获得 AATS 的表示式, 设 A = 变化发生的区间长度, R = 过程变化至其次样本的时间, S = 过程变化后从其次样本直至红色信号的时间, T = 过程变化直至红色信号的时间, 如图 1 所示. 图中“•”是样本点. 从图看出, $T = R + S$, 因此, AATS 为:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(R) + \mathbb{E}(S). \quad (6)$$

根据 Reynolds et al. 的方法^[4], 假定样本之间的区间内过程变化的概率与该区间的长度和发生该长度区间的概率之积成比例. 因此,

$$\mathbb{P}(A = h_2) = \frac{p_0 h_2}{p_0 h_2 + (1 - p_0)h_1}, \quad \mathbb{P}(A = h_1) = \frac{(1 - p_0)h_1}{p_0 h_2 + (1 - p_0)h_1}.$$

此外, 过程变化和其次样本之间的时间 R 服从均匀分布, 所以,

$$\mathbb{E}(R|A = h_i) = \frac{h_i}{2}, \quad i = 1, 2.$$

由以上三式, 得到:

$$\mathbb{E}(R) = \frac{p_0 h_2^2 + (1 - p_0)h_1^2}{2[p_0 h_2 + (1 - p_0)h_1]}. \quad (7)$$

S 的期望值依赖于变化后第一个信号的颜色 (B), 获得绿色 ($B = B_1$) 和黄色 ($B = B_2$) 信号的概率与发生变化的区间长度有关:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B = B_1) &= \mathbb{P}(B = B_1|A = h_2)\mathbb{P}(A = h_2) + \mathbb{P}(B = B_1|A = h_1)\mathbb{P}(A = h_1) \\ &= p_{11}\mathbb{P}(A = h_2) + p_{21}\mathbb{P}(A = h_1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbb{P}(B = B_2) = p_{12}\mathbb{P}(A = h_2) + p_{22}\mathbb{P}(A = h_1). \quad (9)$$

当变化后第一个信号是绿色时, $S = T_1$, 当该信号是黄色时, $S = T_2$. 所以,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{P}(B = B_1)\mathbb{E}(T_1) + \mathbb{P}(B = B_2)\mathbb{E}(T_2). \quad (10)$$

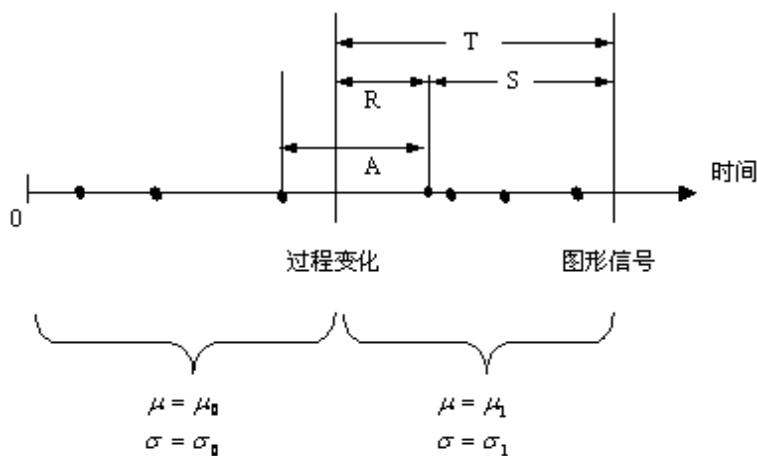


图 1 当过程变化发生在随机区间内时发现变化所要求的时间

§ 4. CVP \tilde{x} 和 R 控制图的设计

设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 当 $n = 2s + 1$ 时, 文献 [5] 给出中位值的分布函数为:

$$G(x) = P(\tilde{x} < x) = \int_0^{\Phi((x-\mu)/\sigma)} \frac{1}{B(s+1, s+1)} t^s (1-t)^s dt. \quad (11)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数, 右端积分是不完全贝塔分布函数, 记作 $I_\Phi(s+1, s+1)$ 或简记 I_Φ , 有现成的表可查.

不失一般性, 置 $\mu_0 = 0$, $\sigma_0 = 1$, 并令 $c = rc_m/\sqrt{n}$, $c' = r'c_m/\sqrt{n}$. 当 $n = 3, 5, 7, 9$ 时, $c_m = 1.160, 1.198, 1.212, 1.223^{[3]}$. 由于 $I_{1-x}(a, b) = 1 - I_x(b, a)$, 故由 (11) 式得:

$$P(|V| < r) = P(|\tilde{x}| < c) = P(\tilde{x} < c) - P(\tilde{x} < -c) = 2P(\tilde{x} < c) - 1.$$

这里 $P(\tilde{x} < c) = I_{\Phi(c)}$.

CVP $\tilde{x}-R$ 图的 12 个参数 (n_1, n_2) 、 (h_1, h_2) 、 (r'_1, r'_2) 、 (r_1, r_2) 、 (D'_1, D'_2) 和 (D_1, D_2) 可根据下列限制来决定:

$$n_1 p_0 + n_2 (1 - p_0) = n_0, \quad h_2 p_0 + h_1 (1 - p_0) = h_0, \quad (12)$$

$$\alpha_1 (2 - \alpha_1) p_0 + \alpha_2 (2 - \alpha_2) (1 - p_0) = \alpha_0 (2 - \alpha_0). \quad (13)$$

这里:

$$\alpha_i = P(|V| > r_i) = P(R/\sigma_0 > D_i), \quad i = 0, 1, 2. \quad (14)$$

式中 n_0 , h_0 , r_0 和 D_0 是常规 $\tilde{x}-R$ 图的参数. 限制 (12) 和 (13) 式保证两个联合图 (CFSSI 和 CVP 图) 的伪警报比率相同. 方程 (12) 和 (13) 的限制使实际工作者选择各对参数 (n_1, n_2) 、 (h_1, h_2) 或 (r_1, r_2) 中一个, 进而从剩余每对中选择一个元素. 各对 (r'_1, r'_2) 、 (D'_1, D'_2) 和 (D_1, D_2) 从方程 (1)、(2)、(12) 和 (14) 求得. 推荐选择一对 (n_1, n_2) 和元素 h_1 和 r_1 , 有两个理由:

(1) n_2 和 h_1 值的大小依赖于抽取每件产品所要求的时间;

(2) 推荐 CVP 图是发现过程平均值小的变化. 当变化是小时, 要求 r_1 充分大使得伪警报风险 α_1 实际上为零.

由 (12) 式中第 1 式和 (14) 式

$$p_0 = \frac{n_2 - n_0}{n_2 - n_1}, \quad \alpha_i = P(|V| > r_i) = 2[1 - P(\tilde{x} < c_i)], \quad i = 0, 1, 2.$$

代入 (13) 式, 得到:

$$\begin{aligned} & P(\tilde{x} < c_2) \\ &= 0.5 + \sqrt{0.25 + \frac{(n_2 - n_0)[1 - P(\tilde{x} < c_1)]P(\tilde{x} < c_1) - (n_2 - n_1)[1 - P(\tilde{x} < c_0)]P(\tilde{x} < c_0)}{n_0 - n_1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

由 (14) 式

$$P(R/\sigma_0 < D_i) = 1 - P(R/\sigma_0 > D_i) = 2P(\tilde{x} < c_i) - 1, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

$$P(|V| < r'_i | |V| < r_i) = \frac{2P(\tilde{x} < c'_i) - 1}{2P(\tilde{x} < c_i) - 1}.$$

根据方程(1)、(2)和(12)中第1式,得

$$\left[\frac{2P(\tilde{x} < c'_i) - 1}{2P(\tilde{x} < c_i) - 1} \right]^2 = \left[\frac{P(R/\sigma_0 < D'_i)}{P(R/\sigma_0 < D_i)} \right]^2 = p_0 = \frac{n_2 - n_0}{n_2 - n_1}.$$

因此

$$P(\tilde{x} < c'_i) = 0.5 + \frac{[P(\tilde{x} < c_i) - 0.5]\sqrt{n_2 - n_0}}{\sqrt{n_2 - n_1}}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$P(R/\sigma_0 < D'_i) = \frac{P(R/\sigma_0 < D_i)\sqrt{n_2 - n_0}}{\sqrt{n_2 - n_1}}, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

由(12)式中的第2式,得

$$h_2 = \frac{h_0(n_2 - n_1) - h_1(n_0 - n_1)}{n_2 - n_0}. \quad (19)$$

§5. CVP图同CFSSI和CVSSI图的比较

只要CVP图的设计在过程受控制时与常规图相一致,就可比较它们发现过程变化的速度.对CVP \tilde{x} -R图,规定 $h_1 = 0.1, h_2 = 1.9, 1.45, n_1 = 3, n_2 = 7, 9, h_2$ 由(19)式确定.对常规 \tilde{x} -R图(CFSSI图),规定 $h_0 = 1, r_0 = 3, n_0 = 5, D_0 = 4.92$.当 $n_0 = 5$ 时, $c_0 = r_0 \times 1.198/\sqrt{5} = 1.6073$,故 $P(|V| < r_0) = 2P(\tilde{x} < c_0) - 1 = 0.9970, P(\tilde{x} < c_0) = 0.9985$.取 $r_1 = 5$,当 $n_1 = 3$ 时, $c_1 = (5 \times 1.16)/\sqrt{3} = 3.3486, P(\tilde{x} < c_1) = 0.99988$.

当 $n_1 = 3, n_2 = 7$ 时,由(15)式,得 $P(\tilde{x} < c_2) = 0.997008$,当 $n_2 = 7$ 时, $c_2 = 1.2683, r = 2.7687$.由(17)式,得 $P(\tilde{x} < c'_1) = 0.853545$,当 $n_1 = 3$ 时, $c'_1 = 0.7026; P(\tilde{x} < c'_2) = 0.851437$,当 $n_2 = 7$ 时, $c_2 = 0.4775$.

由(16)式,当 $n_1 = 3$ 时, $D_1 = 6.138$,当 $n_2 = 7$ 时, $D_2 = 5.087$,由(18)式, $D'_1 = 2.115, D'_2 = 3.107$.

当 $n_1 = 3, n_2 = 9, h_1 = 0.1, h_2 = 1.45$ 时,同样可以计算得 $c_1, c_2, c'_1, c'_2, D_1, D_2, D'_1$ 和 D'_2 值.表1列出CVP和CVSSI图的2个方案(以 A_1 和 A_2 表示)的参数值.

表1 CVP和CVSSI \tilde{x} -R图的参数

方案	参数													
	h_1	h_2	n_1	n_2	r_1	r_2	c_1	c_2	c'_1	c'_2	D_1	D_2	D'_1	D'_2
CVP(A_1)	0.1	1.9	3	7	5	2.77	3.35	1.27	0.70	0.48	6.14	5.09	2.12	3.11
CVP(A_2)	0.1	1.45	3	9	5	2.62	3.35	1.07	0.89	0.53	6.14	5.12	2.49	3.66
CVSSI(A_1)	0.1	1.9	3	7	3	3	1.61	1.61	0.56	0.56	5.09	5.09	2.75	2.75
CVSSI(A_2)	0.1	1.45	3	9	3	3	1.61	1.61	0.71	0.71	5.09	5.09	3.09	3.09

现在计算CVP \tilde{x} -R图的AATS值.

设 $\delta = 0.5, g = 1.25$,当 $n_1 = 3$ 时,

$$P(|V| < r_1) = I_{\Phi((3.3486-0.5)/1.25)} - I_{\Phi((-3.3486-0.5)/1.25)} = 0.9996, \quad P(|V| < r'_1) = 0.5209,$$

$$P(R/\sigma_0 < D_1) = P\left(\frac{R}{\sigma} < \frac{6.138}{1.25}\right) = 0.9985, \quad P(R/\sigma_0 < D'_1) = P\left(\frac{R}{\sigma} < \frac{2.115}{1.25}\right) = 0.5447.$$

当 $n_2 = 7$ 时, $P(|V| < r_2) = 0.9090$, $P(|V| < r'_2) = 0.4401$, $P(R/\sigma_0 < D_2) = 0.93885$, $P(R/\sigma_0 < D'_2) = 0.4231$. 将以上结果代入(3)式, 得 $p_{11} = 0.2837$, $p_{12} = 0.7144$, $p_{22} = 0.6672$, $p_{21} = 0.1862$. 由(4)、(5)、(7)~(10)式, 算得 $Q = 0.1054$, $E(T_1) = 6.6770$, $E(T_2) = 4.0361$, $E(R) = 0.905$, $P(B = B_1) = 0.2788$, $P(B = B_2) = 0.7120$, $E(S) = 4.7352$, 代入(6)式, AATS = 5.6402.

当 $n_1 = 3$, $n_2 = 9$, $h_1 = 0.1$, $h_2 = 1.45$ 时, 同样可以计算 CVP \tilde{x} -R 图的 AATS 值. 表 2 对不同的 δ 和 g 值分别列出了 CVP、CFSSI 和 CVSSI 图的 AATS 值. 从表 2 看出, 当 $\delta = 0$ 和 $g = 1$ 时, 三图的 AATS 值是接近的. 当平均值或标准差发生小变化时 ($\delta < 0.5$, $g < 1.50$), CVP 图比 CVSSI 图能较快地发出过程变化的信号, 故利用 CVP 图能提高 CVSSI 图灵敏度.

表 2 CVP、CFSSI 和 CVSSI \tilde{x} -R 图的 AATS 值

δ	方案	g				δ	方案	g			
		1	1.25	1.50	2			1	1.25	1.50	2
0	CFSSI	166.4	19.93	5.89	1.68	1	CFSSI	7.15	4.29	2.68	1.29
	CVP(A_1)	167.7	11.03	2.93	1.35		CVP(A_1)	2.56	2.06	1.62	1.22
	CVSSI(A_1)	157.8	12.53	3.11	1.38		CVSSI(A_1)	2.86	2.17	1.66	1.26
	CVP(A_2)	168.4	10.68	2.74	1.18		CVP(A_2)	2.21	1.84	1.44	1.05
	CVSSI(A_2)	153.3	12.71	2.65	0.84		CVSSI(A_2)	2.14	1.59	1.12	0.71
0.5	CFSSI	43.67	11.84	4.66	1.57	2	CFSSI	0.80	0.87	0.88	0.79
	CVP(A_1)	24.01	5.64	2.38	1.31		CVP(A_1)	1.04	1.07	1.08	1.06
	CVSSI(A_1)	30.22	6.37	2.48	1.34		CVSSI(A_1)	1.08	1.10	1.12	1.10
	CVP(A_2)	19.86	5.19	2.18	1.14		CVP(A_2)	0.86	0.89	0.90	0.88
	CVSSI(A_2)	28.44	5.93	1.97	0.80		CVSSI(A_2)	0.52	0.55	0.56	0.54

§ 6. CVP \tilde{x} -R 控制图的应用

某厂机械加工车间用六角自动车床车削零件平管嘴, 其外径近似正态分布 $N(9.25, 0.015^2)$, 其公差范围为 9.2 至 9.3 毫米. 为了简化计算, 各数据前均省略整数 9. 因此, $\mu_0 = 0.25$, $\sigma = 0.015$. 使用常规控制图时, $n_0 = 5$, $h_0 = 30$ (分). 为了减少发现失控过程的平均时间, 应用 CVP \tilde{x} -R 图, 采用表 1 中第 2 个方案, 设计参数 n 为 (3, 9), h 为 (0.1, 1.45). 控制限和警戒限系数如表 1 所示. 这里: $h'_1 = 0.1 \times h_0 = 3$ (分), $h'_2 = 1.45 \times h_0 = 43.5$ (分). 当 μ 从 μ_0 变至 $0.5\sigma_0$ ($\delta = 0.5$), σ 从 σ_0 变至 $1.25\sigma_0$ ($g = 1.25$) 时, 应尽可能地被发现. 中位值和极差的控制限和警戒限的表示式和界限值如下:

$$\text{小样本: } \mu_0 \pm c_1\sigma_0 = 0.25 \pm 3.35 \times 0.015 = 0.300, 0.200, D_1\sigma_0 = 6.14 \times 0.015 = 0.092,$$

$$\mu_0 \pm c'_1\sigma_0 = 0.25 \pm 0.89 \times 0.015 = 0.263, 0.237, D'_1\sigma_0 = 2.49 \times 0.015 = 0.037;$$

$$\text{大样本: } \mu_0 \pm c_2\sigma_0 = 0.25 \pm 1.07 \times 0.015 = 0.266, 0.234, D_2\sigma_0 = 5.12 \times 0.015 = 0.077,$$

$$\mu_0 \pm c'_2\sigma_0 = 0.25 \pm 0.53 \times 0.015 = 0.258, 0.242, D'_2\sigma_0 = 3.66 \times 0.015 = 0.055.$$

用两种刻度绘制 CVP 图. 由小样本确定的 \tilde{x} 和 R 值绘在左边刻度的图形上, 大样本的 \tilde{x} 和 R 值绘在右边刻度的图形上. 因为小样本的警戒域比大样本的宽得多, 应破折左边刻度的界限, 见图 2. 图中的虚线代表控制限, 实线代表警戒限. 生产开始时, 在时间 8:44 抽取容量为 3 的第一个样本, 3 个观测值如图 2 所示, 由图知 $\tilde{x} = 0.244$, $R = 0.038$, 按左边刻度, \tilde{x} 位于中心

域, R 位于警戒域. 于是对两图均取 $n_2 = 9$, 在时间 8:47 抽取容量为 9 的大样本. 由图看出, 按右边刻度, \tilde{x} 位于警戒域, R 位于中心域, 仍取 $n_2 = 9$, 在 8:50 抽取大样本, 按右边刻度, 该样本的中位值和极差均位于中心域, 于是取 $n_1 = 3$, 在 9:34 抽取小样本. 这个程序继续进行直至中位值或极差超出控制限.

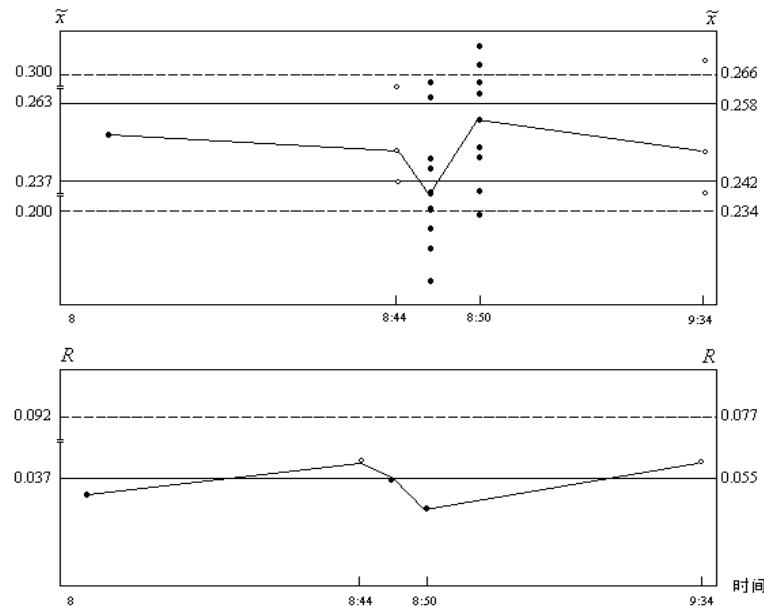


图 2 CVP \tilde{x} - R 控制图

(○容量为 3 的 \tilde{x} 和 R 值 (按左边刻度描绘), ●容量为 9 的 \tilde{x} 和 R 值 (按右边刻度描绘))

参 考 文 献

- [1] 张维铭, 刘建斌, 可变样本容量和抽样区间的联合中位值和极差控制图, 应用概率统计, **20**(1)(2004), 20–26.
- [2] Costa, A.F.B., Joint \bar{x} and R charts with variable parameters, *IIE Transactions*, **30**(1998), 505–514.
- [3] 张维铭, 统计质量控制理论与应用, 浙江大学出版社, 1992.
- [4] Reynolds, M.R., Amin, Jr.R.W., Arnold, J.C., Nachlas, J.A., \bar{x} charts with variable sampling intervals, *Technometrics*, **30**(2)(1988), 181–192.
- [5] 张维铭, 可变样本容量的质量控制图, 应用概率统计, **16**(3)(2000), 255–261.

Combine Median and Range Charts with Variable Parameters

ZHANG WEIMING ZONG YUNNAN LIU JIANBIN

(College of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, 310018)

This paper extends previous studies for processes that are monitored by the combination of \tilde{x} and R charts with variable parameters to include variable control limits based on the Costa method of joint \bar{x} and R charts with variable parameters. Calculating the average time to signal for the combination of \tilde{x} and R charts under variable parameters. The proposed charts are compared with the conventional charts, the variable sample size and sampling interval charts.