应用概率统计　第二十三卷
第三期　2007 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 3 Aug. 2007

方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性 *

吴刘仓
(昆明理工大学理学院，昆明，650093)

李会琼　吴晓坤　江绍萍
(云南大学统计系，昆明，650091)

摘　要

考虑方差分量模型 $\mathsf{E}Y = X\beta$, $\mathsf{Cov}\,(Y) = \sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i V_i$, 其中 $n\times p$ 矩阵 X 和非负定矩阵 V_i $(i = 1,2,\cdots,m)$ 都是已知的，$\beta\in R^p$, $\theta_i\geq 0$ 或 $\theta_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 均为参数．在本文中，我们在二次损失下，当 $\mu(X)\subset\mu(V)$ 时，给出了关于可估函数 $S\beta$ 的线性估计在线性估计类中可容许性的充要条件．

关 键 词：可容许性，线性估计，二次损失，方差分量模型.
学 科 分 类 号：O212.

§ 1.　引　　言

对于方差分量模型

$$\begin{cases}\mathsf{E}Y = X\beta,\\ \mathsf{Cov}\,(Y) = \sum\limits_{i=1}^{m}\theta_i V_i,\end{cases}\tag{1}$$

其中 X 为已知的 $n\times p$ 阶矩阵，$V_i\geq 0$, $i=1,2,\cdots,m$ 已知，$\beta\in R^p$, $\theta_i\geq 0$ 或 $\theta_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$ 都是参数．我们要估计线性可估函数 $S\beta$, S 为已知的 $k\times p$ 阶矩阵，选取估计类：

$$L_1=\{LY: L \text{ 为 } k\times m \text{ 阶矩阵}\},$$
$$L_2=\{LY+a: L \text{ 为 } k\times n \text{ 阶矩阵}, a\in R^k\},$$

取损失函数为二次损失函数：

$$L(d,S\beta)=(d-S\beta)'(d-S\beta).\tag{2}$$

特别，当 $d=LY$ 时，在二次损失 (2) 下的风险函数为

$$\begin{aligned}R(LY,S\beta) &= \mathsf{E}L(LY,S\beta)=\mathsf{E}(LY-S\beta)'(LY-S\beta)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\theta_i\mathrm{tr}(LV_iL')+\beta'(LX-S)'(LX-S)\beta.\end{aligned}$$

关于模型 (1), 在二次损失 (2) 及 $X\beta$ 的 Gauss-Markoff 估计存在的假定下，1987 年叶慈南[1] 在 $V_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $X=I_n$, 给出 $q'Y$ (q 为 n 维向量) 是 $p'\beta$ 在齐次线性估计类中可

* 昆明理工大学科学研究启动基金资助项目 (项目编号：校青 2006-28).
本文 2004 年 5 月 10 日收到，2006 年 6 月 6 日收到修改稿.

容许估计的充要条件；1990 年侯景臣 [2] 在二次损失下，当 $k=1$ 时，给出了 LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件；当 $k>1$ 时，只给出了 LY 在 L_1 ($LY+a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的可容许性估计的一个充分条件； 1993 年徐兴忠 [3] 将这一问题深入研究，给出了 LY 在 L_1 ($LY+a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的可容许性估计的充要条件．

去掉 $X\beta$ 的 Gauss-Markoff 估计的存在之假定，1998 年孙卓昕、徐兴忠 [5] 在当 $V=\sum_{i=1}^{m}V_i>0$ 及二次损失 (2) 下，给出了 LY 在 L_1 ($LY+a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的可容许性估计的充要条件，运用此结果，得到了共同均值模型中 $S\beta$ 线性估计在线性估计类中是可容许估计的充要条件．本文在模型 (1) 和损失函数 (2) 下，当 $\mu(X)\subset\mu(V)$ 时，得出了 LY 在 L_1 ($LY+a$ 在 L_2) 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件．

§ 2.　L_1 中的可容许性

引理 1　设 $W_i(T)=\{MT:M\in W_i\}$, $i=1,2,\cdots,m$; $\Omega(T)=\{MT:M\in\Omega\}$, 其中

$$\begin{aligned}
&W_i=\{M:\mathrm{tr}MV_iM'\le \mathrm{tr}LV_iL'\},\qquad i=1,2,\cdots,m;\\
&\Omega=\{M:(MX-S)'(MX-S)\le(LX-S)'(LX-S)\};\\
&T=V+XX',\qquad V=\sum_{i=1}^{m}V_i,
\end{aligned}$$

则 $W_i(T)$, $\Omega(T)$ 皆为凸集，　$i=1,2,\cdots,m$.

证明：　由凸集定义，可得．　　#

引理 2　在模型 (1) 和损失函数 (2) 下，　LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件是 $\Big[\bigcap_{i=1}^{m}W_i(T)\Big]\cap\Omega(T)=\{LT\}$. 其中 $T=V+XX'$, $V=\sum_{i=1}^{m}V_i$.

证明：　LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许性估计 $\Leftrightarrow$ 不存在 M, 使 MY 优于 LY $\Leftrightarrow$ 不存在 M, 使

$$\begin{cases}\mathrm{tr}MV_iM'\le\mathrm{tr}LV_iL',\qquad i=1,2,\cdots,m;\\(MX-S)'(MX-S)\le(LX-S)'(LX-S),\end{cases}\tag{3}$$

且使 (3) 中 $m+1$ 个不等式至少有一个不成立等号．

充分性：若 $\Big[\bigcap_{i=1}^{m}W_i(T)\Big]\cap\Omega(T)=\{LT\}$,

$$MT=LT\Leftrightarrow\begin{cases}MV=LV;\\MX=LX,\end{cases}$$

因此不存在优于 LY 的估计，故 LY 可容许．

必要性：反证法．假设存在 $MT\ne LT$, $MT\in\Big[\bigcap_{i=1}^{m}W_i(T)\Big]\cap\Omega(T)$, 则 $MV\ne LV$ 或者 $MX\ne LX$. 而

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\Big(\frac{M+L}{2}\Big)V_i\Big(\frac{M+L}{2}\Big)'&=\frac{1}{2}(\mathrm{tr}LV_iL'+\mathrm{tr}MV_iM')-\frac{1}{4}\mathrm{tr}(M-L)V_i(M-L)'\\&\le\mathrm{tr}LV_iL',\end{aligned}$$

当且仅当 $(M-L)V_i \neq 0$ 时，有

$$\mathrm{tr}\Big(\frac{M+L}{2}\Big)V_i\Big(\frac{M+L}{2}\Big)' < \mathrm{tr}LV_iL', \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

又

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{M+L}{2}X-S\Big)'\Big(\frac{M+L}{2}X-S\Big)\\ =\ & \frac{1}{2}(LX-S)'(LX-S)+\frac{1}{2}(MX-S)'(MX-S)-\frac{1}{4}(MX-LX)'(MX-LX)\\ \leq\ & (LX-S)'(LX-S),\end{aligned}$$

当且仅当 $(M-L)X \neq 0$ 时，有

$$\Big(\frac{M+L}{2}X-S\Big)'\Big(\frac{M+L}{2}X-S\Big) < (LX-S)'(LX-S).$$

由 $MV \neq LV$ 或者 $MX \neq LX$, 可知存在 i, $MV_i \neq LV_i$, 即 $(M-L)V_i \neq 0$ 或者 $(M-L)X \neq 0$, 所以有 $[(M+L)/2]\cdot Y$ 优于 LY, 与 LY 的可容许性矛盾. 引理证毕. #

引理 3 若 i) $\mathrm{tr}LV_iL' > 0$, $i=1,2,\cdots,m$; ii) 对任意 $M \in \{M:\mathrm{tr}MV_iM' \leq \mathrm{tr}LV_iL'\}$, $i=1,2,\cdots,m$, 有 $\mathrm{tr}(MT-LT)H' \leq 0$, iii) $HT \neq 0$, 则存在 $\alpha_i \geq 0$, $i=1,2,\cdots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i > 0$, 使

$$HT=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i LV_i,$$

其中 $T=V+XX'$, $V=\sum\limits_{i=1}^{m}V_i$.

证明: 反证法. 若结论不成立，由条件 i), iii) 及凸集分离定理知存在 H_1, 使

$$\mathrm{tr}HTH_1' > 0, \qquad \mathrm{tr}LV_iH_1' < 0, \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

取 $M_1=\alpha H_1+L$ $(0<\alpha<1)$, 则

$$\mathrm{tr}M_1V_iM_1'=\alpha^2\mathrm{tr}H_1V_iH_1'+2\alpha\mathrm{tr}LV_iH_1'+\mathrm{tr}LV_iL'.$$

因为 $\mathrm{tr}LV_iH_1' < 0$, 令 α 充分小，就有

$$\mathrm{tr}M_1V_iM_1' \leq \mathrm{tr}LV_iL', \qquad \text{对 } i=1,2,3,\cdots,m \text{ 成立}.$$

但是

$$\mathrm{tr}(M_1T-LT)H'=\alpha\mathrm{tr}H_1TH' > 0,$$

与已知条件 ii) 矛盾. 引理证毕. #

引理 4 存在 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个分割 $J_1, J_2, \cdots, J_{m_0}$ 及 $\alpha_i > 0$, 使

(i)
$$\begin{aligned}&P_2(S-LX)(XX')^{+}X'[I-V_{J_1}G_1^{-}(I-P_X)]V_{J_1}=0\\ \Leftrightarrow\ & P_2(S-LX)(X'X)^{+}X'[I-V_{J_1}G_1^{-}(I-P_X)]V_i=0, \qquad i\in J_1;\end{aligned}$$

(ii)
$$(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}=0$$
$$\Leftrightarrow\ (I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in J_1,$$

其中 $V_{J_i}=\sum\limits_{j\in J_i}\alpha_jV_j$，$i=1,2,\cdots,m_0$；$G_i=(I-P_X)(V_{J_1}+\cdots+V_{J_i})$，$i=1,2,\cdots,m_0-1$；$P_X=X(X'X)^+X'$. 若记 $\widetilde{P}_i$ 为到 $\mu[(S-LX)(X'X)^+(V_{J_1}+\cdots+V_{J_i})(I-G_i^-G_i)]$ 上的正交投影，则 $P_i=I-\widetilde{P}_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,m_0$.

证明：(i)
$$\begin{aligned}&P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}=0\\ \Leftrightarrow\ &P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}\{P_2(S-LX)(X'X)^+\\ &\cdot X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]\}'=0\\ \Leftrightarrow\ &P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in J_1.\end{aligned}$$

同理可证 (ii)
$$\begin{aligned}&(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}=0\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}\{(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}\}'=0\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in J_1.\qquad \#\end{aligned}$$

引理 5　已知 $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}=0$，$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-\cdot(I-P_X)]V_{J_1}=0$，则

(i)
$$\begin{aligned}&(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T=0.\end{aligned}$$

(ii)　若 $\mu(X)\subset\mu(V)$，则
$$\begin{aligned}&P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1\\ \Leftrightarrow\ &P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T=0.\end{aligned}$$

其中 V_{J_1}，G_1，P_2 如引理 4 中所述，$T=V+XX'$，$V=\sum\limits_{i=1}^{m}V_i$.

证明：(i)　因为
$$(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1}=0.$$

由引理 4 知等价于
$$(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in J_1.$$

所以
$$\begin{aligned}&(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i=0,\qquad i\in\{1,2,\cdots,m\}\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V=0\\ \Leftrightarrow\ &(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T=0.\end{aligned}$$

(ii) 因为 $P_A = A(A'A)^- A'$, 有 $P_A A = A$, 即 $(I-P_A)A = 0$, 所以

$$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_1} = 0.$$

由引理 4 知等价于

$$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i = 0, \qquad i \in J_1.$$

所以

$$\begin{aligned} & P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i = 0, \qquad i \in \{1,2,\cdots,m\} - J_1 \\ \Leftrightarrow\ & P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i = 0, \qquad i \in \{1,2,\cdots,m\} \\ \Leftrightarrow\ & P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\mu(X) \subset \mu(V),$$

所以，可知

$$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]XX' = 0.$$

进而

$$\begin{aligned} & P_2(S-LX)(XX')^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V = 0 \\ \Leftrightarrow\ & P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T = 0. \end{aligned}$$

引理证毕. #

引理 6 若 $P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T \neq 0$ 或者 $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^- \cdot (I-P_X)]T \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} W_2^{(2)}(T) = & \{MT : MT = P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T \\ & +F_1(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T + LT, \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵}, \\ & 0 \le D \le I_k \text{ (意含对称)}, F_1 \text{ 为 } n \times k \text{ 阶矩阵}\} \end{aligned}$$

为非单点集，其中 $LT \in W_2^{(2)}(T)$, V_{J_1}, G_1, P_2 如引理 4 中所述， $T = V + XX'$, $V = \sum\limits_{i=1}^m V_i$.

证明: 分三种情况:

(i) 若 $P_2(S-LX)(XX')^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T \neq 0$, $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T = 0$, 这时

$$\begin{aligned} W_2^{(2)}(T) = & \{MT : MT = P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T + LT \\ & \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵}, 0 \le D \le I_k \text{ (意含对称)}\}. \end{aligned}$$

从而取 $D = 0$, P 为任意 k 阶正交阵，可得

$$MT = P_2(S-LX)(XX')^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T + LT \in W_1^{(2)}(T).$$

这时由 $P_2(S-LX)(X'X)^+[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$ 知

$$MT\neq LT,$$

所以 $W_2^{(2)}(T)$ 为非单点集.

(ii) 若 $P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T=0$, $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$, 这时

$$\begin{aligned}W_2^{(2)}(T) &= \{MT:MT=F_1(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T+LT,\\ &\quad \text{其中 } F_1 \text{ 为任意 } n\times k \text{ 阶矩阵}\}.\end{aligned}$$

从而取 $F_1=I_{n\times k}$, P 为任意 k 阶正交阵，可得

$$MT=(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T+LT\in W_2^{(2)}(T).$$

这时由 $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$ 知

$$MT\neq LT,$$

所以 $W_2^{(2)}(T)$ 为非单点集.

(iii) 若 $P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$, $(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$, 这时

$$\begin{aligned}W_2^{(2)}(T) &= \{MT:MT=P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\\ &\quad +F_1(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T+LT, \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵},\\ &\quad 0\leq D\leq I_k \text{ (意含对称)}, F_1 \text{ 为任意 } n\times k \text{ 阶矩阵}\}.\end{aligned}$$

从而取 $D=0$, $F=0$, P 为任意 k 阶正交阵，可得

$$MT=P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T+LT\in W_2^{(2)}(T).$$

这时由 $P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\neq 0$ 知

$$MT\neq LT,$$

所以 $W_2^{(2)}(T)$ 为非单点集. 引理证毕. #

引理 7 若 $(S-LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L'\geq 0$ 且 $(I-P_X)V_{J_1}L'=0$,

$$\begin{aligned}A(T) &= \{MT:T=V+XX',\ \mathrm{tr}MV_iM'\leq \mathrm{tr}LV_iL',\ i\in J_1,\ (MX-S)'(MX-S)\\ &\quad \leq (LX-S)'(LX-S)\},\\ B(T) &= \{MT:MT=P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T\\ &\quad +F_1(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]T+LT, \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵},\\ &\quad 0\leq D\leq I_k \text{ (意含对称)}, F_1 \text{ 为任意 } n\times k \text{ 阶矩阵}\},\end{aligned}$$

则 $A(T)=B(T)$. 其中 V_{J_1}, G_1, P_2 如引理 4 中所述, $T=V+XX'$, $V=\sum\limits_{i=1}^{m}V_i$.

证明: 引理 7 与文 [5] 中引理 6 的证明相类似, 从略. #

引理 8[5] 对于任意 k 阶正交阵 P 和 k 阶对称 $D(0\le D\le I_k)$ 有 $\mathrm{tr}(I-PD)K\ge 0$ 成立的充要条件为 $K\ge 0$ (意含对称).

定理 1 在模型 (1) 和损失函数 (2) 下, 设 $S\beta$ 可估, $\mu(X)\subset\mu(V)$, LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 可容许估计的充要条件为: 存在 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的一个分割 $J_1,J_2,\cdots,J_{m_0}$ 及 $\alpha_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$, 使

$$\begin{aligned}
&(S-LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L'\ge 0\ (\text{意含对称}),\\
&(I-P_X)V_{J_1}L'=0,\\
&P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'P_2\ge 0\ (\text{意含对称}),\\
&(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'=0,\\
&\quad\vdots\\
&P_{m_0}(S-LX)(X'X)^+X'[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{m_0}-1})G_{m_0-1}^-(I-P_X)]V_{J_{m_0}}L'P_{m_0}\ge 0\ (\text{意含对称}),\\
&(I-P_X)[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{m_0}-1})G_{m_0-1}^-(I-P_X)]V_{J_{m_0}}L'=0,
\end{aligned}$$

其中 V_{J_i}, G_i, P_i 的意义如引理 4 中所述, $T=V+XX'$, $V=\sum\limits_{i=1}^{m}V_i$.

证明: 必要性.

分三种情况:

i) $\mathrm{tr}LV_iL'>0$, $i=1,2,\cdots,m$. 设:

$$\begin{aligned}
W_1^{(1)}(T)&=\{MT:\mathrm{tr}MV_iM'\le\mathrm{tr}LV_iL',\ i=1,2,\cdots,m\},\\
W_2^{(1)}(T)&=\{MT:(MX-S)'(MX-S)\le(LX-S)'(LX-S)\}.
\end{aligned}$$

因为 LY 可容许, 则 $W_1^{(1)}(T)\cap W_2^{(1)}(T)=\{LT\}$, 由凸集分离定理, 知存在 H_1 使

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(MT-LT)H_1'\le 0, &&\text{当 } MT\in W_1^{(1)}(T),\\
&\mathrm{tr}(MT-LT)H_1'\ge 0, &&\text{当 } MT\in W_2^{(1)}(T),
\end{aligned}$$

并且至少有一个 M_0T, $\mathrm{tr}M_0TH_1\ne 0$ (因为 $W_1^{(1)}(T)$ 和 $W_2^{(1)}(T)$ 都非单点集) 所以 $H_1'T\ne 0$, 由引理 3, 知存在不全为 0 的数 $\alpha_i^{(1)}\ge 0$, 使

$$H_1T=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{(1)}LV_i.$$

取 $J_1=\{i:\alpha_i^{(1)}>0\}$, $\alpha_i=\alpha_i^{(1)}$, 当 $i\in J_1$, 则 $H_1T=LV_{J_1}$, 且取 $MT\in W_2^{(1)}(T)$, 由引理 8 及 $\mathrm{tr}(MT-LT)H'\ge 0$ 得

$$\mathrm{tr}(I-PD)(S-LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L'+\mathrm{tr}(F-L)(I-P_X)V_{J_1}L'\ge 0. \tag{4}$$

P 为 k 阶正交阵， D 为 k 阶对称阵 $(0 \le D \le I_k)$, F 为任意 $n \times k$ 阶矩阵，取 $F = L$, 得

$$\mathrm{tr}(I - PD)(S - LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L' \ge 0.$$

由引理 8, 得

$$(S - LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L' \ge 0.$$

于是对任意 F, 我们有

$$\mathrm{tr}(F - L)(I - P_X)V_{J_1}L' \ge 0. \tag{5}$$

事实上，设 F_0 为 $k \times n$ 阶矩阵，使 $\mathrm{tr}(F_0 - L)(I - P_X)V_{J_1}L' < 0$, 则对任意 $\alpha > 0$, 有 $\alpha\mathrm{tr}(F_0 - L) \cdot(I - P_X)V_{J_1}L' < 0$, α 充分大时有

$$\mathrm{tr}(I - PD)(S - LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L' + \mathrm{tr}\alpha(F_0 - L)(I - P_X)V_{J_1}L' < 0,$$

与 (4) 式矛盾．所以 (5) 式对任意的 F 成立，于是 $-\mathrm{tr}F(I - P_X)V_{J_1}L' \le 0$ 又 $\mathrm{tr}(-F)(I - P_X) \cdot V_{J_1}L' \ge 0$, 所以对任意 F, 有 $\mathrm{tr}F(I - P_X)V_{J_1}L' = 0$, $F = LV_{J_1}(I - P_X)$, 则有 $(I - P_X)V_{J_1}L' = 0$.

若 $J_1 = \{1, 2, \cdots, m\}$, 则必要性得证．否则，设

$$\begin{aligned} W_1^{(2)}(T) &= \{MT : \mathrm{tr}MV_iM' \le \mathrm{tr}LV_iL',\ i \in \{1, 2, \cdots, m\} - J_1\}, \\ W_2^{(2)}(T) &= \{MT : \mathrm{tr}MV_iM' \le \mathrm{tr}LV_iL',\ i \in J_1,\ (MX - S)'(MX - S) \\ &\quad \le (LX - S)'(LX - S)\}, \end{aligned}$$

由引理 7, 知

$$\begin{aligned} W_2^{(2)}(T) &= \{MT : MT = P_2(I - PD)P_2(S - LX)(X'X)^+X'[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]T \\ &\quad + F_1(I - P_X)[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]T + LT, \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵}, \\ &\quad 0 \le D \le I_k\ (\text{意含对称}),\ F_1 \text{ 为任意 } n \times k \text{ 阶矩阵}\}. \end{aligned}$$

由 LY 的可容许性知， $W_1^{(2)}(T) \cap W_2^{(2)}(T) = \{LT\}$, 根据凸集分离定理，知存在 H_2, 使

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(MT - LT)H' \le 0, \qquad \text{当 } MT \in W_1^{(1)}(T), \\ &\mathrm{tr}(MT - LT)H' \ge 0, \qquad \text{当 } MT \in W_2^{(2)}(T). \end{aligned}$$

若

$$P_2(S - LX)(X'X)^+X'[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]V_i = 0, \qquad i \in \{1, 2, \cdots, m\} - J_1,$$

且

$$(I - P_X)[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]V_i = 0, \qquad i \in \{1, 2, \cdots, m\} - J_1,$$

由引理 5, 知

$$P_2(S - LX)(X'X)^+X'[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]T = 0,$$

且

$$(I - P_X)[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]T = 0.$$

则取 $J_2=\{1,2,\cdots,m\}-J_1$, $\alpha_i=1$, 当 $i\in J_2$, 则必要性得证.

否则, $P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1$ 和 $(I-P_X)\cdot[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_i$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1$ 至少有一个不为零. 由引理 6 知, $W_2^{(2)}(T)$ 为非单点集, 所以 $H_2T\neq 0$. 由引理 3, 存在不全为零的 $\alpha_i^{(2)}\geq 0$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1$ 使

$$H_2T=\sum_{i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1}^{m}\alpha_i^{(2)}LV_i.$$

取 $J_2=\{i:\alpha_i^{(2)}>0\}$, $\alpha_i=\alpha_i^{(2)}$, 当 $i\in J_2$, 则 $H_2T=LV_{J_2}$, 任取 $MT\in W_2^{(2)}(T)$, 由

$$\mathrm{tr}(MT-LT)H_2'\geq 0$$

可知

$$\mathrm{tr}(M-L)V_{J_2}L'\geq 0.$$

有

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'\\&+\mathrm{tr}F_1(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'\geq 0.\end{aligned}$$

取 $F_1=0$, 得

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}P_2(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'\\=&\ \mathrm{tr}(I-PD)P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'P_2\geq 0.\end{aligned}$$

由引理 8, 得

$$P_2(S-LX)(X'X)^+X'[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'P_2\geq 0.$$

再由 F_1 的任意性, 与前面证法相同可得

$$(I-P_X)[I-V_{J_1}G_1^-(I-P_X)]V_{J_2}L'=0.$$

若 $J_2=\{1,2,\cdots,m\}-J_1$, 则必要性得证. 否则, 设

$$\begin{aligned}W_1^{(3)}(T)&=\{MT:\mathrm{tr}MV_iM'\leq\mathrm{tr}LV_iL',\ i\in\{1,2,\cdots,m\}-J_1-J_2\},\\W_2^{(3)}(T)&=\{MT:\mathrm{tr}MV_iM'\leq\mathrm{tr}LV_iL',\ i\in J_1+J_2,\ (MX-S)'(MX-S)\\&\qquad\leq(LX-S)'(LX-S)\},\end{aligned}$$

与引理 7 证法相同, 知

$$\begin{aligned}W_2^{(3)}(T)=&\ \{MT:MT=P_3(I-PD)P_3(S-LX)(X'X)^+X'[I-(V_{J_1}+V_{J_2})G_2^-(I-P_X)]T\\&+F_2(I-P_X)[I-(V_{J_1}+V_{J_2})G_2^-(I-P_X)]T+LT,\ \text{其中 } P \text{ 为 } k \text{ 阶正交阵},\\&\ 0\leq D\leq I_k,\ D \text{ 为 } k \text{ 阶对称阵},\ F_2 \text{ 为任意 } n\times k \text{ 阶矩阵}\}.\end{aligned}$$

依次下去，必要性得证．

ii) 存在 i, 使 $\mathrm{tr}LV_iL'=0$, 但不全为 0, 取 $J_1=\{i:LV_i=0\}$, 令 $\alpha_i=1$, $i\in J_1$, 则 $(S-LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L'=0$, $(I-P_X)V_{J_1}L'=0$.

再沿用 i) 的过程，知必要性得证．

iii) $\mathrm{tr}LV_iL'=0$, $i=1,2,\cdots,m$. 取 $J_1=\{1,2,\cdots,m\}$, $\alpha_i=1$, $i=1,2,\cdots,m$, 必要性成立．

充分性 (反正法).

若存在 M 使 MY 优于 LY, 则有

$$\begin{cases}\mathrm{tr}MV_iM'\le \mathrm{tr}LV_iL', & i=1,2,\cdots,m,\\ (MX-S)'(MX-S)\le (LX-S)'(LX-S), & \end{cases}$$

所以

$$MT\in W_2^{(1)}(T),W_2^{(2)}(T),\cdots,W_2^{(m_0)}(T).$$

由必要性证明知,

$$\begin{aligned} M &= L+(I-PD)(S-LX)(X'X)^+X'+(F-L)(I-P_X),\\ M &= L+P_i(S-LX)(X'X)^+X'[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{i-1}})G_{i-1}^-(I-P_X)]\\ &\quad +F_{i-1}(I-P_X)[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{i-1}})G_{i-1}^-(I-P_X)], \qquad i=1,2,\cdots,m_0,\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(M-L)V_{J_1}L'\\ =\ &\mathrm{tr}(I-PD)(S-LX)(X'X)^+X'V_{J_1}L'+\mathrm{tr}(F-L)(I-P_X)]V_{J_1}L',\\ &\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}L'\\ =\ &\mathrm{tr}P_i(I-PD)P_i(S-LX)(X'X)^+X'[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{i-1}})G_{i-1}^-(I-P_X)]V_{J_i}L'\\ &+\mathrm{tr}F_{i-1}(I-P_X)[I-(V_{J_1}+\cdots+V_{J_{i-1}})G_{i-1}^-(I-P_X)]V_{J_i}L', \qquad i=2,\cdots,m_0.\end{aligned}$$

由定理条件，得

$$\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}L'\ge 0, \qquad i=1,2,\cdots,m_0.$$

另一方面，由

$$\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}(M-L)'+2\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}L'\le 0 \tag{6}$$

得

$$\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}L'\le 0, \qquad i=1,2,\cdots,m_0.$$

所以

$$\mathrm{tr}(M-L)V_{J_i}L'=0.$$

将它代入 (6) 得 $(M-L)V_{J_i}=0$, $i=1,2,\cdots,m_0$. 于是 $(M-L)V=0$, 即 $MV=LV$. 又因为 $\mu(X)\subset\mu(V)$, 所以 $(M-L)X=0$, 即 $MXX'=LXX'$. 所以 $MT=LT$. 充分性得证． #

§3. L_2 中的可容许性

定理 2 在模型 (1) 和损失函数 (2) 下，设 $S\beta$ 可估，$\mu(X)\subset\mu(V)$, 则 $LY+a$ 在 L_2 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件为：

i) L 满足定理 1 中的条件;

ii) $a\in\mu(LX-S)$.

证明： 见 [3] 中定理 2 的证明． #

参 考 文 献

[1] 叶慈南，方差分量模型中回归系数的估计的可容许性， *应用概率统计*, **9(4)**(1993), 337–341.

[2] 侯景臣, 方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性的若干结果，*应用概率统计*, **6(1)**(1990), 22–32.

[3] 徐光忠, 二次损失下方差模型中回归系数线性估计的可容许性，*系统科学与数学*, **13(14)**(1993), 363–369.

[4] 王学仁，詹金龙，陈建宝，方差分量线性模型中回归系数和参数的所有可容许线性估计， *数学学报*, **37(5)**(1994), 653–662.

[5] 孙卓昕，徐兴忠，二次损失下方差分量模型中回归系数的线性容许估计， *应用数学学报*, **2(3)**(1998), 393–403.

[6] 王松桂， *线性模型的理论及应用*, 安徽教育出版社， 1987.

Admissibility of Linear Estimators of Regression Coefficient in a Variance Component Model

Wu Liucang

(*The Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming, 650093*)

Li Huiqiong Wu Xiaokun Jiang Shaoping

(*The Department of Statistics, Yunnan University, Kunming, 650091*)

Consider the variance component model $\mathsf{E}Y=X\beta$, $\mathsf{Cov}\,(Y)=\sum\limits_{i=1}^{m}\theta_iV_i$, where X: $n\times p$ and $V_i\geq 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ are known, $\beta\in R^p$, $\theta_i\geq 0$ or $\theta_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ are parameters. In this paper, when $\mu(X)\subset\mu(V)$, the sufficient and necessary conditions for a linear estimable estimator of $S\beta$ to be admissible in the class of all linear estimators are given under quadratic loss function.