应用概率统计 第二十四卷
第六期 2008年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.6 Dec. 2008

随机利率下有股利分配的可转换债券的鞅定价

朱 丹
(湖南财经高等专科学校, 长沙, 410205)

杨向群
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙, 410081)

摘 要

从定量的角度分析了随机利率下有股利分配的可转换债券的价值构成, 并在股票价格服从对数正态分布的条件下, 利用Martingale Pricing方法推导出其定价公式.

关键词: 可转换债券, 随机利率, 期权, 风险中性定价, Girsanov定理.

学科分类号: F830.9, O211.63.

§1. 引 言

可转换债券是一种企业债券和股票期权相结合的混合证券. 首先, 它具有企业债券的一般特征, 即, 债券到期后, 若债券持有人没有行使转换的权利, 发行人必须偿还本金及利息; 其次, 它在本质上属于股票期权, 即投资者在购入该债券时获得在某个时间按敲定的转换价格转换成股票的权利. 但因为它和一般期权相比具备基本的利率保证, 所以可转换债券具有比一般期权更高的价值. 20世纪90年代, 我国在国内及境外均开始尝试发行可转换债券.

对可转换债券定价问题的最早研究当属Ingersoll[2]. 他在假定可转换债券一次性完全转换成股票的条件下研究了可转换债券的定价问题, 结论是可转换债券的市场价值是普通债券的市场价值与权证市场价值之和, 但具体定价参数仍难以确定. 其后的研究多集中在可转换债券的转换价格及赎回策略的制定上[3, 4]. 郑小迎、陈金贤在假定股票价格服从对数正态分布的条件下, 利用无风险套利原理, 得到了关于可转换债券的定价微分方程[5].

在完备市场环境下, 对于普通的可转换债券, 利用鞅方法定价(即风险中性定价理论), 已经得到了解析定价公式[1], 但对于随机利率下有股利分配的较复杂的可转换债券, 到目前为止, 它的定价还没有得到解析形式的公式. 本文利用鞅论及随机微分方程理论, 在随机利率下考虑问题, 给出了有股利分配的可转换债券的定价公式.

§2. 可转换债券的构成要素及价值组成

一般而言, 普通可转换债券具有以下一些要素:

1)基本股票: 它是可转换债券的标的物, 即可转换债券可以转换成的那种股票; 2)票面利率: 它给予投资者一个最低收益的保证, 但通常低于普通债券利率和银行利率, 以反映可

本文2005年9月5日收到, 2006年6月26日收到修改稿.

转换债券期权的价值; 3)转换价格: 即债券发行时就确定了的将债券转换成股票时应付的每股价格, 一般高于发行时股票的市场价格, 否则就意味着贴现发行; 4)转换期限: 即可转换债券的有效期限; 对于本文所研究的可转换债券, 其构成要素还包括: 5)连续红利率: 它是可转换债券对应股票的红利率, 一般为时间的非随机函数; 6)股利分配条款: 所谓股利分配条款, 它是发行公司为吸引投资者而实行的在约定时刻对投资者分配红利的策略.

§3. 模型的假设及概率测度的转换

1. 模型假设

在给定的市场及带流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P},(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T})$

1) 市场为有效的无摩擦市场, 有两种资产: 一种无风险资产, 称为债券或银行存款, 其价格过程满足方程

$$\mathrm{d}B_t=\mu_1(t)B_t\mathrm{d}t+\sigma_1(t)B_t\mathrm{d}W_t^{\mathsf{P}},\qquad B_T=1,\tag{3.1}$$

$B_t=B(t,T)$为T时刻到期的零息票债券在时刻t的价格; 同时, 定义$b_t=b(t,\tau)$表示τ $(\tau\le T)$时刻到期的零息票债券在时刻t的价格, $b_\tau=b(\tau,\tau)=1$, $B_\tau=B_t/b_t$; 另一种是可转换债券, 其对应的基本股票价格过程满足方程

$$\mathrm{d}S_t=(\mu_2(t)-q(t))S_t\mathrm{d}t+\sigma_2(t)S_t\mathrm{d}W_t^{\mathsf{P}},\tag{3.2}$$

S_t表示股票在t时刻的价格, 其中, $\mu_i(t)$, $\sigma_i(t)$ $(i=1,2)$分别为相应价格过程在时刻t的瞬间期望报酬率, 瞬间标准差, $\mu_i(t)$, $\sigma_i(t)$, $q(t)$均为时间t的非随机函数, 且满足可积条件:

$$\int_0^T\mu_i(t)\mathrm{d}t<\infty,\qquad\int_0^T\sigma_i^2(t)\mathrm{d}t<\infty,$$

$q(t)$为连续红利率, $\mathrm{d}W_t^{\mathsf{P}}$表示在概率测度$\mathsf{P}$下布朗运动在$t$时刻的瞬间增量.

2) 股票交易连续进行(即在任何时刻均可进行), 不存在交易费用及交易税;

3) 债券利息按连续复利计算;

4) 可转换债券无违约风险.

由于红利支付往往会引起股票价格的下降, 因此, 对于有红利分配的可转换债券, 发行公司多数附有转换调整条件, 在股利分配后转换价格将进行调整, 这就使有红利支付的可转换债券实际上成为一种特殊的重置期权. 它规定: 对于到期时刻为T, 原定转换价格为C_v的可转换债券, 在事先约定的股票发息时刻τ, 债券持有者有权对原定的转换价格重设: 若$S_\tau\ge C_v$, 他不使用此权利; 若$S_\tau<C_v$, 他使用此权利, 将转换价格重设为S_τ, S_τ为τ时刻的股票价格. 其到期现金流量(或到期值)以公式表示如下: 到期收益V_T为

$$V_T=\begin{cases}P_b, & S_T<P_b\cdot C_v/M,\ S_\tau\ge C_v,\\(M/C_v)\cdot S_T, & S_T\ge P_b\cdot C_v/M,\ S_\tau\ge C_v,\\P_b, & S_T<P_b\cdot S_\tau/M,\ S_\tau<C_v,\\(M/S_\tau)\cdot S_T, & S_T\ge P_b\cdot S_\tau/M,\ S_\tau<C_v.\end{cases}$$

其中, V_T代表可转换债券到期时刻(T)的价值, $P_b=Me^{iT}$代表以票面利率i计算的单纯的债券价值, M代表可转换债券的面值, C_v代表约定的转换价格, S_τ代表τ时刻的股价.

2. 概率测度的转换

为简化计算, 下面先利用Girsanov定理进行概率测度的转换. 令$Z_t=S_t/B_t$, 将Itô公式作用于S_t/B_t, 并结合(3.1)、(3.2)式可得:

$$\mathrm{d}Z_t=Z_t[(\mu_2(t)-\mu_1(t)-q(t)+\sigma_1(t)(\sigma_1(t)-\sigma_2(t)))\mathrm{d}t+(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))\mathrm{d}W_t^{\mathsf{P}}].$$

再令

$$\theta_t=\frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)+\sigma_1(t)(\sigma_1(t)-\sigma_2(t))}{\sigma_2(t)-\sigma_1(t)},$$

θ_t是时间t的非随机函数, 假定$\sigma_2(t)-\sigma_1(t)\neq 0$, 则

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2\mathrm{d}s\Big)<\infty.$$

定义测度Q: 满足

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{Q}}{\mathrm{d}\mathsf{P}}=\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T\theta_t^2\mathrm{d}t-\int_0^T\theta_t\mathrm{d}W_t^{\mathsf{P}}\Big).$$

由Girsanov定理, 可知Q是P的等价鞅测度, 且

$$W_t^{\mathsf{Q}}=W_t^{\mathsf{P}}+\int_0^t\theta_s\mathrm{d}s,$$

W_t^{Q}是Q测度下的标准布朗运动. 在Q测度下Z_t满足

$$\mathrm{d}Z_t=Z_t[-q(t)\mathrm{d}t+(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}],$$

即

$$Z_T=Z_t\exp\Big[-\int_t^T q(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_t^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s+\int_t^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}\Big].\tag{3.3}$$

再定义测度R: 满足

$$\frac{\mathrm{d}\mathsf{R}}{\mathrm{d}\mathsf{Q}}=\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s+\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}\Big).$$

由Girsanov定理, 可知R是Q的等价鞅测度, 且

$$\mathrm{d}W_t^{\mathsf{R}}=\mathrm{d}W_t^{\mathsf{Q}}-(\sigma_2(t)-\sigma_1(t))\mathrm{d}t,$$

W_t^{R}是R测度下的标准布朗运动. 在R测度下

$$Z_T=Z_t\exp\Big[-\int_t^T q(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_t^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s+\int_t^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{R}}\Big],\tag{3.4}$$

且

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s+\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}\Big)I_A\Big]=\mathsf{E}^{\mathsf{R}}[I_A].\tag{3.5}$$

这里I_A是A的示性函数, $A\in F_t$.

§4. 随机利率下有股利分配的可转换债券的Martingale定价

为方便起见, 先约定一些符号: 用

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(1/2)\cdot s^2}\mathrm{d}s$$

表示标准正态分布函数,

$$N(x,y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-(u^2-2\rho uv+v^2)/[2(1-\rho^2)]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

表示二元标准正态分布函数, P^{Q}, P^{R}分别表示在测度Q、R下的概率.

根据有股利分配的可转换债券到期现金流量V_T的定义, 它在现在(0时刻)的价值V_0为:

$$\begin{aligned}V_0&=B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[V_T]\\&=B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[P_bI_{S_T<P_b\cdot C_v/M,S_\tau\geq C_v}]+B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\frac{M\cdot S_T}{C_v}I_{S_T\geq P_b\cdot C_v/M,S_\tau\geq C_v}\Big]\\&\quad+B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[P_bI_{S_T<P_b\cdot S_\tau/M,S_\tau<C_v}]+B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\frac{M\cdot S_T}{S_\tau}I_{S_T\geq P_b\cdot S_\tau/M,S_\tau<C_v}\Big].\end{aligned}$$

令上式中的第一、二、三、四大项分别为I_1, I_2, I_3, I_4, 现计算I_1. 注意到$Z_T=S_T$, $S_t=B_tZ_t$, 利用(3.3)、(3.4)、(3.5)式, 则

$$\begin{aligned}I_1&=B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[P_bI_{S_T<P_b\cdot C_v/M,S_\tau\geq C_v}]=B_0P_b\mathsf{P}^{\mathsf{Q}}\Big(S_T<\frac{P_b\cdot C_v}{M},S_\tau\geq C_v\Big)\\&=B_0P_b\\&\quad\cdot\mathsf{P}^{\mathsf{Q}}\Bigg(\frac{\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}}{\sqrt{\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}<\frac{\ln\frac{P_b\cdot C_v}{M}-\ln Z_0+\int_0^Tq(s)\mathrm{d}s+\frac12\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}},\\&\qquad\frac{\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}}{\sqrt{\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\geq\frac{\ln C_v-\ln Z_0-\ln B_\tau+\int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s+\frac12\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\Bigg)\\&=B_0P_bN(a_1,-b_1,\rho_1),\end{aligned}$$

其中,

$$a_1=\frac{\ln\frac{P_b\cdot C_vB_0}{MS_0}+\int_0^Tq(s)\mathrm{d}s+\frac12\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}},$$

$$b_1=\frac{\ln\frac{C_vb_0}{S_0}+\int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s+\frac12\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\Big[\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s\Big] \Big/ \Big[\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s\Big]}.$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= B_0 \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\frac{M}{C_v} S_T I_{S_T \geq P_b \cdot C_v/M, S_\tau \geq C_v}\Big] \\
&= B_0 \frac{M}{C_v} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[Z_0 \exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}\Big) I_{S_T \geq P_b \cdot C_v/M, S_\tau \geq C_v}\Big] \\
&= S_0 \frac{M}{C_v} \exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s\Big) \mathsf{P}^{\mathsf{R}}\Big(S_T \geq \frac{P_b \cdot C_v}{M}, S_\tau \geq C_v\Big) \\
&= S_0 \frac{M}{C_v} \exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s\Big) \\
&\quad \cdot \mathsf{P}^{\mathsf{R}}\Bigg(\frac{\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{R}}}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}} \geq \frac{\ln \frac{P_b \cdot C_v}{M} - \ln Z_0 + \int_0^T q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}}, \\
&\quad \frac{\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{R}}}{\sqrt{\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}} \geq \frac{\ln C_v - \ln Z_0 - \ln B_\tau + \int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}}\Bigg) \\
&= S_0 \frac{M}{C_v} \exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s\Big) N(-a_2, -b_2, \rho_1),
\end{aligned}$$

其中,

$$a_2 = \frac{\ln \dfrac{P_b \cdot C_v B_0}{M S_0} + \int_0^T q(s)\mathrm{d}s - \dfrac{1}{2}\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}},$$

$$b_2 = \frac{\ln \dfrac{C_v b_0}{S_0} + \int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s - \dfrac{1}{2}\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^\tau (\sigma_2(s) - \sigma_1(s))^2 \mathrm{d}s}}.$$

由于股票价格随机过程呈现马尔可夫性质, 即在已知现在的条件下, 股票价格在前后期的行为是独立的, 所以

$$\begin{aligned}
I_3 &= B_0 \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[P_b I_{S_T < P_b \cdot S_\tau/M, S_\tau < C_v}] \\
&= B_0 P_b \mathsf{P}^{\mathsf{Q}}\Big(\ln Z_T < \ln \frac{P_b \cdot S_\tau}{M}\Big) \mathsf{P}^{\mathsf{Q}}(\ln B_\tau Z_\tau < \ln C_v)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B_0 P_b \mathsf{P}^{\mathsf{Q}}\Bigg(\frac{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}<\frac{\ln\dfrac{P_b\cdot B_\tau}{M}+\displaystyle\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\Bigg)\\
&\quad\cdot \mathsf{P}^{\mathsf{Q}}\Bigg(\frac{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}<\frac{\ln C_v-\ln Z_0-\ln B_\tau+\displaystyle\int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\Bigg)\\
&= B_0 P_b N(a_3)N(b_1),
\end{aligned}
$$

其中,

$$
a_3=\frac{\ln\dfrac{P_b\cdot B_0}{M\cdot b_0}+\displaystyle\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}.
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= B_0\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\frac{M}{S_\tau}S_T I_{S_T\ge P_b\cdot S_\tau/M,S_\tau<C_v}\Big]\\
&= \frac{B_0}{B_0/b_0}M\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\Big[\exp\Big(-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{Q}}\Big)I_{S_T\ge P_b\cdot S_\tau/M,S_\tau<C_v}\Big]\\
&= b_0 M\exp\Big(-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s\Big)\mathsf{E}^{\mathsf{R}}[I_{S_T\ge P_b\cdot S_\tau/M,S_\tau<C_v}]\\
&= b_0 M\exp\Big(-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s\Big)\\
&\quad\cdot \mathsf{P}^{\mathsf{R}}\Bigg(\frac{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{R}}}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\ge\frac{\ln\dfrac{P_b\cdot B_\tau}{M}+\displaystyle\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\Bigg)\\
&\quad\cdot \mathsf{P}^{\mathsf{R}}\Bigg(\frac{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))\mathrm{d}W_s^{\mathsf{R}}}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}<\frac{\ln C_v-\ln Z_0-\ln B_\tau+\displaystyle\int_0^\tau q(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}\Bigg)\\
&= b_0 M\exp\Big(-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s\Big)N(-a_4)N(b_2),
\end{aligned}
$$

其中,

$$
a_4=\frac{\ln\dfrac{P_b\cdot B_0}{M\cdot b_0}+\displaystyle\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T(\sigma_2(s)-\sigma_1(s))^2\mathrm{d}s}}.
$$

从而得到

定理 4.1　在随机利率下, 有股利分配的可转换债券在0时刻的无套利价格为:

$$\begin{aligned} V_0 \;=\;& B_0Me^{iT}N(a_1,-b_1,\rho_1)+S_0\frac{M}{C_v}\exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s\Big)N(-a_2,-b_2,\rho_1) \\ &+B_0Me^{iT}N(a_3)N(b_1)+b_0M\exp\Big(-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s\Big)N(-a_4)N(b_2). \end{aligned}$$

作为定理4.1的特殊情形, 有以下重要推论

推论 4.1　若市场无风险利率$r(t)$、股价瞬时波动率$\sigma(t)$、连续股利率$q(t)$均为时间t的非随机函数, 则有股利分配的可转换债券在现在(0时刻)的无套利价格为:

$$\begin{aligned} V_0 \;=\;& \exp\Big(-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\Big)Me^{iT}N(\widetilde{a}_1)N(-\widetilde{b}_1) \\ &+S_0\frac{M}{C_v}\exp\Big(-\int_0^T q(s)\mathrm{d}s\Big)N(-\widetilde{a}_1)N(-\widetilde{b}_1) \\ &+\exp\Big(-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\Big)Me^{iT}N(\widetilde{a}_2)N(\widetilde{b}_1) \\ &+M\exp\Big(-\int_0^\tau r(s)\mathrm{d}s-\int_\tau^T q(s)\mathrm{d}s\Big)N(-\widetilde{a}_1)N(\widetilde{b}_1), \end{aligned}$$

其中,

$$\widetilde{a}_1=\frac{\ln\dfrac{P_b\cdot C_v}{M}-\ln S_0+\displaystyle\int_0^T\Big(r(s)+q(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$\widetilde{b}_1=\frac{\ln C_v-\ln S_0+\displaystyle\int_0^\tau\Big(r(s)+q(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^\tau\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$\widetilde{a}_2=\frac{\ln\dfrac{P_b}{M}+\displaystyle\int_\tau^T\Big(r(s)+q(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\Big)\mathrm{d}s}{\sqrt{\displaystyle\int_\tau^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}.$$

本文在普通可转换债券的基础上附加股利分配条款, 并让利率随机化, 利用鞅方法定价, 得到了可转换债券的价格公式, 并推导出了一般情况下普通可转换债券的定价公式.

参 考 文 献

[1] 朱丹, 杨向群, 可转换债券的鞅定价, 统计与决策, **4(188)**(2005), 19–21.

[2] Ingersoll, J., A contingent claim valuation of convertible securities, *Journal of Financial Economics*, **4**(1977), 289–322.
[3] 闻亮, 张秋来, 可转换债券的定价模型与投资策略分析, 中南民族大学学报(自然科学版), **9**(2003), 88–89.
[4] 董腊发, 周虹, 论可转换债券及其价值构成, 统计与决策, **6**(1997), 18–20.
[5] 郑小迎, 陈金贤, 关于可转换债券定价模型的研究, 系统工程, **5**(1999), 1–5.
[6] Black, F. and scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Econcmy*, **81**(May-June 1973), 637–659.
[7] Steven Shreve, *Stochastic Calculus and Finance*, 1997.
[8] 陈松男, 金融工程学, 上海: 复旦大学出版社, 2002.
[9] 洛伦兹·格利茨著, 唐旭等译, 金融工程学, 北京: 经济科学出版社, 1998.

The Martingale Pricing for Convertible Bond with Dividend-Paying under Stochastic Interest

Zhu Dan
(*Hunan Financial and Economic College, Changsha, 410205*)

Yang Xiangqun
(*Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha, 410081*)

The value composition of the convertible bond is discussed in a quantitative analysis. Under stochastic interest, the stock has dividend-paying, the pricing formulas of the convertible bond are obtained by means of Martingale approach (risk-neutral valuation).

Keywords: Convertible bond, stochastic interest, options, risk-neutral valuation, Girsanov's theorem.

AMS Subject Classification: 60G44.