

# 限制参数空间双侧检验 $P$ 值的修正 及与贝叶斯证据的调停一致

傅军和

(上海外国语大学国际工商管理学院信息管理系数学教研室, 上海, 200083)

## 摘要

本文研究了在限制参数空间双侧检验的  $P$  值的修正及基于修正  $P$  值的贝叶斯检验和经典统计检验的调停。研究表明 Wang (2006) 给出的修正  $P$  值存在重要缺陷，并给出了一种新的修正  $P$  值，该修正  $P$  值具有较合理的性质，并由此可一定程度缓和调停贝叶斯检验和经典统计检验的存在的冲突。

关键词：修正  $P$  值，证据，贝叶斯，经典统计。

学科分类号：O212.1, O212.8.

## §1. 引言

在一些情况下，贝叶斯检验和经典统计(频率)检验会表现出冲突。举个例子：设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $N(\theta, \sigma^2)$  的一组样本， $\sigma^2$  已知。考虑  $H_0 : \theta = \theta_0$  对  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ 。设  $\theta$  的先验分布为： $P(\theta = \theta_0) = \pi_0$ ，当  $\theta \neq \theta_0$  密度为  $\pi_1 g_1(\theta)$ ，其中  $\pi_1 = 1 - \pi_0$ ，且  $g_1(\theta)$  为正常的密度函数，例如正态密度。当  $n$  足够大且  $z = \sqrt{n}|\bar{x} - \theta_0|/\sigma$  相对固定且对应于一个很小的经典统计  $P$  值，但  $H_0$  的后验概率  $\alpha_0$  可以接近于 1。这就是著名的 Lindley 悖论<sup>[1][2]</sup>，这是非常极端的冲突的例子。另外 Berger 和 Sellke (1987) 的研究表明：在上述问题中，设  $\pi_0 = 0.5$ ，对任意  $n$ ，当  $g_1(\theta)$  可取非常多种类的先验分布时， $\alpha_0$  的下确界明显大于  $P$  值，这称为 Berger-Sellke 现象。经典统计  $P$  值很小，意味拒绝  $H_0$  的证据充分，而后验概率  $\alpha_0$  很大，说明贝叶斯检验和经典统计检验存在冲突。这些研究导致了对贝叶斯检验和经典统计检验存在的冲突进行研究，也导致了对存在的冲突进行调停和解的研究的开始。

在对存在的冲突的研究中，对贝叶斯方法的怀疑其一是先验分布的选择，先验分布中的  $\pi_0$ ，先验密度  $g_1(\theta)$  的类型和超参数的选择都将影响  $\alpha_0$ 。合理的贝叶斯方法给出的  $\alpha_0$  应该得到相对于冲突中的  $\alpha_0$  更小的值。Lindley (1997) 和 Lavine 等 (1999) 论述了  $\alpha_0$  的特点和其局限性。贝叶斯学派对经典统计  $P$  值的频率观点(对未发生的样本值的平均)质疑，不符合似然原理。经典统计  $P$  值的不合理最常见于过高估计拒绝  $H_0$  的证据。如前例中， $H_0 : \theta = 50$  对  $H_1 : \theta \neq 50$ 。当  $\sigma = 1$ ,  $n = 2500$ ,  $\bar{x} = 50.1$  时，可得： $z = 5$ ,  $P = 2[1 - \Phi(5)] = 5.7 \times 10^{-7}$ 。这表明在大样本的情况下，样本信息和原假设的极其细微的差别都将导致一个非常小的  $P$

本文2008年3月21日收到，2009年1月23日收到修改稿。

值, 就是通常所说的具有统计显著性, 不具有实际显著性, 这是极不合理的, 经典统计学家本身也认识到和承认这点的.

贝叶斯学派针对经典统计检验  $P$  值, 给出一些贝叶斯方法的关于拒绝原假设的证据. Box (1980) 给出先验预测  $P$  值, Guttman (1967) 和 Rubin (1984) 给出后验预测  $P$  值, Meng (1994), Gelman 等 (1996) 和 De la Horra 和 Rodriguez-Bernal (2003) 对此有进一步研究. Bayarri 和 Berger (2000) 给出条件预测  $P$  值和局部预测  $P$  值. 一些研究表明在一些情况下贝叶斯检验和经典统计检验存在一致性. 如: Casella 和 Berger (1987), Gomez-Villegas 和 Sanz (1998, 2000), Oh 和 DasGupta (1999), Gomez-Villegas 等 (2002), Micheas 和 Dey (2003), De la Horra (2005), Micheas 和 Dey (2007) 等. 本文的观点是认为在假设检验中由于对限制参数的忽视是导致经典统计  $P$  值过小从而不合理的原因之一. 提出的方法是限制参数空间, 使用修正  $P$  值, 且修正  $P$  值能够起到缓和调停贝叶斯检验和经典统计检验的冲突的作用.

首要问题是限制参数空间的根据是什么. 在实际假设问题中, 参数是应该受限制的经常会被忽视. 问题的明显实际意义当然可以成为参数应该受限制的理由. 例如婴儿的平均体重应该在一个几乎肯定的范围, 如在 2.5 公斤到 4 公斤之间. 样本数据也可以成为限制参数的理由. 如某厂家的灯管的平均寿命应该也有一个几乎肯定的范围(不等同于区间估计所指的范围), 将其限制在一个足够大容量的样本中的最小值和最大值之间是不应该担心的, 而不是取所有非负实数, 甚至在检验时不加任何限制, 这是不合理的. 还有在大样本情况下, 总体平均值介于样本平均值为中心的  $k$  个估计标准差之间是几乎肯定的(例如  $k$  取 4 以上的数值), 这本身也是频率观点方法. 经典统计学派曾一度批评贝叶斯方法的理由之一是先验分布的量化是不可靠的, 虽然不采用先验分布的做法, 但是忽视参数应该受限制这个问题也有可能是导致其不合理的重要原因. 先验分布是检验前基于经验和理论知识对参数的描述, 一些先验密度函数的尾部概率很小, 还有一些先验密度函数的支撑集不是整个实数集, 也不是整个非负实数集, 如截尾分布. 这样先验分布效果有些类似于限制参数, 两者有一些相通之处, 不过在做法上大为不同.

Wang (2006) (2007) 分别给出了双侧检验和单侧检验时限制参数空间的修正  $P$  值, 本文研究双侧检验时限制参数空间的  $P$  值的修正, 研究表明 Wang (2006) 的修正  $P$  值存在缺陷, 并给出一种新的修正  $P$  值, 其具有较合理的性质, 且该修正  $P$  值能够缓和调停贝叶斯检验和经典统计检验的冲突.

## §2. 两种修正 $P$ 值的定义和性质及分析比较

### 2.1 $P$ 值及本文采用的符号

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自  $N(\theta, \sigma^2)$  的一组样本,  $\sigma^2$  已知. 考虑  $H_0 : \theta = \theta_0$  对  $H_1 : \theta \neq \theta_0$ . 记

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta)}{\sigma}, \quad z_0 = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)}{\sigma},$$

$Z$ 表示标准正态随机变量. 经典统计检验的 $P$ 值为

$$P = \begin{cases} 2\mathbb{P}(Z > z_0), & z_0 > 0; \\ 2\mathbb{P}(Z < z_0), & z_0 < 0, \end{cases}$$

或 $P = \mathbb{P}(|Z| > |z_0|) = 2[1 - \Phi(|z_0|)]$ , 其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数. 不失一般性, 设 $\theta_0 = 0$ 和 $\sigma = 1$ , 否则作变换 $Y_i = (X_i - \theta_0)/\sigma$ 即可. 可得:  $z_0 = \sqrt{n}\bar{x}$ ,  $z = z_0 - \sqrt{n}\theta$ . 考虑限制参数空间假设检验问题:  $H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{0\}$ 对 $H_1 : \theta \in \Theta_1 = (-a, 0) \cup (0, b)$ , 其中 $a, b > 0$ . 因为是双侧假设检验问题, 在设置参数限制的时候, 将参数空间设置为 $\theta_0$ 的对称区间具有较大程度的合理性, 这对应于 $a = b$ . 因为参数设置是基于不精确的信息, 如果比较肯定 $a \neq b$ , 那么问题就不应该是双侧假设检验了. 本文以下假设 $a = b$ , 即使是 $a \neq b$ 的情形也可以进行类似本文的理论分析, 本文略. 记 $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ .

## 2.2 Wang (2006) 定义的修正 $P$ 值 $P^W$

$P^W$ 的定义为

$$P^W = \frac{\mathbb{P}_{\theta=\theta_0}(|Z| > |z|) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z|)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z|) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z|)}.$$

记 $P^W(a) = P^W$ , 将 $z = z_0 - \sqrt{n}\theta$ 代入, 得

$$P^W(a) = \frac{\mathbb{P}(|Z| > |z_0|) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z_0 - \sqrt{n}\theta|)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z_0 - \sqrt{n}\theta|) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(|Z| > |z_0 - \sqrt{n}\theta|)}.$$

进一步可得

$$\begin{aligned} P^W(a) &= \frac{\mathbb{P}(|Z| > |z_0|) - \mathbb{P}(|Z| > |z_0| + \sqrt{n}a)}{\mathbb{P}(|Z| > \max(|z_0| - \sqrt{n}a, 0)) - \mathbb{P}(|Z| > |z_0| + \sqrt{n}a)} \\ &= \frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[\max(|z_0| - \sqrt{n}a, 0)]}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

## 2.3 新的修正 $P$ 值 $P^F$

$P^F$ 的定义为

$$P^F = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}_{\theta=\theta_0}(Z > z) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z > z)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z > z) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z > z)}, & z_0 > 0; \\ \frac{\mathbb{P}_{\theta=\theta_0}(Z < z) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z < z)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z < z) - \inf_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}(Z < z)}, & z_0 < 0. \end{cases}$$

记  $P^F(a) = P^F$ , 可计算得

$$P^F(a) = \begin{cases} 2\frac{\Phi[z_0 + \sqrt{n}a] - \Phi[z_0]}{\Phi[z_0 + \sqrt{n}a] - \Phi[z_0 - \sqrt{n}a]}, & z_0 > 0; \\ 2\frac{\Phi[\sqrt{n}a - z_0] - \Phi[-z_0]}{\Phi[\sqrt{n}a - z_0] - \Phi[-z_0 - \sqrt{n}a]}, & z_0 < 0. \end{cases}$$

即

$$P^F(a) = 2\frac{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0|)}{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0| - \sqrt{n}a)}. \quad (2.2)$$

## 2.4 $P^F(a)$ 与 $P^W(a)$ 的性质

**定理 2.1** 当  $|z_0| > \sqrt{n}a$  即  $|\bar{x}| > a$ , 有  $P^F(a) = 2P^W(a)$  成立.

**证明:** 不妨设  $z_0 > 0, z_0 < 0$  的情形证明同理, 根据式(2.1)得

$$P^W(a) = \frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0| - \sqrt{n}a]}.$$

再根据式(2.2)得:  $P^F(a) = 2P^W(a)$ , 证毕.  $\square$

**定理 2.2** (1)  $dP^F(a)/da < 0$ .

(2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} P^F(a) = P$ ,  $\lim_{a \rightarrow 0} P^F(a) = 1$ .

(3)  $\sup_{a>0} P^F(a) = 1$ ,  $\inf_{a>0} P^F(a) = P$ .

**证明:** (1) 因为

$$P^F(a) = 2\frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0| - \sqrt{n}a]}.$$

设

$$F(a) = \frac{\Phi(z+a) - \Phi(z)}{\Phi(z+a) - \Phi(z-a)},$$

命题的证明等价于证明当  $z > 0$ ,  $F'(a) < 0$ .

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{\phi(z+a)[\Phi(z) - \Phi(z-a)] - \phi(z-a)[\Phi(z+a) - \Phi(z)]}{[\Phi(z+a) - \Phi(z-a)]^2} \\ &= \frac{\phi(z+a)[\Phi(z) - \Phi(z-a)] - e^{2az}[\Phi(z+a) - \Phi(z)]}{\sqrt{2\pi} [\Phi(z+a) - \Phi(z-a)]^2}, \end{aligned}$$

其中  $\phi(\cdot)$  为标准正态密度函数. 记

$$G(a) = [\Phi(z) - \Phi(z-a)] - e^{2az}[\Phi(z+a) - \Phi(z)],$$

则

$$\begin{aligned} G'(a) &= \phi(z-a) - e^{2az}\phi(z+a) - 2ze^{2az}[\Phi(z+a) - \Phi(z)] \\ &= -2ze^{2az}[\Phi(z+a) - \Phi(z)] \\ &< 0. \end{aligned}$$

又因为  $G(0) = 0$ , 故当  $a > 0$  有  $G(a) < 0$ , 推出  $F'(a) < 0$  和  $dP^F(a)/da < 0$ .

(2) 可推得

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} P^F(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \frac{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0|)}{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0| - \sqrt{n}a)} \\ &= 2[1 - \Phi(|z_0|)] \\ &= P \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} P^F(a) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0|)}{\Phi(|z_0| + \sqrt{n}a) - \Phi(|z_0| - \sqrt{n}a)} \\ &= 2 \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n}\phi(|z_0| + \sqrt{n}a)}{\sqrt{n}\phi(|z_0| + \sqrt{n}a) + \sqrt{n}\phi(|z_0| - \sqrt{n}a)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) 根据(1)和(2), 得

$$\begin{aligned} \sup_{a>0} P^F(a) &= \lim_{a \rightarrow 0} P^F(a) = 1, \\ \inf_{a>0} P^F(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} P^F(a) = P. \quad \square \end{aligned}$$

- 定理 2.3**
- (1)  $\lim_{a \rightarrow \infty} P^W(a) = P$ ,  $\lim_{a \rightarrow 0} P^W(a) = 1$ .
  - (2) 当  $|z_0| > \sqrt{n}a$ , 即  $|\bar{x}| > a$  时,  $dP^W(a)/da < 0$ . 当  $|z_0| < \sqrt{n}a$ , 即  $|\bar{x}| < a$  时,  $dP^W(a)/da > 0$ .
  - (3)  $\sup_{a>0} P^W(a) = 1$ , 且

$$\inf_{a>0} P^W(a) = P^W\left(\frac{|z_0|}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\Phi(2|z_0|) - \Phi(|z_0|)}{\Phi(2|z_0|) - 0.5} < P.$$

(4) 当  $|z_0| < \sqrt{n}a$ , 即  $|\bar{x}| < a$  时,  $P^W(a) < P$ .

证明: (1) 根据式(2.1),

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P^W(a) = \frac{1 - \Phi[|z_0|]}{1 - 0.5} = 2[1 - \Phi[|z_0|]] = P$$

《应用概率统计》版权所用

和

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} P^W(a) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[\max(|z_0| - \sqrt{n}a, 0)]} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]} \\ &= 1.\end{aligned}$$

(2) 当 $|z_0| > \sqrt{n}a$ , 因 $P^F(a) = 2P^W(a)$ , 得

$$\frac{dP^W(a)}{da} = \frac{1}{2} \frac{dP^F(a)}{da} < 0;$$

当 $|z_0| < \sqrt{n}a$ 时,

$$P^W(a) = \frac{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - \Phi[|z_0|]}{\Phi[|z_0| + \sqrt{n}a] - 0.5},$$

求导可得 $dP^W(a)/da > 0$ .

(3) 根据(1)和(2)得

$$\sup_{a>0} P^W(a) = \lim_{a \rightarrow 0} P^W(a) = 1.$$

又根据(2)和式(2.1)得

$$\inf_{a>0} P^W(a) = P^W\left(\frac{|z_0|}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\Phi(2|z_0|) - \Phi(|z_0|)}{\Phi(2|z_0|) - 0.5} < \lim_{a \rightarrow \infty} P^W(a) = P.$$

(4) 当 $|z_0| < \sqrt{n}a$ , 根据(2),  $dP^W(a)/da > 0$ ; 根据(4),  $\lim_{a \rightarrow \infty} P^W(a) = P$ . 可得 $P^W(a) < P$ .  
证毕.  $\square$

## 2.5 $P^F(a)$ 和 $P^W(a)$ 的分析

(1)  $P^W(a)$ 的不合理性

首先, 当 $a < |z_0|/\sqrt{n}$ , 关于 $a$ 严格递减; 当 $a > |z_0|/\sqrt{n}$ , 关于 $a$ 严格递增. 这里的单调性无法解释, 极不合理! 其次, 根据定理2.3 (4), 当 $a > |z_0|/\sqrt{n}$ 时,  $P^W(a) < P$ . 而 $a > |z_0|/\sqrt{n}$ 等价于样本均值属于参数空间的范围, 这在一般情况下是再合理不过的参数限制. 但此时,  $P^W(a)$ 恒小于 $P$ 值. 如前文所说, 经典统计 $P$ 值常过于高估拒绝 $H_0$ 的证据,  $P^W(a)$ 作为修正 $P$ 值是失败的.

(2)  $P^F(a)$ 具有完全合理的性质

$P^F(a)$ 关于 $a$ 的单调性是合理的, 可以这样理解, 当 $a$ 增加, 参数的限制信息对 $H_0$ 更不利, 而 $P^F(a)$ 关于 $a$ 严格递减正体现这一点. 另外 $\sup_{a>0} P^F(a) = 1$ ,  $\inf_{a>0} P^F(a) = P$ 说明 $P^F(a)$ 作为度量拒绝 $H_0$ 的证据的合理性. 尤其是 $\inf_{a>0} P^F(a) = P$ 说明 $P^F(a)$ 总是可以起到缓和调停贝叶斯检验和经典统计检验的冲突的作用.

### §3. 数值计算举例

例  $H_0 : \theta = 500$  对  $H_1 : \theta \neq 500$  且  $\theta \in (500 - t, 500 + t)$ . 当  $\bar{x} = 506$ ,  $\sigma = 90$ ,  $n = 800$  时,  $z_0 = \sqrt{n}(\bar{x} - \theta_0)/\sigma = 1.886$ ,  $P = 2[1 - 2\Phi(1.886)] = 0.059$ , 可计算得

$t$	$a$	$P^F$	$P^W$	$P$
4	0.044	0.2185	0.1092	0.059
4.5	0.05	0.1835	0.0917	0.059
5	0.056	0.1562	0.0781	0.059
6	0.067	0.1184	0.0592	0.059
7	0.078	0.0951	0.05931	0.059
8	0.089	0.0807	0.05934	0.059
9	0.1	0.0718	0.05935	0.059

计算结果表明: (1) 当  $a > |z_0|/\sqrt{n}$  时, 等价于  $\bar{x} \in (\theta_0 - t, \theta_0 + t)$ , 一般情况下这是合理的参数限制,  $P^W$  变动不大, 实际上此时  $P^W$  是严格递增, 以  $P$  值为上确界, 但速度很慢, 看起来基本上不变. 这不合理且起到修正和缓和调停冲突的作用. (2)  $P^F$  关于  $\theta_2$  递减, 下确界为  $P$  值, 当存在较强的参数限制信息(样本均值接近于参数空间  $\Theta$  的边界)时,  $P^F$  比  $P$  值可以大很多, 而且  $P^F$  总是可以起到一定程度的缓和调停冲突的作用.

本文的结论是:  $P^F(a, b)$  是更合适的修正  $P$  值.

### 参 考 文 献

- [1] Shafer, G., Lindley's paradox, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **77**(1982), 325–351.
- [2] Berger, J.O., 统计决策论及贝叶斯分析, 中国统计出版社, 1998.
- [3] Berger, J.O. and Sellke, T., Testing a point null hypothesis: the irreconcilability of P values and evidence (with discussion), *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**(1987), 112–139.
- [4] Lindley, D.V., Discussion forum: some comments on bayes factors, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **61**(1997), 181–189.
- [5] Lavine, M. and Schervish, M.J., Bayes factors: what they are and what they are not, *The American Statistician*, **53**(2)(1999), 119–122.
- [6] Box, G.E.P., Sampling and Bayes' inference in scientific modelling and robustness (with discussion), *J. Roy. Statist. Soc. A*, **143**(1980), 383–430.
- [7] Guttman, L., The use of the concept of a future observation in goodness-of-fit problems, *J. Roy. Statist. Soc. B*, **29**(1967), 83–100.
- [8] Rubin, D.B., Bayesianly justifiable and relevant frequency calculations for the applied statistician, *Ann. Statist.*, **12**(1984), 1151–1172.
- [9] Meng, X.L., Posterior predictive P-values, *Ann. Statist.*, **22**(1994), 1142–1160.
- [10] Gelman, A., Meng, X.L. and Stern, H., Posterior predictive assessment of model fitness via realized discrepancies (with discussion), *Statistica Sinica*, **6**(1996), 733–807.

- [11] De la Horra, J. and Rodriguez-Bernal, M.T., Bayesian robustness of the posterior predictive p-value, *Commun. Statist. Theory-Meth.*, **32**(2003), 1493–1503.
- [12] Bayarri, M.J. and Berger, J.O., P-values for composite null models, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **95**(2000), 1127–1142.
- [13] Casella, G. and Berger, R.L., Reconciling Bayesian and frequentist evidence in the one-sided testing problem, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**(1987), 106–111.
- [14] Gomez-Villegas, M.A. and Sanz, L., Reconciling Bayesian and frequentist evidence in the point null testing problem, *Test*, **7**(1998), 207–216.
- [15] Gomez-Villegas, M.A. and Sanz, L.,  $\varepsilon$ -contaminated priors in testing point null hypothesis: a procedure to determine the prior probability, *Statist. Probab. Lett.*, **47**(2000), 53–60.
- [16] Oh, H.S. and DasGupta, A., Comparison of the P-value and posterior probability, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **76**(1999), 93–107.
- [17] Gomez-Villegas, M.A., Main, P. and Sanz, L., A suitable Bayesian approach testing point null hypothesis: some examples revisited, *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **31**(2002), 201–217.
- [18] Micheas, A.C. and Dey, D.K., Prior and posterior predictive p-values in the one-sided location parameter testing problem, *Sankhya*, **65**(2003), 158–178.
- [19] De la Horra, J., Reconciling classical and prior predictive P-values in the two-sided location parameter testing problem, *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **34**(2005), 575–583.
- [20] Micheas, A.C. and Dey, D.K., Reconciling Bayesian and Frequentist Evidence in the One-Sided Scale Parameter Testing Problem, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**(2007), 1123–1138,
- [21] Wang, H., Modified p-values for two-sided test for normal distribution with restricted parameter space, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**(2006), 1361–1374.
- [22] Wang, H., Modified p-values for one-sided testing in restricted parameter space, *Statistics and Probability Letters*, **77**(2007), 625–631.

## Modification of $P$ -Value of Two-Sided Test with Restricted Parameter Space and Its Reconciliation with Bayesian Evidence

FU JUNHE

(Department of Information Management, College of International Business Management,  
Shanghai International Studies University, Shanghai, 200083)

This paper makes research on modification of  $P$ -value of two-sided test with restricted parameter space and reconciling Bayesian test with classical test based on modified  $P$ -value, which shows that there exist critical defects in modified  $P$ -value put forward by Wang in 2006. This paper sets forth another modified  $P$ -value, which has comparative reasonable characteristics, based on which the conflict of Bayesian test and classical test can be reconciled to some extent.

**Keywords:** Modified  $P$ -value, evidence, Bayesian, classical Statistics.

**AMS Subject Classification:** 97K70.