

## 变系数EV模型的局部纠偏经验似然 \*

冯三营<sup>1,2</sup> 牛惠芳<sup>1</sup> 薛留根<sup>2</sup>( <sup>1</sup>洛阳师范学院数学科学学院, 洛阳, 471022; <sup>2</sup>北京工业大学应用数理学院, 北京, 100124)

## 摘要

本文研究变系数EV模型, 构造了未知系数函数的局部纠偏经验对数似然比统计量, 在适当条件下, 证明了所提出的统计量都具有渐近 $\chi^2$ 分布, 所得结果可以用来构造未知系数函数的逐点置信域. 通过模拟研究比较了经验似然方法与正态逼近方法在逐点置信域构造方面的优劣.

关键词: 变系数EV模型, 局部纠偏, 经验似然,  $\chi^2$ 分布, 置信域.

学科分类号: O212.7.

## §1. 引言

考虑变系数模型:

$$Y_i = X_{i1}\beta_1(T_i) + \cdots + X_{ip}\beta_p(T_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

其中 $Y_i$ 为响应变量,  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{ip})^\top$ 和 $T_i$ 为协变量,  $\beta(\cdot) = (\beta_1(\cdot), \dots, \beta_p(\cdot))^\top$ 为 $p$ 维未知系数函数向量,  $\varepsilon_i$ 是不可观测的随机误差, 服从均值为0, 方差为 $\sigma^2$ 的非参数分布.

变系数模型是部分线性模型的推广, 它能避免所谓的“维数祸根”问题, 是近年来高维数据分析的一个研究方向, 已有许多学者对变系数模型进行了研究. 例如, Cai, Fan and Li<sup>[1]</sup>, Cai, Fan and Yao<sup>[2]</sup>等研究了独立样本和时间序列样本下的变系数模型. Hoover, Rice, Wu and Yang<sup>[3]</sup>, Fan and Zhang<sup>[4]</sup>, Xue and Zhu<sup>[5]</sup>把变系数模型应用于纵向数据研究. 更多研究见文献[6, 7].

本文考虑变系数模型(1.1)中真实协变量 $\mathbf{X}_i$ 不能准测量, 而观测到的是带有测量误差的观测变量 $\mathbf{W}_i$ , 即

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

其中 $\mathbf{u}_i$ 为不可观测的 $p$ 维随机误差向量, 服从均值为0, 协方差阵为 $\Sigma_u$ 的非参数分布, 且 $\mathbf{u}_i$ 与 $(\mathbf{X}_i^\top, T_i, \varepsilon_i)^\top$ 相互独立.

对于变系数线性EV模型(1.1)和(1.2), Li and Greene<sup>[8]</sup>, You, Zhou and Chen<sup>[9]</sup>等运用局部纠偏的方法得到了系数函数 $\beta(\cdot)$ 的估计, 并证明了估计量的相合性和渐近正态性. 上述文献集中研究了系数函数 $\beta(\cdot)$ 的估计以及估计量的渐近性质等问题. 尽管利用上述文献的

\*国家自然科学基金项目(10571008)、北京市自然科学基金(1102008)、河南省自然科学研究项目(2008B110009)资助.  
本文2009年5月27日收到, 2009年11月5日收到修改稿.

渐近正态结果可以构造系数函数 $\beta(\cdot)$ 的逐点置信带, 但是需要构造估计量的渐近方差以及其估计量. 由于渐近方差在半参数模型中的复杂结构和方差结构中非参数估计量的收敛速度, 很难构造出 $\beta(\cdot)$ 精确的置信带. 而由Owen<sup>[10, 11]</sup>在完全样本下提出的经验似然方法是构造置信域的一个有效方法, 它不仅可以避免上述问题, 而且在置信域构造方面还具有很多优点, 已经被一些统计学者用到各种统计模型及各种领域. 例如文献[12–14]就利用经验似然方法分别对线性EV模型和部分线性EV模型进行了研究.

本文意在测量误差 $\Sigma_u$ 已知的情况下考虑模型(1.1)和(1.2)中系数函数 $\beta(\cdot)$ 的逐点置信带. 利用局部的纠偏经验似然方法, 首先构造了系数函数 $\beta(\cdot)$ 在任一固定点 $t_0 \in \mathcal{T}$ 的经验对数似然比统计量, 在一定条件下证明了所提出的统计量具有渐近 $\chi^2$ 分布, 由此结果可以构造 $\beta(t_0)$ 的经验似然置信域, 进而可以构造 $\beta(\cdot)$ 的逐点置信带. 通过模拟研究说明了经验似然方法在系数函数的置信带精度及其覆盖概率大小方面优于正态逼近方法.

## §2. 经验似然方法与主要结果

设 $\{(Y_i, T_i, \mathbf{W}_i^\tau), i = 1, 2, \dots, n\}$ 是来自模型(1.1)和(1.2)的观测样本, 则

$$\begin{cases} Y_i = X_{i1}\beta_1(T_i) + \dots + X_{ip}\beta_p(T_i) + \varepsilon_i = \mathbf{X}_i^\tau \beta(T_i) + \varepsilon_i, \\ \mathbf{W}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

其中 $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_p(t))^\tau$ .

若无测量误差即 $\mathbf{X}_i$ 已知, 则当 $T_i$ 在 $t_0$ 的一个小邻域内时, 可以用一个线性函数局部地逼近 $\beta(T_i)$

$$\beta(T_i) \approx \beta(t_0) + \beta'(t_0)(T_i - t_0) \equiv \beta_0 + \tilde{\beta}_1(T_i - t_0). \quad (2.2)$$

记 $\theta = (\beta_0^\tau, \tilde{\beta}_1^\tau)^\tau$ , 引入辅助随机向量

$$\tilde{Z}_i(\theta) = (\mathbf{X}_i^\tau, \mathbf{X}_i^\tau(T_i - t_0))^\tau [Y_i - (\mathbf{X}_i^\tau, \mathbf{X}_i^\tau(T_i - t_0))\theta] K_h(T_i - t_0), \quad (2.3)$$

其中 $K(\cdot)$ 为核函数, 且 $K_h(\cdot) = K(\cdot/h)$ ,  $h$ 为收敛于零的常数, 称之为窗宽. 显然,  $E(\tilde{Z}_i(\theta)) = o(1)$ , 从而定义经验对数似然比函数

$$\tilde{\mathcal{R}}(\theta) = -2 \max \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) | p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \tilde{Z}_i(\theta) = 0 \right\}, \quad (2.4)$$

在适当的条件下可以证明 $\tilde{\mathcal{R}}(\theta) \xrightarrow{L} \chi_{2p}^2$ . 由此可以构造 $\theta$ 的置信域. 再由(2.2)式即可得到系数函数的 $\beta(T_i)$ 置信域.

由于 $\mathbf{X}_i$ 不可观测, 观测到的是带有误差扰动的 $\mathbf{W}_i$ , 由(1.2)式我们引入局部纠偏的辅助随机向量

$$Z_i(\theta) = (\mathbf{W}_i^\tau, \mathbf{W}_i^\tau(T_i - t_0))^\tau [Y_i - (\mathbf{W}_i^\tau, \mathbf{W}_i^\tau(T_i - t_0))\theta] K_h(T_i - t_0) + C_i \theta K_h(T_i - t_0), \quad (2.5)$$

其中  $C_i = \{(1, T_i - t_0)^\tau (1, T_i - t_0)\} \otimes \Sigma_u$ . 上式最后一项的作用是修正由测量误差引起的偏差. 因此, 定义经验对数似然比函数

$$\mathcal{R}(\theta) = -2 \max \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i Z_i(\theta) = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

由Lagrange乘子法,  $\mathcal{R}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathcal{R}(\theta) = 2 \sum_{i=1}^n \log\{1 + \lambda^\tau Z_i(\theta)\}, \quad (2.7)$$

其中  $\lambda$  是Lagrange乘子, 满足

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i(\theta)}{1 + \lambda^\tau Z_i(\theta)} = 0. \quad (2.8)$$

极小化  $\mathcal{R}(\theta)$  可得  $\theta$  的估计  $\hat{\theta}$ , 称为最大经验似然估计(MELE). 由(2.7)式及Taylor展开易证

$$\mathcal{R}(\theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) \right)^\tau S^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) \right) + o_P(1), \quad (2.9)$$

其中  $S = [1/(nh)] \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) Z_i^\tau(\theta)$ , 类似于文献[5]中(2.6)式的讨论可得

$$\hat{\theta} = \left\{ \sum_{i=1}^n K_h(T_i - t_0)(\eta_i \eta_i^\tau - C_i) \right\}^{-1} \left( \sum_{i=1}^n K_h(T_i - t_0) \eta_i Y_i \right) + o_P((nh)^{-1/2}), \quad (2.10)$$

其中  $\eta_i = (\mathbf{W}_i^\tau, \mathbf{W}_i^\tau (T_i - t_0))^\tau$ . 上式的第一部分即为  $\theta$  的局部纠偏估计, 其渐近正态性已由文献[8]给出.

通常情况下, 我们对参数  $\theta$  的第一部分即  $\beta_0$  的置信域感兴趣, 为此定义

$$\widehat{Z}_i(\beta_0) = (I_p : \mathbf{0}_p) \left\{ \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K_h(T_i - t_0)(\eta_i \eta_i^\tau - C_i) \right\}^{-1} Z_i((\beta_0^\tau, \widehat{\beta}_1^\tau)^\tau), \quad (2.11)$$

其中  $\widehat{\beta}_1 = (\mathbf{0}_p : I_p) \hat{\theta}$ ,  $I_p$  为  $p$  阶单位阵,  $\mathbf{0}_p$  为  $p$  阶全零矩阵, 类似于(2.6)式, 可以定义经验对数似然比函数

$$\widehat{\mathcal{R}}(\beta_0) = -2 \max \left\{ \sum_{i=1}^n \log(np_i) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n p_i \widehat{Z}_i(\beta_0) = 0 \right\}, \quad (2.12)$$

由Lagrange乘子法,  $\widehat{\mathcal{R}}(\beta_0)$ 可以表示为

$$\widehat{\mathcal{R}}(\beta_0) = 2 \sum_{i=1}^n \log\{1 + \lambda_1^\tau \widehat{Z}_i(\beta_0)\}, \quad (2.13)$$

其中  $\lambda_1$  是Lagrange乘子, 满足

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{Z}_i(\beta_0)}{1 + \lambda_1^\tau \widehat{Z}_i(\beta_0)} = 0. \quad (2.14)$$

对任何向量 $a$ , 用 $\|a\|$ 表示Euclidean模. 为了得到本文结果, 需要以下条件:

A1  $T_1$ 有有界支撑 $\mathcal{T}$ , 其密度函数 $f_T(t)$ 是Lipschitz连续的, 且 $f_T(t) > 0$ , a.s..

A2 存在常数 $s > 2$ 使得 $E\varepsilon_1^{2s} < \infty$ ,  $E\|\mathbf{u}_1\|^{2s} < \infty$ ,  $E\|\mathbf{X}_1\|^{2s} < \infty$ . 对某个 $\delta < 2 - s^{-1}$ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $n^{2\delta-1}h \rightarrow \infty$ .

A3  $\beta(\cdot)$ 关于 $T$ 有二阶连续导数.

A4 核函数 $K(\cdot)$ 有紧支撑, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $h \rightarrow 0$ ,  $nh^2/\log^2 n \rightarrow \infty$ ,  $nh^8 \rightarrow 0$ .

A5 对任意 $t \in \mathcal{T}$ , 矩阵 $\Gamma(t) = E(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^\top | T_1 = t)$ 非退化. 矩阵 $\Omega$ 正定, 其中 $\Omega$ 在引理4.2中定义.

**定理 2.1** 设条件A1-A5成立, 如果 $\theta$ 是参数真值, 则 $\mathcal{R}(\theta) \xrightarrow{L} \chi_{2p}^2$ , 其中 $\xrightarrow{L}$ 表示依分布收敛.

基于定理2.1, 可以定义参数向量 $\theta$ 的置信域, 即对任给的 $0 < \alpha < 1$ , 存在 $c_\alpha$ 使得 $P\{\chi_{2p}^2 \leq c_\alpha\} = 1 - \alpha$ , 则

$$I_\alpha(\theta) = \{\theta | \mathcal{R}(\theta) \leq c_\alpha\}$$

为参数向量 $\theta$ 的具有渐近置信水平 $1 - \alpha$ 的置信域. 并且有 $P(\theta \in I_\alpha(\theta)) = 1 - \alpha + o(1)$ . 结合(2.2)式可以得到 $\beta(\cdot)$ 的渐近置信水平 $1 - \alpha$ 的逐点置信域.

**定理 2.2** 设条件A1-A5成立, 如果 $\beta_0$ 是参数真值, 则 $\widehat{\mathcal{R}}(\beta_0) \xrightarrow{L} \chi_p^2$ .

基于定理2.2, 可以使用 $\widehat{\mathcal{R}}(\beta_0)$ 构造 $\beta_0$ 的置信域

$$\widehat{I}_\alpha(\beta_0) = \{\beta_0 | \widehat{\mathcal{R}}(\beta_0) \leq d_\alpha\},$$

这里 $P(\chi_p^2 \leq d_\alpha) = 1 - \alpha$ , 并且有 $P(\beta_0 \in \widehat{I}_\alpha(\beta_0)) = 1 - \alpha + o(1)$ .

### §3. 模拟研究

本节通过数值模拟研究比较文中经验似然(EL)和文献[8]中正态逼近(NA)两种方法得到的变系数EV模型系数函数的逐点经验似然置信域及其覆盖概率大小.

考虑模型

$$\begin{cases} Y_i = X_i\beta(T_i) + \varepsilon_i, \\ W_i = X_i + u_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

其中 $X_i \sim N(0, 1)$ ,  $T_i \sim U(-1/2, 1/2)$ ,  $\beta(T_i) = 2 \sin(2\pi T_i)$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0, 0.05^2)$ , 测量误差满足 $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ . 在下面的模拟中, 取样本容量 $n = 300$ . 测量误差方差 $\sigma^2 = 0.4^2$ . 取核函数 $K(u) = (3/4)(1 - u^2)I\{|u| \leq 1\}$ , 窗宽 $h$ 类似于文献[8]采用期望广义交叉核实法(EGCV)选取. 置信水平 $1 - \alpha = 0.95$ , 重复运算2000次. 模拟结果见图1, 图2, 图3和图4.

《应用概率统计》版权所用

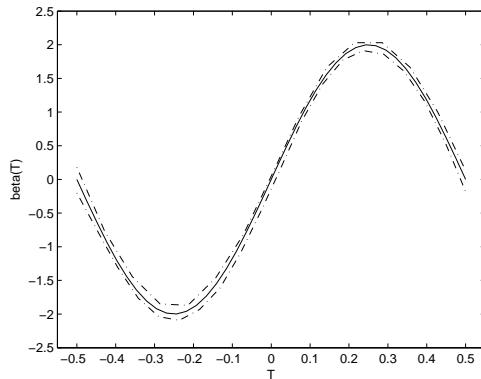
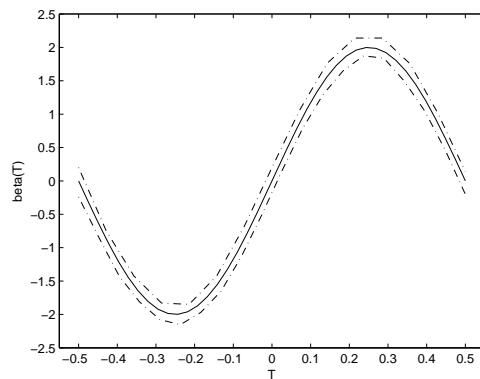
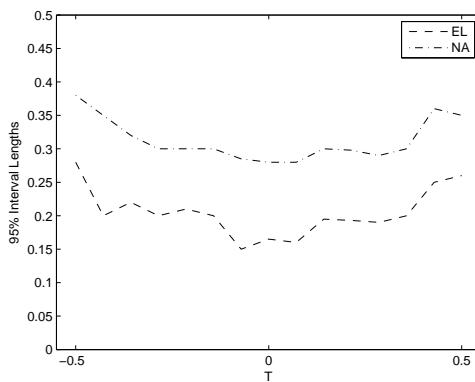
图1 基于EL,  $\beta(T)$ 的逐点置信区间图2 基于NA,  $\beta(T)$ 的逐点置信区间

图3 置信水平为0.95的区间长度

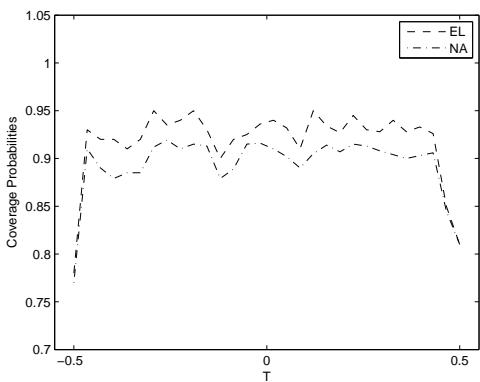


图4 置信水平为0.95的覆盖概率

对比图1, 图2, 图3和图4所得到的模拟结果可以看出, 经验似然(EL)方法明显要优于正态逼近(NA)方法, 因为EL得到的逐点置信区间带窄且覆盖概率大.

#### §4. 定理证明

记

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & T_i - t_0 \\ T_i - t_0 & (T_i - t_0)^2 \end{pmatrix},$$

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j K(t) dt, \quad \nu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} t^j K^2(t) dt, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

为叙述方便, 以下始终假设C表示任一不依赖于n的绝对常数, C每次出现可以取不同的值.

**引理 4.1** 若条件A1-A5成立, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T_i - t}{h}\right) \left(\frac{T_i - t}{h}\right)^k X_{ij_1} X_{ij_2} - f_T(t) \Gamma_{j_1 j_2}(t) \mu_k \right| = O\left\{ h^2 + \left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2} \right\} \text{ a.s.},$$

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T_i - t}{h}\right) \left(\frac{T_i - t}{h}\right)^k X_{ij} \varepsilon_i \right| = O\left\{\left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2}\right\} \text{ a.s.,}$$

$$\sup_{t \in T} \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T_i - t}{h}\right) \left(\frac{T_i - t}{h}\right)^k X_{ij} u_{ij} \right| = O\left\{\left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2}\right\} \text{ a.s.,}$$

其中  $j, j_1, j_2 = 1, \dots, p$ ,  $k = 0, 1, 2, 4$ ,  $\Gamma_{j_1 j_2}(t)$  是矩阵  $\Gamma(t)$  的第  $(j_1, j_2)$  元素.

证明: 见文献[15]引理2的证明, 此处省略.  $\square$

**引理 4.2** 若条件A1-A5成立, 则

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) \xrightarrow{L} N(0, \Omega), \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) Z_i^\top(\theta) \xrightarrow{P} \Omega, \quad (4.2)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|Z_i(\theta)\| = o_P((nh)^{1/2}), \quad (4.3)$$

$$\frac{h}{n} \sum_{i=1}^n \|Z_i(\theta)\|^3 = o_P((nh)^{1/2}), \quad (4.4)$$

其中  $\Omega = f_T(t)[\sigma^2 \Gamma(t) + \sigma^2 \Sigma_u + E\{\xi_1 \beta_0 \beta_0^\top \xi_1^\top | T_1 = t\}] \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_1 = \Sigma_u - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\top - \mathbf{X}_1 \mathbf{u}_1^\top$ .

证明: 因为系数函数  $\beta_j(t)$  在  $|T_i - t_0| < h$  内光滑, 于是由泰勒展开

$$\mathbf{X}_i^\top \beta(T_i) = \mathbf{X}_i^\top \beta(t_0) + (T_i - t_0) \mathbf{X}_i^\top \beta'(t_0) + o(h) = (\mathbf{X}_i^\top, \mathbf{X}_i^\top(T_i - t_0)) \theta + o(h), \quad \text{a.s..}$$

从而

$$\begin{aligned} Z_i(\theta) &= (\mathbf{W}_i^\top, \mathbf{W}_i^\top(T_i - t_0))^\top [\varepsilon_i + o(h) - (\mathbf{u}_i^\top, \mathbf{u}_i^\top(T_i - t_0)) \theta] K_h(T_i - t_0) \\ &\quad + C_i \theta K_h(T_i - t_0) \\ &= (\mathbf{W}_i^\top, \mathbf{W}_i^\top(T_i - t_0))^\top \varepsilon_i K_h(T_i - t_0) + o(h) \cdot (\mathbf{W}_i^\top, \mathbf{W}_i^\top(T_i - t_0))^\top K_h(T_i - t_0) \\ &\quad - D_i \otimes \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top \theta K_h(T_i - t_0) - D_i \otimes \mathbf{X}_i \mathbf{u}_i^\top \theta K_h(T_i - t_0) + D_i \otimes \Sigma_u \theta K_h(T_i - t_0) \\ &= (\mathbf{X}_i^\top, \mathbf{X}_i^\top(T_i - t_0))^\top \varepsilon_i K_h(T_i - t_0) + (\mathbf{u}_i^\top, \mathbf{u}_i^\top(T_i - t_0))^\top \varepsilon_i K_h(T_i - t_0) \\ &\quad + D_i \otimes (\Sigma_u - \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\top - \mathbf{X}_i \mathbf{u}_i^\top) \theta K_h(T_i - t_0) + o_P(1) \\ &\triangleq J_1 + J_2 + J_3 + o_P(1). \end{aligned}$$

首先考虑  $J_1$ , 对任意非零向量  $l = (l_1, \dots, l_{2p})^\top$ , 有

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} l^\top \sum_{i=1}^n J_1 = \frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^p l_j X_{ij} K_h(T_i - t_0) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^p l_{j+p} X_{ij} K_h(T_i - t_0) (T_i - t_0) \varepsilon_i \right\},$$

显然,  $(1/\sqrt{h}) \left\{ \sum_{j=1}^p l_j X_{ij} K_h(T_i - t_0) \varepsilon_i + \sum_{j=1}^p l_{j+p} X_{ij} K_h(T_i - t_0) (T_i - t_0) \varepsilon_i \right\}$  独立同分布, 且均值为 0, 方差为  $l^\top \Sigma_1 l$ , 其中

$$\Sigma_1 = \sigma^2 f_T(t) \Gamma(t) \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

故由中心极限定理可得

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n J_1 \xrightarrow{L} N(0, \Sigma_1), \quad n \rightarrow \infty.$$

类似于 $J_1$ 的讨论, 易得

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n J_2 \xrightarrow{L} N(0, \Sigma_2), \quad n \rightarrow \infty,$$

其中

$$\Sigma_2 = \sigma^2 f_T(t) \Sigma_u \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} \xi_i \beta_0 K_h(T_i - t_0) \\ \xi_i \beta_0 (T_i - t_0) K_h(T_i - t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_i (T_i - t_0) K_h(T_i - t_0) \tilde{\beta}_1 \\ \xi_i (T_i - t_0)^2 K_h(T_i - t_0) \tilde{\beta}_1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\triangle}{=} J_{31} + J_{32}, \end{aligned}$$

类似于 $J_1, J_2$ 的讨论, 有

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n J_{31} \xrightarrow{L} N(0, \Sigma_3), \quad n \rightarrow \infty,$$

其中

$$\Sigma_3 = f_T(t) E\{\xi_1 \beta_0 \beta_0^\top \xi_1^\top | T_1 = t\} \otimes \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}.$$

另外, 由引理4.1

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n J_{32} = O(n^{1/2} h^{5/2}) \cdot O\left\{\left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2}\right\} \text{ a.s.},$$

因此, 由 $J_1, J_2, J_3$ 相互独立及条件(A1)-(A5)

$$\frac{1}{\sqrt{nh}} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) \xrightarrow{L} N(0, \Omega), \quad n \rightarrow \infty.$$

即证(4.1)式成立, 下证(4.2)式成立.

$$\begin{aligned} \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) Z_i^\top(\theta) &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n (J_1 + J_2 + J_3 + o_P(1))(J_1 + J_2 + J_3 + o_P(1))^\top \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n (J_1 + J_2 + J_{31})(J_1 + J_2 + J_{31})^\top + o_P(1) \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n (J_1 J_1^\top + J_2 J_2^\top + J_{31} J_{31}^\top) + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_1 J_2^\top \\ &\quad + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_1 J_{31}^\top + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_2 J_1^\top + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_2 J_{31}^\top \\ &\quad + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_{31} J_1^\top + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n J_{31} J_2^\top + o_P(1) \\ &\equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + o_P(1), \end{aligned}$$

显然,  $A_1 \xrightarrow{P} \Omega$ , 因此为证(4.2)式, 只需证明:  $A_l \xrightarrow{P} 0$ ,  $l = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

用 $A_{2,jr}$ 表示 $A_2$ 的 $(j, r)$ 元素,  $j, r = 1, \dots, 2p$ , 则由条件A2, A4及引理4.1易知

$$\begin{aligned}|A_{2,jr}| &= \left| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K_h^2(T_i - t_0)(T_i - t_0)^k X_{ij} u_{ir} \varepsilon_i^2 \right| \\&\leq C \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^2| \cdot \left| \frac{h^k}{nh} \sum_{i=1}^n K_h(T_i - t_0) \left( \frac{T_i - t_0}{h} \right)^k X_{ij} u_{ir} \right| \\&= o(n^{1/2s}) O\left(h^k \cdot \left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2}\right) = o_P(1),\end{aligned}$$

即证 $A_2 \xrightarrow{P} 0$ , 类似地可以证明 $A_l \xrightarrow{P} 0$ ,  $l = 3, 4, 5, 6, 7$ .

由引理4.1及条件A1-A5, 易知

$$\begin{aligned}\max_{1 \leq i \leq n} \|Z_i(\theta)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|J_1\| + \max_{1 \leq i \leq n} \|J_2\| + \max_{1 \leq i \leq n} \|J_3\| \\&= O\left\{\left(\frac{\log n}{nh}\right)^{1/2}\right\} + o(n^{1/s}) + o(n^{1/s}) = o_P((nh)^{1/2}), \\ \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \|Z_i(\theta)\|^3 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|Z_i(\theta)\| \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \|Z_i(\theta)\|^2 = o_P((nh)^{1/2}).\end{aligned}$$

综上所述, 命题得证.  $\square$

**定理2.1的证明:** 现在假设 $[1/(nh)] \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) Z_i^\tau(\theta)$ 正定, 且0在 $Z_i(\theta)$ 的凸包中. 记

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i(\theta)}{1 + \lambda^\tau Z_i(\theta)} = 0. \quad (4.5)$$

下面证明 $\|\lambda\| = O_P((nh)^{-1/2})$ . 记 $\lambda = \kappa\omega$ , 其中 $\kappa \geq 0$ ,  $\omega \in R^{2p}$ , 且 $\|\omega\| = 1$ . 令

$$\bar{Z} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta), \quad Z^* = \max_{1 \leq i \leq n} \|Z_i(\theta)\|.$$

将 $1/(1 + \lambda^\tau Z_i(\theta)) = 1 - \lambda^\tau Z_i(\theta)/(1 + \lambda^\tau Z_i(\theta))$ 代入 $\omega^\tau \varphi(\lambda) = 0$ , 则有

$$|\omega^\tau \bar{Z}| \geq \frac{\kappa}{1 + \kappa Z^*} \omega^\tau S \omega \geq \frac{\kappa}{1 + \kappa Z^*} \text{mineig}(S).$$

其中 $S = [1/(nh)] \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) Z_i^\tau(\theta)$ ,  $\text{mineig}(S)$ 表示 $S$ 的最小特征值. 因为 $\hat{p}_i = (1/n)[1/(1 + \lambda^\tau Z_i(\theta))]$ 为概率密度, 则有 $0 < 1 + \lambda^\tau Z_i(\theta) \leq 1 + \kappa Z^*$ , 因此

$$\kappa[\text{mineig}(S) - \omega^\tau \bar{Z} Z^*] \leq |\omega^\tau \bar{Z}|.$$

由(4.1)和(4.3)式知,  $Z^* = o_P((nh)^{1/2})$ ,  $|\omega^\tau \bar{Z}| \leq \|\bar{Z}\| = O_P((nh)^{-1/2})$ , 简单计算有

$$\kappa[\text{mineig}(S) + o_P(1)] = O_P((nh)^{-1/2}).$$

因此  $\kappa = O_P((nh)^{-1/2})$ , 即  $\|\lambda\| = O_P((nh)^{-1/2})$ .

记  $\gamma_i = \lambda^\tau Z_i(\theta)$ , 因此有:  $\max_{1 \leq i \leq n} |\gamma_i| = O_P((nh)^{-1/2})o_P((nh)^{1/2}) = o_P(1)$ . 利用Taylor公式, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\lambda) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n Z_i(\theta) \left[ 1 - \gamma_i + \frac{\gamma_i^2}{1 - \gamma_i} \right] \\ &= \bar{Z} - S\lambda + \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i(\theta)\gamma_i^2}{1 - \gamma_i} \stackrel{\wedge}{=} \bar{Z} - S\lambda + \delta_n, \end{aligned}$$

则  $\lambda = S^{-1}\bar{Z} + S^{-1}\delta_n$ , 且易知  $\delta_n = o_P((nh)^{-1/2})$ .

对(2.7)式应用Taylor公式

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\theta) &= 2 \sum_{i=1}^n \log(1 + \gamma_i) = 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i - \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \varsigma_n \\ &= 2nh\lambda^\tau \bar{Z} - nh\lambda^\tau S\lambda + \varsigma_n \\ &= nh\bar{Z}^\tau S^{-1}\bar{Z} - nh\delta_n^\tau S^{-1}\delta_n + \varsigma_n + o_P(1). \end{aligned}$$

由引理4.2, 有  $nh\bar{Z}^\tau S^{-1}\bar{Z} \xrightarrow{L} \chi_{2p}^2$ ,  $n \rightarrow \infty$ . 又因为

$$nh\delta_n^\tau S^{-1}\delta_n = nh o_P((nh)^{-1/2})O_P(1)o_P((nh)^{-1/2}) = o_P(1),$$

且

$$\varsigma_n \leq C\|\lambda\|^3 \sum_{i=1}^n \|Z_i(\theta)\|^3 = O_P((nh)^{-3/2})o_P((nh)^{3/2}) = o_P(1).$$

因此,  $\mathcal{R}(\theta) \xrightarrow{L} \chi_{2p}^2$ .  $\square$

**定理2.2的证明:** 类似于定理2.1的证明易证本定理, 此处省略.  $\square$

## 参 考 文 献

- [1] Cai, Z.W., Fan, J.Q. and Li, R.Z., Efficient estimation and inference for varying-coefficient models, *J. Am. Statist. Ass.*, **95**(2000), 888–902.
- [2] Cai, Z.W., Fan, J.Q. and Yao, Q.W., Functional-coefficient regression models for nonlinear time series, *J. Am. Statist. Ass.*, **95**(2000), 941–956.
- [3] Hoover, D.R., Rice, J.A., Wu, C.O. and Yang, L.P., Nonparametric smoothing estimates of time-varying coefficient models, *Biometrika*, **85**(1998), 809–822.
- [4] Fan, J.Q. and Zhang, J.T., Two-step estimation of functional linear models with applications to longitudinal data, *J. Roy. Statist. Soc., Ser B*, **62**(2000), 303–322.
- [5] Xue, L.G. and Zhu, L.X., Empirical likelihood for a varying coefficient models with longitudinal data, *J. Am. Statist. Ass.*, **102**(2007), 642–653.
- [6] Huang, J.Z., Wu, C.O. and Zhou, L., Varying-coefficient models and basis function approximations for the analysis of repeated measurements, *Biometrika*, **89**(2002), 111–128.

- [7] Fan, J.Q. and Huang, T., Profile likelihood inference on semiparametric varying-coefficient partially linear models, *Bernoulli*, **11**(2005), 1037–1051.
- [8] Li, L. and Greene, T., Varying coefficients model with measurement error, *Biometrika*, **84**(2007), 1–8.
- [9] You, J.H., Zhou, Y. and Chen, G.M., Corrected local polynomial estimation in varying coefficient models with measurement errors, *The Canadian Journal of Statistics*, **34**(2006), 391–410.
- [10] Owen, A.B., Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional, *Biometrika*, **75**(1988), 237–249.
- [11] Owen, A.B., Empirical likelihood ratio confidence intervals, *Ann. Statist.*, **18**(1990), 90–120.
- [12] Cui, H.J. and Song, X.C., Empirical likelihood confidence region for parameter in the errors-in-variables models, *J. Multivariate Anal.*, **64**(2003), 1–24.
- [13] Wang, Q.H., Empirical likelihood-based inference in linear errors-in-covariates models with validation data, *Biometrika*, **89(2)**(2002), 345–358.
- [14] Li, G.R. and Xue, L.G., Empirical likelihood confidence region for the parameter in a partially linear errors-in-variables model, *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **37(10)**(2008), 1552–1564.
- [15] Xia, Y.C. and Li, W.K., On the estimation and testing of functional-coefficient linear models, *Statistics Sinica*, **9**(1999), 737–757.

## Local Bias-Corrected Empirical Likelihood in a Varying-Coefficient Errors-in-Variables Model

FENG SANYING<sup>1,2</sup> NIU HUIFANG<sup>1</sup> XUE LIUGEN<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>College of Mathematics and Science, Luoyang Normal University, Luoyang, 471022)

(<sup>2</sup>College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing, 100124)

In this paper, we consider the varying-coefficient errors-in-variables regression model. The local bias-corrected empirical log-likelihood ratio statistic for the unknown coefficient function is proposed. It is shown that the proposed statistic has the asymptotic chi-square distribution under some suitable conditions, and hence it can be used to construct the pointwise confidence regions of the coefficient functions. A simulation study is carried out to compare the performance of the empirical likelihood and the normal approximation method based on the pointwise confidence regions.

**Keywords:** Varying coefficient errors-in-variables models, local bias-corrected, empirical likelihood, Chi-square distribution, confidence region.

**AMS Subject Classification:** 62G05, 62G20.