应用概率统计　第二十六卷
第五期　2010年10月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.26 No.5 Oct. 2010

椭球等高矩阵分布关于非奇异矩阵变换的不变性

石爱菊[1,2]　　林金官[1*]
([1]东南大学数学系, 南京, 210096; [2]南京邮电大学理学院, 南京, 210046)

摘　要

本文首先将矩阵F分布和矩阵t分布的定义推广到左球分布类, 其密度函数与产生它们的左球分布或球对称分布的密度均无关. 然后讨论了椭球等高分布关于非奇异矩阵变换的不变性问题, 包括矩阵Beta分布、逆矩阵Beta分布、矩阵Dirichlet分布、逆矩阵Dirichlet分布、矩阵F分布和矩阵t等分布. 在非奇异变换下, 这些分布的密度不但与产生它们的左球分布的密度函数无关, 而且与非奇异变换矩阵无关.

关键词: 椭球等高分布, 矩阵t分布, 矩阵F分布, 矩阵Beta分布, 矩阵Dirichlet分布, 非奇异矩阵变换, 不变性.

学科分类号: O212.4.

§1. 引　　言

我们知道, 椭球等高分布是对矩阵正态分布的推广, 这两类分布具有很多相似的性质, 胡端平[1–3]研究了球对称分布、椭球等高分布的条件分布仍然为椭球等高分布, 并研究了两个椭球等高分布的联合分布为椭球等高分布的充要条件. Golam Kibria[4]研究了矩阵t分布的有关性质及其在金融中的应用, 方开泰[5]也列举了很多关于这两类分布的相似性质. 本文继承[1]-[4]的工作, 从正态分布的线性不变性质出发, 力求寻找椭球等高分布关于变换的性质. 我们首先发现左球分布具有正态分布类似的不变性质, 见引理2.1. 然后从矩阵t分布和矩阵F分布的定义出发, 将定义中的条件——球对称分布放宽到左球类中, 证明了定义仍然成立. 主要结果见定理2.1和定理2.2. 并且说明了矩阵F分布和矩阵t分布的密度函数与产生它们的左球分布的密度也无关的性质, 具体见推论2.1和推论2.2. 第三节利用左球分布定义的矩阵t分布和矩阵F分布, 考虑椭球等高分布关于非奇异变换的变换性质, 发现与正态分布的性质很接近, 椭球等高分布关于非奇异变换也是不变的, 具体变换及结论见定理3.1–定理3.5.

注: 本文中的定义与符号沿用文献[5].

*通讯作者, E-mail: jglin@seu.edu.cn.
本文2006年4月14日收到, 2009年12月15日收到修改稿.

§2. 矩阵F分布与矩阵t分布在左球分布类中的推广

2.1 基本定义和引理

为了应用方便, 下面把本文牵涉到的重要分布: 左球分布、矩阵F分布和矩阵t分布的定义及其密度函数写出来, 这些内容均引用于方开泰[5].

定义 2.1 设$X \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$ (左球分布), 记$X = (X_1', \cdots, X_m')'$, 其中

$$X_i : n_i \times p, \qquad n_i \geq p, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n.$$

令$W_i = X_i'X_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$(W_1, \cdots, W_m) \sim \mathrm{MG}_{m,p}\Big(\frac{n_1}{2}, \cdots, \frac{n_m}{2}; f\Big).$$

其联合密度函数为

$$\prod_{i=1}^m [c_{n_i,p}|W_i|^{1/2}(n_i - p - 1)] f\Big(\sum_{i=1}^m W_i\Big), \qquad W_i > 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中:

$$c_{n_i,p} = \frac{\pi^{n_i p/2}}{\Gamma_p(n_i/2)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m.$$

引理 2.1 设$X \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, $n \geq p$, 则对任意p阶非奇异矩阵C, 有$\widetilde{X} = XC \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$, 其中

$$\widetilde{f}(\widetilde{X}'\widetilde{X}) = |C|^{-n} \cdot f(C'^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{X}C^{-1}). \tag{2.1}$$

证明: 由于$X \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, 所以$X$的密度函数为$f(X'X)$. 作变换$\widetilde{X} = XC$, 则$J(X \to \widetilde{X}) = |C^{-1}|^n = |C|^{-n}$, 从而得到$\widetilde{X}$的联合密度为:

$$|C|^{-n} f((\widetilde{X}C^{-1})'\widetilde{X}C^{-1}) = |C|^{-n} \cdot f(C'^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{X}C^{-1}) \triangleq \widetilde{f}(\widetilde{X}'\widetilde{X}),$$

即$\widetilde{X} \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$. □

定义 2.2 假设$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{SS}_{n\times p}(f)$, $X_i : n_i \times p$, $n_i \geq p$, $i = 1, 2$. 设

$$F = \frac{n_2}{n_1}(X_2'X_2)^{-1/2}X_1'X_1(X_2'X_2)^{-1/2},$$

则称F服从矩阵F分布, 记为$F \sim \mathrm{MF}(p, n_1, n_2)$.

引理 2.2 $F \sim \mathrm{MF}(p, n_1, n_2)$的密度函数是

$$\frac{\Gamma_p[(n_1 + n_2)/2]}{\Gamma_p(n_1/2)\Gamma_p(n_2/2)}\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1 p/2}|F|^{(n_1-p-1)/2}\Big|I_p + \frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2}. \tag{2.2}$$

当$F > 0$时, 且与X的密度函数f无关.

定义 2.3 设$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{SS}_{n\times p}(f)$, $X_i: n_i\times p$, $n_i\geq p$, $i=1,2$. 则称$T=(n_2)^{1/2}X_1(X_2'X_2)^{-1/2}$遵从矩阵$t$分布, 记为$T\sim \mathrm{MT}(p,n_1,n_2)$.

引理 2.3 $T\sim \mathrm{MT}(p,n_1,n_2)$的密度函数是

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{(n_2\pi)^{n_1p/2}\Gamma_p(n_2/2)}\left|I_p+\frac{1}{n_2}T'T\right|^{-(n_1+n_2)/2}, \tag{2.3}$$

且与X的密度f无关.

引理 2.4[6] 设$X=BYB'$, B是$m\times m$的非奇异矩阵, 则当X和Y均为$m\times m$的对称矩阵时, $J(X\to Y)=|B|^{m+1}$.

引理 2.5 设X,Y均为$m\times m$阶正定矩阵, 则当X和Y具有相同的特征根时, $J(X\to Y)=1$.

证明: 由条件知, 存在m阶正交矩阵Γ_1,Γ_2, 使得$X=\Gamma_1L\Gamma_1'$, $Y=\Gamma_2L\Gamma_2'$, 其中$L=\mathrm{diag}(l_1,\cdots,l_m)$, $l_1\geq l_2\geq\cdots\geq l_m>0$为$X$的顺序特征根. 于是有$X=\Gamma_1L\Gamma_1'=\Gamma_1\Gamma_2'\Gamma_2L\Gamma_2'\Gamma_2\Gamma_1'=\Gamma_1\Gamma_2'Y\Gamma_2\Gamma_1'$, 由引理2.4, $J(X\to Y)=|\Gamma_1\Gamma_2'|^{m+1}=1$. □

2.2 主要结果及证明

定理 2.1 对任意的$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, $X_i: n_i\times p$, $n_i\geq p$, $i=1,2$. 有

$$F=\frac{n_2}{n_1}(X_2'X_2)^{-1/2}X_1'X_1(X_2'X_2)^{-1/2}\sim \mathrm{MF}(p,n_1,n_2). \tag{2.4}$$

证明: 记$W_1=X_1'X_1$, $W_2=X_2'X_2$. 由定义2.1, W_1,W_2的联合概率密度函数为

$$c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}|W_1|^{(n_1-p-1)/2}|W_2|^{(n_2-p-1)/2}f(W_1+W_2).$$

对每个非负Borel函数$h(\cdot)$, 有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(h(F)) &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\int h\Big(\frac{n_2}{n_1}W_2^{-1/2}W_1W_2^{-1/2}\Big)\\ &\quad\cdot|W_1|^{(n_1-p-1)/2}|W_2|^{(n_2-p-1)/2}f(W_1+W_2)\mathrm{d}W_1\mathrm{d}W_2.\end{aligned}$$

做变换$F=(n_2/n_1)W_2^{-1/2}W_1W_2^{-1/2}$, 则$W_1=(n_1/n_2)W_2^{1/2}FW_2^{1/2}$, $W_1+W_2=W_2^{1/2}[I+(n_1/n_2)F]W_2^{1/2}$. 其变换的Jacobi行列式是$J(F\to W_1)=(n_2/n_1)^{p(p+1)/2}|W_2|^{-(p+1)/2}$, 从而有

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(h(F)) &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot\int h(F)|F|^{(n_1-p-1)/2}\\ &\quad\cdot|W_2|^{(n_1+n_2-p-1)/2}f\Big(W_2^{1/2}\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)W_2^{1/2}\Big)\mathrm{d}F\mathrm{d}W_2.\end{aligned}$$

再令$W=W_2^{1/2}[I_p+(n_1/n_2)F]W_2^{1/2}$, 由于$W$与$[I_p+(n_1/n_2)F]^{1/2}W_2[I_p+(n_1/n_2)F]^{1/2}$均正定且具有相同的特征根, 由引理2.5, 有

$$J\Big(W\to\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}W_2\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}\Big)=1.$$

于是

$$\begin{aligned}J(W\to W_2) &= J\Big(W\to\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}W_2\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}\Big)\\ &\quad\cdot J\Big(\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}W_2\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{1/2}\to W_2\Big)\\ &= 1\cdot\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{(p+1)/2}=\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{(p+1)/2}.\end{aligned}$$

这时

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(h(F)) &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot\int h(F)|F|^{(n_1-p-1)/2}\\ &\quad\cdot\Big|W\Big(I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big)^{-1}\Big|^{(n_1+n_2-p-1)/2}\cdot\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(p+1)/2}f(W)\mathrm{d}F\mathrm{d}W\\ &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot\int h(F)|F|^{(n_1-p-1)/2}\\ &\quad\cdot|W|^{(n_1+n_2-p-1)/2}\cdot\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2}f(W)\mathrm{d}F\mathrm{d}W\\ &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot\int h(F)|F|^{(n_1-p-1)/2}\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2}\mathrm{d}F\\ &\quad\cdot\int|W|^{(n_1+n_2-p-1)/2}f(W)\mathrm{d}W\\ &= c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot c^{-1}_{n_1+n_2,p}\\ &\quad\cdot\int h(F)|F|^{(n_1-p-1)/2}\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2}\mathrm{d}F.\end{aligned}$$

最后一个等式用到下述事实, 根据定理3.4.2[5], 当$W>0$时, W的密度函数为

$$c_{n_1+n_2,p}|W|^{(n_1+n_2-p-1)/2}f(W),$$

其中$c_{n,p}=\pi^{np/2}/\Gamma_p(n/2)$, 根据$h(\cdot)$的任意性, 立得$F$的密度函数为

$$c_{n_1,p}\cdot c_{n_2,p}\cdot\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}\cdot c^{-1}_{n_1+n_2,p}|F|^{(n_1-p-1)/2}\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2}.$$

最后再将$c_{n_1,p},c_{n_2,p},c_{n_1+n_2,p}$用多元Gamma函数表示并化简, 即得$F$的密度函数:

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma_p(n_1/2)\Gamma_p(n_2/2)}\Big(\frac{n_1}{n_2}\Big)^{n_1p/2}|F|^{(n_1-p-1)/2}\Big|I_p+\frac{n_1}{n_2}F\Big|^{-(n_1+n_2)/2},\qquad F>0.\tag{2.5}$$

由引理2.2, 命题得证. □

由本定理可见, 矩阵F分布可以由左球分布产生, 这就是本文研究的第一个问题, 将矩阵F分布的定义推广到左球分布类中. 而且由(2.5)式知, 在左球类中F的密度函数与产生它的左球分布的联合密度f也无关, 即在整个左球分布类中的任意左球分布均产生相同的矩阵F分布. 于是有下面的推论成立.

推论 2.1 在定理2.1的条件下, 矩阵F分布的密度与f无关.

定理 2.2 设$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, $X_i: n_i \times p$, $n_i \ge p$, $i=1,2$. 则

$$T = (n_2)^{1/2} X_1 (X_2' X_2)^{-1/2} \sim \mathrm{MT}(p, n_1, n_2). \tag{2.6}$$

证明: 由定理3.4.2[5], X_1与$B = X_2'X_2$的联合密度是

$$c_{n_2,p} |B|^{(n_2-p-1)/2} f(X_1'X_1 + B),$$

其中$c_{n_2,p} = \pi^{n_2 p/2}/\Gamma_p(n_2/2)$. 于是, 对每个非负Borel函数$h(\cdot)$, 有

$$\mathsf{E}(h(T)) = c_{n_2,p} \int h(n_2^{1/2} X_1 B^{-1/2}) \cdot |B|^{(n_2-p-1)/2} f(X_1'X_1 + B) \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}B.$$

作变换$T = n_2^{1/2} X_1 B^{-1/2}$, 则Jacobi行列式是$J(T \to X_1) = n_2^{n_1 p/2} |B|^{-n_1/2}$, $X_1 = n_2^{-1/2} \cdot T B^{1/2}$, $X_1'X_1 = n_2^{-1} B^{1/2} T'T B^{1/2}$, 以及$X_1'X_1 + B = B^{1/2}(I_p + n_2^{-1}T'T)B^{1/2}$. 于是

$$\mathsf{E}(h(T)) = c_{n_2,p} \cdot n_2^{-n_1 p/2} \int h(T) \cdot |B|^{(n_1+n_2-p-1)/2} f(B^{1/2}(I_p + n_2^{-1}T'T)B^{1/2}) \mathrm{d}T \mathrm{d}B.$$

再令$W = B^{1/2}(I_p + n_2^{-1}T'T)B^{1/2}$, 容易验证$W$与$(I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2} B (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2}$均正定且具有相同的特征根, 所以$J(W \to (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2} B (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2}) = 1$, 从而有

$$\begin{aligned} J(W \to B) &= J(W \to (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2} B (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2}) \\ &\quad \cdot J((I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2} B (I_p + n_2^{-1}T'T)^{1/2} \to B) \\ &= 1 \cdot |I_p + n_2^{-1}T'T|^{(p+1)/2} = |I_p + n_2^{-1}T'T|^{(p+1)/2}. \end{aligned}$$

进而得到

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(h(T)) &= c_{n_2,p} \cdot n_2^{-n_1 p/2} \int h(T) \cdot |W(I_p + n_2^{-1}T'T)^{-1}|^{(n_1+n_2-p-1)/2} \\ &\quad \cdot f(W) \cdot |I_p + n_2^{-1}T'T|^{-(p+1)/2} \mathrm{d}T \mathrm{d}W \\ &= c_{n_2,p} \cdot n_2^{-n_1 p/2} \int h(T) \cdot |I_p + n_2^{-1}T'T|^{-(n_1+n_2)/2} \mathrm{d}T \\ &\quad \cdot \int |W|^{(n_1+n_2-p-1)/2} f(W) \mathrm{d}W \\ &= c_{n_2,p} \cdot c_{n_1+n_2,p}^{-1} \cdot n_2^{-n_1 p/2} \int h(T) \cdot |I_p + n_2^{-1}T'T|^{-(n_1+n_2)/2} \mathrm{d}T. \end{aligned}$$

由$h(\cdot)$的任意性知, T的密度函数为

$$c_{n_2,p}\cdot c_{n_1+n_2,p}^{-1}\cdot n_2^{-n_1p/2}|I_p+n_2^{-1}T'T|^{-(n_1+n_2)/2}.$$

即

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{(n_2\pi)^{n_1p/2}\Gamma_p(n_2/2)}\Big|I_p+\frac{1}{n_2}T'T\Big|^{-(n_1+n_2)/2}, \tag{2.7}$$

由引理2.3, 命题成立. $\square$

由此可见, 当$X\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$时, 按(2.6)式定义的矩阵仍服从矩阵$t$分布, 也就是说, 矩阵$t$分布的定义可以推广到左球分布类中去. 而且, 由(2.7)式可以看出, 由左球分布定义的矩阵t分布与产生它的左球分布的联合密度函数f也无关, 即有下面的推论成立.

推论 2.2 在定理2.2的条件下, 矩阵t分布的密度与f无关.

§3. 椭球等高分布关于非奇异变换的不变性

3.1 几个引理

为了下面的应用方便, 首先列出矩阵Beta分布和矩阵Dirichlet分布的密度函数, 相关内容参见方开泰[5].

引理 3.1 若$B\sim \mathrm{B}_p(n_1/2,n_2/2)$. 则当$0<B<I_p$时, 其密度函数为

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma_p(n_1/2)\Gamma_p(n_2/2)}|B|^{(n_1-p-1)/2}|I_p-B|^{(n_2-p-1)/2}. \tag{3.1}$$

引理 3.2 $(D_1,\cdots,D_k)\sim \mathrm{MD}_{k+1,p}(n_1/2,\cdots,n_k/2;n_{k+1}/2)$的密度函数是

$$\frac{\Gamma_p\Big(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k+1}n_i\Big)}{\prod\limits_{i=1}^{k+1}\Gamma_p\Big(\frac{1}{2}n_i\Big)}\prod_{i=1}^{k}|D_i|^{(n_i-p-1)/2}\cdot\Big|I_p-\sum_{i=1}^{k}D_i\Big|^{(n_{k+1}-p-1)/2}, \tag{3.2}$$

$D_i>0$, $i=1,2,\cdots,k$, $\sum\limits_{i=1}^{k}D_i<I_p$.

3.2 主要结果及其证明

定理 3.1 若$(W_1,\cdots,W_m)\sim \mathrm{MG}_{m,p}(n_1/2,\cdots,n_m/2;f)$, 则对任意的$p$阶非奇异矩阵$C$, 有

$$(C'W_1C,\cdots,C'W_mC)\sim \mathrm{MG}_{m,p}\Big(\frac{n_1}{2},\cdots,\frac{n_m}{2};\widetilde{f}\Big), \tag{3.3}$$

$\widetilde{f}$的定义见(2.1)式.

证明: 因为$(W_1,\cdots,W_m)\sim \mathrm{MG}_{m,p}(n_1/2,\cdots,n_m/2;f)$, 所以存在$X=(X_1',\cdots,X_m')'$, $X_i: n_i\times p$, $n_i\geq p$, $i=1,\cdots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i=n$. 使得$W_i=X_i'X_i$, $i=1,\cdots,m$. 作变换$\widetilde{X}=XC$, 由引理2.1, $\widetilde{X}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$, 对$\widetilde{X}$作类似$X$的分块, 则$\widetilde{X}_i=X_iC$, $i=1,\cdots,m$. 由定义2.1, $(\widetilde{W}_1,\cdots,\widetilde{W}_m)\sim \mathrm{MG}_{m,p}(n_1/2,\cdots,n_m/2;\widetilde{f})$, 其中$\widetilde{W}_i=\widetilde{X}_i'\widetilde{X}_i=(X_iC)'(X_iC)=C'X_i'X_iC=C'W_iC$代入即得结论. □

此定理说明: 对W_i作相同的非奇异变换, MG分布类型及参数均不发生变化, 仅仅是构成它的左球分布变化了.

定理 3.2 设$X\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, $n\geq p$, $W=X'X$, 记$X=(X_1',X_2')'$, 其中$X_i: n_i\times p$, $n_i\geq p$, $i=1,2$, $n_1+n_2=n$. 令$W_i=X_i'X_i$, $i=1,2$, 则

$$\widetilde{B}=(C'WC)^{-1/2}(C'W_1C)(C'WC)^{-1/2}\sim \mathrm{B}_p\Big(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\Big). \tag{3.4}$$

且$\widetilde{B}$的密度与矩阵C无关, 仍为

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma_p(n_1/2)\Gamma_p(n_2/2)}|B|^{(n_1-p-1)/2}|I_p-B|^{(n_2-p-1)/2}. \tag{3.5}$$

当$0<B<I_p$时, 其中$B=W^{-1/2}W_1W^{-1/2}$.

证明: 由于$X\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f)$, 所以对任意的$p$阶非奇异矩阵$C$, 令$\widetilde{X}=XC$, 由引理2.1, $\widetilde{X}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$, 其中$\widetilde{f}$由(2.1)式定义. 对$\widetilde{X}$作类似于$X$的分块, 得

$$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}\widetilde{X}_1\\ \widetilde{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1C\\ X_2C\end{pmatrix}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f}).$$

记$\widetilde{W}_i=\widetilde{X}_i'\widetilde{X}_i$, $i=1,2$, 则由定理3.1

$$(\widetilde{W}_1,\widetilde{W}_2)\sim \mathrm{MG}_{2,p}\Big(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2};\widetilde{f}\Big),$$

利用矩阵Beta分布的定义有

$$\widetilde{B}=(\widetilde{W}_1+\widetilde{W}_2)^{-1/2}\cdot(\widetilde{W}_1)(\widetilde{W}_1+\widetilde{W}_2)^{-1/2}\sim \mathrm{B}_p\Big(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\Big).$$

注意到$\widetilde{W}_i=C'W_iC$, 代入上式有

$$\widetilde{B}=(C'WC)^{-1/2}\cdot(C'W_1C)(C'WC)^{-1/2}\sim \mathrm{B}_p\Big(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\Big).$$

可见(3.4)式成立.

由引理3.1, $\widetilde{B}$的联合密度为

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma_p(n_1/2)\Gamma_p(n_2/2)}|\widetilde{B}|^{(n_1-p-1)/2}|I_p-\widetilde{B}|^{(n_2-p-1)/2},\qquad 0<\widetilde{B}<I_p.$$

利用$\widetilde{B}=(C'WC)^{-1/2}\cdot(C'W_1C)\cdot(C'WC)^{-1/2}$, 有

$$\begin{aligned}
|\widetilde{B}| &= |(C'WC)^{-1/2}\cdot(C'W_1C)\cdot(C'WC)^{-1/2}| \\
&= |C|^{-1}|W|^{-1/2}|C'||W_1||C||C^{-1}||W|^{-1/2} \\
&= |W|^{-1/2}|W_1||W|^{-1/2} = |W^{-1/2}W_1W^{-1/2}| = |B|, \\
|I_p-\widetilde{B}| &= |(C'WC)^{-1/2}\cdot C'(W-W_1)C\cdot(C'WC)^{-1/2}| \\
&= |(C'WC)^{-1/2}||C'WC-C'W_1C||(C'WC)^{-1/2}| \\
&= |W|^{-1/2}|W-W_1||W|^{-1/2} = |I_p-W^{-1/2}W_1W^{-1/2}| = |I_p-B|.
\end{aligned}$$

代入$\widetilde{B}$的密度函数即得(3.5)式. □

推论 3.1 在定理3.2的条件下,

$$\begin{aligned}
I_p-\widetilde{B} &= I_p-(C'WC)^{-1/2}\cdot(C'W_1C)\cdot(C'WC)^{-1/2} \\
&= (C'WC)^{-1/2}\cdot(C'W_2C)\cdot(C'WC)^{-1/2}\sim \mathrm{B}_p\Big(\frac{n_2}{2},\frac{n_1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

推论 3.2 在定理3.2的条件下,

$$\widehat{B}=(C'WC)^{1/2}\cdot(C'W_1C)^{-1}\cdot(C'WC)^{1/2}\sim \mathrm{B}_p^{-1}\Big(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\Big).$$

定理 3.3 在矩阵Dirichlet分布的定义和引理3.2的假设条件下, 设

$$\widetilde{W}_i=C'W_iC,\quad i=1,\cdots,k+1,\qquad \widetilde{W}=\sum_{i=1}^{k+1}\widetilde{W}_i,$$
$$(\widetilde{D}_1,\cdots,\widetilde{D}_k)=(\widetilde{W}^{-1/2}\widetilde{W}_1\widetilde{W}^{-1/2},\cdots,\widetilde{W}^{-1/2}\widetilde{W}_k\widetilde{W}^{-1/2}),$$

则

$$(\widetilde{D}_1,\cdots,\widetilde{D}_k)\sim \mathrm{MD}_{k+1,p}\Big(\frac{n_1}{2},\cdots,\frac{n_k}{2};\frac{n_{k+1}}{2}\Big). \tag{3.6}$$

证明: 由$(D_1,\cdots,D_k)\sim \mathrm{MD}_{k+1,p}(n_1/2,\cdots,n_k/2;n_{k+1}/2)$知, 存在

$$(W_1,\cdots,W_{k+1})\sim \mathrm{MG}_{k+1,p}\Big(\frac{n_1}{2},\cdots,\frac{n_{k+1}}{2};f\Big),$$

$n_j\ge p$, $j=1,2,\cdots,k+1$, $n_{k+1}\ge 1$, $W=\sum\limits_{i=1}^{k+1}W_i$, 使得

$$(D_1,\cdots,D_k)=(W^{-1/2}W_1W^{-1/2},\cdots,W^{-1/2}W_kW^{-1/2}).$$

作变换$\widetilde{W}_i=C'W_iC$, $i=1,\cdots,k+1$, $\widetilde{W}=\sum\limits_{i=1}^{k+1}\widetilde{W}_i$, 由定理3.1知

$$(\widetilde{W}_1,\cdots,\widetilde{W}_{k+1})\sim \mathrm{MG}_{k+1,p}\Big(\frac{n_1}{2},\cdots,\frac{n_{k+1}}{2};\widetilde{f}\Big),$$

$n_j \geq p,\ j=1,2,\cdots,k+1,\ n_{k+1}\geq 1,\ \widetilde{f}$由(2.1)式定义. 于是由矩阵Dirichlet分布定义得:
$(\widetilde{W}^{-1/2}\widetilde{W}_1\widetilde{W}^{-1/2},\cdots,\widetilde{W}^{-1/2}\widetilde{W}_k\widetilde{W}^{-1/2})=(\widetilde{D}_1,\cdots,\widetilde{D}_k)\sim \mathrm{MD}_{k+1,p}\Big(\dfrac{n_1}{2},\cdots,\dfrac{n_k}{2};\dfrac{n_{k+1}}{2}\Big).$
(3.6)式成立. □

可见矩阵Dirichlet分布关于这种非奇异变换也具有不变性质.

推论 3.3　在定理3.3的条件下,

$$(\widetilde{W}^{1/2}\widetilde{W}_1^{-1}\widetilde{W}^{1/2},\cdots,\widetilde{W}^{1/2}\widetilde{W}_k^{-1}\widetilde{W}^{1/2})\sim \mathrm{MD}_{k+1,p}^{-1}\Big(\frac{n_1}{2},\cdots,\frac{n_k}{2};\frac{n_{k+1}}{2}\Big),$$

且分布密度与矩阵C无关.

定理 3.4　设$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f),\ X_i:n_i\times p,\ n_i\geq p,\ i=1,2.$ 则对任意p阶非奇异矩阵C, 有

$$\widetilde{F}=\frac{n_2}{n_1}(C'X_2'X_2C)^{-1/2}\cdot C'X_1'X_1C\cdot(C'X_2'X_2C)^{-1/2}\sim \mathrm{MF}(p,n_1,n_2). \tag{3.7}$$

证明:　作变换$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}\widetilde{X}_1\\\widetilde{X}_2\end{pmatrix}=XC,\ \widetilde{X}_i=X_iC,\ i=1,2,$ 由引理2.1知$\widetilde{X}=XC\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$, 利用定理2.1立得

$$\widetilde{F}=\frac{n_2}{n_1}(\widetilde{X}_2'\widetilde{X}_2)^{-1/2}\cdot\widetilde{X}_1'\widetilde{X}_1\cdot(\widetilde{X}_2'\widetilde{X}_2)^{-1/2}\sim \mathrm{MF}(p,n_1,n_2).$$

(3.7)式成立. □

定理 3.5　设$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(f),\ X_i:n_i\times p,\ n_i\geq p,\ i=1,2.$ 则对任意p阶非奇异矩阵C, 有

$$\widetilde{T}=(n_2)^{1/2}X_1C(C'X_2'X_2C)^{-1/2}\sim \mathrm{MT}(p,n_1,n_2), \tag{3.8}$$

且$\widetilde{T}$的联合密度函数仍为

$$\frac{\Gamma_p[(n_1+n_2)/2]}{(n_2\pi)^{n_1p/2}\Gamma_p(n_2/2)}\Big|I_p+\frac{1}{n_2}\widetilde{T}'\widetilde{T}\Big|^{-(n_1+n_2)/2}, \tag{3.9}$$

与X的密度f, 常数矩阵C均无关.

证明:　仍然作变换$\widetilde{X}=XC$, 由引理2.1有$\widetilde{X}=\begin{pmatrix}\widetilde{X}_1\\\widetilde{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1C\\X_2C\end{pmatrix}\sim \mathrm{LS}_{n\times p}(\widetilde{f})$, $\widetilde{f}$由(2.1)式定义. 于是根据定理2.2有$(n_2)^{1/2}\widetilde{X}_1(\widetilde{X}_2'\widetilde{X}_2)^{-1/2}\sim \mathrm{MT}(p,n_1,n_2)$, 且与$\widetilde{f}$无关.

将$\widetilde{X}_i=X_iC,\ i=1,2$代入得:

$$(n_2)^{1/2}\widetilde{X}_1(\widetilde{X}_2'\widetilde{X}_2)^{-1/2}=(n_2)^{1/2}X_1C(C'X_2'X_2C)^{-1/2}=\widetilde{T},$$

即$\widetilde{T}=(n_2)^{1/2}X_1C(C'X_2'X_2C)^{-1/2}\sim \mathrm{MT}(p,n_1,n_2)$, 式(3.8)和(3.9)成立. □

参 考 文 献

[1] 胡端平, 条件分布与椭球等高分布的特征研究, 数理统计与应用概率, **13(4)**(1998), 295–299.

[2] 胡端平, 椭球等高分布的条件分布, 应用数学与计算数学学报, **15(2)**(2001), 41–44.

[3] 胡端平, 椭球等高分布的逆问题, 应用概率统计, **16(2)**(2000), 177–181.

[4] Kibria, B.M.G., The matrix-t distribution and its applications in predictive inference, *Journal of Multivariate Analysis*, **97**(2006), 785–795.

[5] 方开泰, 张尧庭, 广义多元分析, 科学出版社, 1993.

[6] 张尧庭, 方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 1982.

An Invariant Property of the Elliptically Contoured Distribution about the Non-Singular Matrix Transformation

Shi Aiju[1,2] Lin Jinguan[1]

([1]*Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing, 210096*)

([2]*College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, 210046*)

In this paper, we first extend the definitions of matrix F and t distributions to the left spherical distribution family, prove the density functions have no relation with the one producing them and then show that discuss the elliptically contoured distributions are invariant under nonsingular matrix transformations. These distributions include the matrix Beta, inverse Beta, Dirichlet, inverse Dirichlet, F and t etc. And finally it is shown that their distribution density functions not only have no relation with the density function generating them but also the transformation matrix.

Keywords: Elliptically contoured distribution, matrix t distribution, matrix F distribution, Beta, Dirichlet distribution, nonsingular matrix transformation, invariance.

AMS Subject Classification: 62H10.