应用概率统计　第二十七卷
第四期　2011年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.4 Aug. 2011

不确定环境下定期人寿保险的破产概率区间的计算 *

万　中　　胡朝明　　尹　伟

(中南大学数学科学与计算技术学院, 长沙, 410083)

《应用概率统计》版权所用

摘　要

针对实际问题存在的不确定因素, 研究了含不确定参数的定期人寿保险的破产模型, 其中死亡率和净年保单数分别用区间数和随机参数刻画. 推导了破产概率区间的计算公式, 且用泊松分布近似时得到其近似计算方法. 该模型的建立既考虑了初始准备金的利息积累和任何时刻的新投保人的加入, 并采用了新的分组方式, 又考虑了实际问题中的不确定因素, 因而能够更加真实地刻画了实际过程, 比传统模型更具实用性.

关键词: 概率区间, 定期人寿保险, 破产风险.

学科分类号: O211.67.

§1. 引　　言

区别于财产保险, 人寿保险具有变动的风险率, 不同年龄的人死亡率不同, 特别是人到晚年, 死亡率更是加速度增加, 因此在建立人寿保险破产模型及计算破产阈值时, 把用于测定保险风险的死亡率看成不确定参数更加合适. 现有的保险产品设计原则和寿险精算模型, 基本上没有考虑这种影响(参看文献[1]-[9]). 基于已有研究结果[5]和[8], 本文将将针对实际问题存在的不确定因素, 研究含不确定参数的定期人寿保险的破产模型, 并推导破产阈值的计算方法. 同以往模型的主要差别是: 1) 我们假设不同年龄的投保人死亡率(或生存率)不同, 且每一个年龄的死亡率(或生存率)是一个区间数. 2) 我们把每年收到的新保单的数量与保单到期的数量之差假设为服从正态分布的随机参数. 3) 我们考虑了初始准备金的利息积累, 对投保人采用了按年龄分组的分组方式. 上述这些假设保证了本文提出的模型更加真实地刻画实际人寿保险的破产过程.

§2. 期望准备金的区间值计算公式

假设任意一份T年期定期保险合同, 其保费于每年年初缴付, 赔付于年末进行. 若将投保人按年龄分组, 则对固定的一年, j岁的投保人即属于第j组. 假设极限年龄为常数m(岁), 则j的取值范围是$j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. 显然, 当次年度原本$j$岁的人变为$j+1$岁时, 原$j$组投保

*国家自然科学基金(71071162, 70921001)资助.
本文2008年2月18日收到.

人属于第$j+1$组. 假设第j组(即j岁)的投保人在一年内的死亡率为区间数$q_j^{\pm}$ (q_j的取值可参考经验生命表). 因此, 投保人在一年内的生存率

$$p_j^{\pm}=1-q_j^{\pm}$$

也是区间数. 考虑到实际问题中多种不确定性因素影响, 特别是投保人对保险种类的喜好和不确定性经济因素(如通货膨胀率和利率), 根据上述投保人按年龄分组的原则, 我们假设第j组每年收到的新保单的数量与保单到期的数量之差是服从正态分布的随机参数, 记为$\mathbf{a}_j\sim N(\mu_j,\delta_j^2)$.

由于死亡率为区间数, 所以每年投保人人数的期望也是区间数. 记第k年年初时第j组的投保人人数的期望为$n_k^{\pm}(j)$ (第一年投保人人数$n_1(j)$是常数, 此时, $n_1^-(j)=n_1^+(j)$, $j=1,2,\ldots,m$), 记$d_k^{\pm}(j)$为第k年内第j组被保险人的死亡人数, 则$d_k^{\pm}(j)=n_k^{\pm}(j)q_j^{\pm}$ $(k\geq 1)$, 且如下关系式成立:

$$n_k^{\pm}(j)=n_{k-1}^{\pm}(j-1)-n_{k-1}^{\pm}(j-1)q_{j-1}^{\pm}+\mathsf{E}(\mathbf{a}_j),\tag{2.1}$$

其中$\mathsf{E}(\mathbf{a}_j)$表示随机参数$\mathbf{a}_j$的数学期望.

(2.1)式给出了第k年年初时各组投保人期望人数与上年度年初时投保人期望人数和被保险人的死亡人数之间的关系. 这样, 第k年年初投保人的总数的期望值为

$$N_k^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}n_k^{\pm}(j).$$

根据上述讨论和数学期望的性质, 可以得到如下结论.

命题 2.1 如果$N_k^{\pm}$是第k年年初投保人的期望总数, 则有如下递推关系式

$$\begin{cases}N_1^{\pm}=\sum\limits_{j=1}^{m}n_1^{\pm}(j),\\ N_k^{\pm}=N_{k-1}^{\pm}-\sum\limits_{j=1}^{m}d_{k-1}^{\pm}(j)+\sum\limits_{j=1}^{m}\mathsf{E}(\mathbf{a}_j).\end{cases}\tag{2.2}$$

假设保险合约中规定第j组的被保险人每年所交的保费为c_j, $j=1,2,\ldots,m$, 保险期内每个被保险人死亡时的赔付额为b. 如果第k年的利率是i_k, 则保险公司第j组在第k年年初时的期望准备金是一区间数, 且满足如下关系式:

$$u_{k+1}^{\pm}(j)=(u_k^{\pm}(j)+n_k^{\pm}(j)c_j)(1+i_k)-bd_k^{\pm}(j).$$

因此, 第k年年初时的期望准备金总额的区间值$U_k^{\pm}$可按如下公式计算:

$$\begin{cases}U_k^{\pm}=\sum\limits_{j=1}^{m}u_k^{\pm}(j),\\ U_{k+1}^{\pm}=\Big(U_k^{\pm}+\sum\limits_{j=1}^{m}n_k^{\pm}(j)c_j\Big)(1+i_k)-b\sum\limits_{j=1}^{m}d_k^{\pm}(j).\end{cases}\tag{2.3}$$

《应用概率统计》版权所用

《应用概率统计》版权所用

§3. 定期人寿保险破产的概率区间

首先引入盈余和破产概念.

定义 3.1 设U_1为保险公司的初始准备金, $c>0$为单位时间内的保费收入率. 对任意的$t>0$, 称$R_t=U_1+ct-S_t$为时刻t时的盈余, 其中S_t是到时刻t保险公司支付的理赔总额. 如果$R_t<0$, 则称该保险公司破产, 而下确界$T=\inf\{t\,|\,R_t<0\}$被称为破产发生时刻.

定义 3.2 称实值函数$\Psi_t(\cdot,\cdot)\to[0,1]$, $\Psi_t(x,y)=\mathsf{P}\{T<t\}$为对应初始准备金$x$和初始时刻的投保人$y$, t年内公司破产的概率, 其中$\mathsf{P}\{\cdot\}$表示某种概率测度.

以下定理给出了不确定条件下定期人寿保险公司破产概率区间的计算方法.

定理 3.1 在定期人寿保险模型中(T年期保单), 如果初始准备金为

$$U_1=\sum_{j=1}^{m}u_1(j),$$

其中$u_1(j)$是第j组的初始准备金, 第一年年初投保人总数为

$$N_1=\sum_{j=1}^{m}n_1(j),$$

其中$n_1(j)$是初始年年初时第j组的投保人人数. 那么, 保险公司到第t年年末的破产概率区间为

$$\begin{aligned}\Psi_t^{\pm}(U_1,N_1) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k>d_1^*(j)}^{n_1(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_1^*(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\Psi_{t-1}(U_2,N_2),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中

$$\begin{cases}d_1^*(j)=\dfrac{(n_1(j)c_j+u_1(j))(1+i_1)}{b}, & j=1,2,\ldots,m,\\ d_1^*=\sum\limits_{j=1}^{m}d_1^*(j),\\ L_1^{\pm}=\sum\limits_{j=1}^{m}d_1(j),\\ U_2^{\pm}=\Big(U_1+\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j\Big)(1+i_1)-L_1^{\pm}b,\\ N_2^{\pm}=N_1+\sum\limits_{j=1}^{m}\mathsf{E}(\mathbf{a}_j)-L_1^{\pm}.\end{cases}$$

《应用概率统计》版权所用

证明： 因为死亡率为区间数, 所以各年的死亡或存活可看成一种推广的贝努利概型. 假设年初被保险人数为n, 则为n重Bernoulli概型.

因为死亡概率与年龄密切相关, 所以模型的建立是按被保险人的年龄分组. 虽然每组的破产概率之和并不等于总破产概率之和(因为一组破产可能由其他组盈余来弥补), 但是, 我们可以考虑总破产概是各组破产概率加权求和. 又因为决定破产与否的关键因素是净资产值的盈亏状况, 所以该权重的取值为各组收取的保费占总保费的比例.

先考虑第一年的情形. 第一年年末的时候, 保险公司由于要支付赔偿金, 可能导致公司破产或不破产, 其破产临界点是研究此类问题的关键. 显然, 第一年保险公司的破产临界点为第一年年初所收取的保费与初始准备金之和恰好等于第一年年末需要支付的赔偿金, 其中第j组破产临界点的基本数学模型是

$$(n_1(j)c_j + u_j)(1+i_1) = bd_1^*(j), \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

而

$$d_1^*(j) = \frac{(n_1(j)c_j + u_1(j))(1+i_1)}{b}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

令

$$d_1^* = \sum_{j=1}^{m} d_1^*(j).$$

因为对给定的$n_1(j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, 在第一年内的死亡人数服从含区间参数的二项分布$B(n_1(j), q_j^{\pm})$, 而第j组的权重, 即$n_1(j)$个被保险人所收的保费占总保费的比例为

$$\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_1(j)c_j},$$

所以到第一年年末发生破产的概率区间为

$$\Psi_1^{\pm}(U_1, N_1) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k>d_1^*(j)}^{n_1(j)} \frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_1(j)c_j} C_{n_1(j)}^{k} (q_j^{\pm})^k (p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}.$$

若第一年年末未发生破产, 记

$$L_1^{\pm} = \sum_{j=1}^{m} d_1^{\pm}(j),$$

则第二年年初还未收取第二年的保费时的准备金为

$$U_2^{\pm} = \Big(U_1 + \sum_{j=1}^{m} n_1(j)c_j\Big)(1+i_1) - L_1^{\pm} b.$$

《应用概率统计》版权所用

接下来考虑第$t\,(t>1)$年的临界状态. 记$d_t^*(j)$为恰好导致第j组在第t年末发生破产时的临界死亡人数. 因为受不确定性因素影响, 亦为如下区间数

$$(d_t^*)^{\pm}(j)=\frac{(n_t^{\pm}(j)c_j+u_t^{\pm}(j))(1+i_t)}{b},\qquad j=1,2,\ldots,m.$$

令

$$(d_t^*)^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}(d_t^*)^{\pm}(j).$$

如果第t年年未破产, 那么第$t+1$年年初还未收取当年保费时的期望准备金为

$$U_{t+1}^{\pm}=\Big(U_t^{\pm}+\sum_{j=1}^{m}n_t^{\pm}(j)c_j\Big)(1+i_t)-L_t^{\pm}b,$$

其中

$$L_t^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}d_t^{\pm}(j).$$

上述$U_t^{\pm}$, $N_t^{\pm}$, $u_t^{\pm}(j)$, $n_t^{\pm}(j)$, $(d_t^*)^{\pm}(j)$和$(d^*)_t^{\pm}$在下文的递推求解破产概率的过程起到重要作用.

下面先推导到第2年年末破产概率区间的计算方法.

我们把第一年年末保险公司能出现的各种运营结果视为总样本空间Ω, 并对Ω做一个分割

$$\Omega=B_1\cup B_2,$$

其中B_1表示随机事件"公司在第一年年末破产", B_2表示随机事件"公司在第一年年末未破产", 则此寿险公司到第二年年末发生破产的概率区间等于到第一年年末发生破产的概率区间加上第二年发生破产的概率区间(在第一年年末未发生破产的条件下), 即

$$\begin{aligned}\Psi_2^{\pm}(U_1^{\pm},N_1^{\pm}) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k>d_1^*(j)}^{n_1(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_1^*(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\Psi_1^{\pm}(U_2,N_2),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}U_2^{\pm}&=\Big(U_1+\sum_{j=1}^{m}n_1(j)c_j\Big)(1+i_1)-L_1^{\pm}b,\\ N_2^{\pm}&=N_1+\sum_{j=1}^{m}\mathsf{E}(\mathbf{a}_j)-L_1^{\pm},\qquad L_1^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}d_1^{\pm}(j),\end{aligned}$$

且与和式中的k, j均有关, $\Psi_1^{\pm}(U_2,N_2)$表示准备金为$U_2^{\pm}$, 被保险人总数为$N_2^{\pm}$的第一年年内破产的概率区间.

《应用概率统计》版权所用

类似于第二年的推导过程, 可以得到到第t年年末的破产概率区间的计算方法

$$\begin{aligned}\Psi_t^{\pm}(U_1,N_1) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k>d_1^*(j)}^{n_1(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_1^*(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}C_{n_1(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_1(j)-k}\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm}),\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中$\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm})$表示准备金为$U_2^{\pm}$, 被保险人总数为$N_2^{\pm}$在$t-1$年内破产的概率区间. 证毕. □

注记 1 $\Psi_t^{\pm}$的计算不能直接利用$\Psi_{t-1}^{\pm}$递推, 这是因为$\Psi_{t-1}^{\pm}(U_1,N_1)$和$\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm})$的参数$U$、$N$不同. 不过, $\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm})$的计算公式与$\Psi_{t-1}^{\pm}(U_1,N_1)$的计算公式类似. 我们有

$$\begin{aligned}\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm}) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k>d_2^*(j)}^{n_2(j)}\frac{n_2(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_2(j)c_j}C_{n_2(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_2(j)-k}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_2^*(j)}\frac{n_2(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_2^{\pm}(j)c_j}C_{n_2(j)}^{k}(q_j^{\pm})^k(p_j^{\pm})^{n_2^{\pm}(j)-k}\Psi_{t-2}^{\pm}(U_3^{\pm},N_3^{\pm}),\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中$\Psi_{t-2}^{\pm}(U_3^{\pm},N_3^{\pm})$的计算公式与$\Psi_{t-2}^{\pm}(U_1,N_1)$的计算公式类似, 依此类推.

§4. 泊松近似方法

由泊松定理, 我们知道当二项分布$B(n,p)$中n充分大, 而p充分小时, 泊松分布可以很好的逼近二项分布. 在定期保险中, 被保险人数充分大, 而被保险人的死亡概率非常小, 因此在定期人寿保险中可以用泊松分布来逼近二项分布, 得到原破产概率区间的的近似表达式.

令

$$\lambda_k^{\pm}(j)=n_k^{\pm}(j)q_j^{\pm},$$

则得到如下结论.

定理 4.1 在定期人寿保险模型中(T年期保单), 设初始准备金为

$$U_1=\sum_{j=1}^{m}u_1(j),$$

第一年年初被保险人的总数为

$$N_1=\sum_{j=1}^{m}n_1(j),$$

《应用概率统计》版权所用

其他变量均满足模型假设的条件, 则保险公司到第t年年末的破产概率区间为

$$\begin{aligned}\Psi_t^{\pm}(U_1,N_1) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k>d_1^*(j)}^{n_1(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}\frac{\lambda_1^{\pm}(j)^k}{k!}e^{-\lambda_1^{\pm}(j)}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{d_1^*(j)}\frac{n_1(j)c_j}{\sum\limits_{j=1}^{m}n_1(j)c_j}\frac{\lambda_1^{\pm}(j)^k}{k!}e^{-\lambda_1^{\pm}(j)}\Psi_{t-1}^{\pm}(U_2^{\pm},N_2^{\pm}),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&U_2^{\pm}=\Big(U_1+\sum_{j=1}^{m}n_1(j)c_j\Big)(1+i_1)-L_1^{\pm}b,\qquad (L_1\in\{0,1,\dots,d_1^*\},\\ &N_2^{\pm}=N_1+\sum_{j=1}^{m}\mathsf{E}(\mathbf{a}_j)-L_1^{\pm},\\ &L_1^{\pm}=\sum_{j=1}^{m}d_1(j),\qquad d_1(j)\in\{0,1,\dots,d_1^*(j)\}.\end{aligned}$$

§5. 结　　论

本文建立了含不确定参数的定期人寿保险的破产模型, 其中死亡率和净年保单数分别用区间数和随机参数刻画. 推导了破产概率区间的计算公式, 且用泊松分布近似时得到其近似计算方法. 由于该模型的建立既考虑了初始准备金的利息积累和任何时刻的新投保人的加入, 并采用了新的分组方式, 又考虑了实际问题中的不确定因素, 因而比以往模型更具实用性.

参 考 文 献

[1] 于栋华, 吴冲锋, 陈湘鹏, 随机时间变换下的寿险精算模型, 管理科学学报, **13(6)**(2010), 64–72.

[2] Bernard, C., Le Courtois, O. and Quittard-Pinon, F., A study of mutual insurance for bank deposits, *The Geneva Risk and Insurance Review*, **30(2)**(2005), 129–146.

[3] Briys, E. and de Varenne, F., Life insurance in a contingent claim framework: pricing and regulatory implications, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, **19**(1994), 53–72.

[4] Briys, E. and de Varenne, F., On the risk of insurance liabilities: debunking some common pitfalls, *The Journal of Risk and Insurance*, **64(4)**(1997), 673–694.

[5] 高建伟, 邱宛华, 定期人寿保险中的破产模型, 系统工程理论与实践, **22(5)**(2002), 66–70.

[6] Grosen, A. and Jøgensen, P.L., Life insurance liabilities at market value: an analysis of insolvency risk, bonus policy, and regulatory intervention rules in a barrier option framework, *The Journal of Risk and Insurance*, **69(1)**(2002), 63–91.

[7] Jøgensen, P.L., On accounting standards and fair valuation of life insurance and pension liabilities, *Scandinavian Actuarial Journal*, **5**(2004), 372–394.

[8] 林祥, 关于"定期人寿保险中的破产模型"的注记, 系统工程理论与实践, **25(4)**(2005), 141–144.
[9] 孙立娟, 顾岚, 保险公司破产概率的估计及随机模拟, 系统工程理论与实践, **20(7)**(2000), 63–68.

Computation of Interval Probability for Bankruptcy Procedure in Term Life Insurance With Uncertain Environment

Wan Zhong Hu Chaoming Yin Wei

(*School of Mathematics Sciences and Computational Technology, Central South University, Changsha, 410083*)

In this paper, a new model is constructed by taking uncertain environment into consideration for the bankruptcy risk problems in term life insurance, where the mortality rate is regarded as an interval parameter and the net insurance policy is a random parameter. Formula for computing the interval probability of bankruptcy is obtained, an approximation method owing to Poisson distribution is studied. Since some important aspects have been taken into consideration in the new formulation, such as the accumulating interest of initial reserve, the entry of new customers at any time, the design of new grouping fashion and the uncertain environment, the result obtained in this paper is more practical than the existing models.

Keywords: Interval probability, term life insurance, bankruptcy risk.
AMS Subject Classification: 62P05, 60G25.

《应用概率统计》版权所用