应用概率统计 第二十七卷
第六期 2011年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.6 Dec. 2011

识别概念的允许变换说质疑

李景华
(山西财经大学统计学院, 太原, 030006)

朱尚伟
(山西财经大学应用数学学院, 太原, 030006)

摘 要

经济计量学联立方程模型识别概念的一个权威观点是Fisher的允许变换说, 其特征是将结构式参数的约束信息与协方差参数的约束信息联合纳入识别范围. 我们的工作证明了协方差约束对变量的缺省性约束有挤出作用. 由于变量的缺省性约束对保证方程的观测不等价性是必需的, 因此两类约束条件的联合识别是不能成立的.

关 键 词: 识别, 参数零约束, 协方差约束, 允许变换.

学 科 分 类 号: F224.0.

§1. 引 言

经济计量学联立方程模型的首要问题是方程的识别问题. 识别概念的一个权威观点是Fisher (1966, 文[1])所阐述的识别观. 这一观点通过允许变换概念, 将结构式参数的约束信息与协方差参数的约束信息联合纳入识别范围. 诚然, 任何一个联立方程模型都至少存在来自两个方面的约束信息. 一是关于各个方程式中变量的缺省性条件(结构式参数的零约束条件), 否则每一个变量将会出现在每一个方程中, 模型中任何两个方程都会成为观测等价方程; 二是关于误差项协方差概率特征的描述, 否则任何一种估计方法都无从谈起任何条款的统计性质. 但是, 这两类约束的联合识别究竟会把我们引向什么样的识别目标? 而什么又是我们必须保证的识别目标呢?

我们认为, 统计观测是经济计量研究的必由路线, 而没有变量缺省性条件的识别概念将无法保证方程间的观测不等价性. 因此任何其它约束条件的识别, 只要妨碍变量缺省性条件的识别, 都是必须被摈弃的. 本文的工作揭示了一个事实: 协方差约束的识别对变量缺省性约束的识别有部分甚至完全的挤出效应. 因此, Fisher所表述的两种约束条件的联合识别是不能成立的.

Fisher的识别观点从提出至今在经济计量学界一直具有权威的地位, 国外许多著名经济计量学家在他们的著作中采用或介绍这一识别观点, 见文[2]、[3]以及[4]等. 为叙述方便起见, 本文称Fisher的识别观点为允许变换说.

本文2008年12月2日收到.

§2. 识别概念的允许变换说

设联立方程模型

$$BY = \Gamma X + U, \tag{2.1}$$

其中$Y=(Y_1,\ldots,Y_g)^\tau$, $X=(X_1,\ldots,X_k)^\tau$, $U=(U_1,\ldots,U_g)^\tau$分别表示当期内生变量向量、前定变量向量与随机误差向量. $B=(b_{ij})_{g\times g}$, $\Gamma=(\gamma_{ij})_{g\times k}$称为模型的结构式参数矩阵; B可逆, $b_{ii}=1$, $i=1,\ldots,g$. 式(2.1)又称为联立方程模型的结构式.

记$A=(B,\Gamma)$, $\Sigma=\mathsf{Cov}\,(U)$, Fisher首先引入允许变换概念.

允许变换 一个由$g\times g$阵F表示的线性变换被称为是允许的, 当且仅当它具有以下三条性质:

(a) F非奇异.

(b) $A^*=FA$满足关于A的全部先验约束.

(c) $\Sigma^*=F\Sigma F^\tau$满足关于Σ的全部先验约束.

借助允许变换概念, Fisher以模型第一个方程的可识别性为例给出了他的识别定义:

模型(2.1)中第一个方程称为可识别的, 当且仅当任意一个允许变换的第一行都是e_1的数乘, e_1为g维单位行向量.

Fisher所考虑的参数约束是矩阵$A=(B,\Gamma)$中行元素的线性齐次约束. 设A的第m个行向量为α_m, $\Phi(m)=(\phi_{ij}(m))_{(g+k)\times(n(m))}$为关于第$m$个方程结构式参数的线性齐次约束矩阵, $n(m)$为约束个数. 第m个方程的线性齐次约束被被表述为

$$\alpha_m\Phi(m)=0.$$

容易理解, 变量的缺省性约束是最具实践意义的线性齐次约束. 通过元素$\phi_{ij}(m)$的0-1规定, 即可表达第m个方程中变量的缺省性信息: 对于$j\in 1,\ldots,n(m)$,

$$\begin{cases}\phi_{ij}(m)=1, & Y_i\text{ 或 }X_{i-g}\text{ 不出现;}\\ \phi_{ij}(m)=0, & \text{其余.}\end{cases}$$

Fisher没有规定关于协方差矩阵Σ的约束形式. 但随机误差项之间的相关与不相关性必然是最基本的约束信息.

§3. 识别概念的允许变换说质疑

3.1 一个例子

按照识别的允许变换说观点, 考虑一个变换是否是允许的, 至少应该检查FA与A, 以及$F\Sigma F^\tau$与Σ是否满足相同位置的零约束. 由于没有必要区别方程在方程组中的排列顺序, 这里F只是第二与第三类初等变换的乘积. 以下是我们构建的一个示例模型, 按照允许变换说观点它是可以识别的.

例 1

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3 + \alpha_3 x_1 + u_1,\\
y_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 x_2 + u_2,\\
y_3 &= \gamma_1 y_2 + \gamma_2 x_1 + u_3,
\end{aligned}
$$

其中y_i, $i=1,2,3$是当期内生变量, x_i, $i=1,2$是前定变量, u_i, $i=1,2,3$是随机误差项. 容易写出模型的矩阵向量形式

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.
$$

它有结构式参数矩阵

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad
\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

模型有7个关于变量的缺省性约束, 它们是

$$
\gamma_{13} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = \gamma_{31} = \gamma_{33} = 0, \qquad b_{23} = b_{31} = 0.
$$

我们规定误差项的协方差约束如下

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.
$$

这是极为平常的协方差假定, 它的意义是在任何时间t, 各方程的误差项之间不相关.

考虑允许变换$F=(f_{ij})_{3\times 3}$, 计算

$$
F\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_0 f_{11} & \alpha_3 f_{11} + \gamma_2 f_{13} & \beta_2 f_{12} \\ \alpha_0 f_{21} & \alpha_3 f_{21} + \gamma_2 f_{23} & \beta_2 f_{22} \\ \alpha_0 f_{31} & \alpha_3 f_{31} + \gamma_2 f_{33} & \beta_2 f_{32} \end{pmatrix},
$$

注意到Γ中元素的零约束, 应有

$$
f_{12} = f_{21} = f_{23} = f_{31} = f_{32} = 0.
$$

从而有

$$
F = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix}.
$$

可以验证

$$FB=\begin{pmatrix} f_{11} & -\alpha_1 f_{11}-\gamma_1 f_{13} & -\alpha_2 f_{11}+f_{13} \\ -\beta_1 f_{22} & f_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_1 f_{33} & f_{33} \end{pmatrix}$$

也满足全部关于B中元素的零约束.

再考察协方差约束, 计算

$$F\Sigma F^{\tau}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 f_{11}^2+\sigma_3^2 f_{13}^2 & 0 & \sigma_3^2 f_{13} f_{33} \\ 0 & \sigma_2^2 f_{22}^2 & 0 \\ \sigma_3^2 f_{13} f_{33} & 0 & \sigma_3^2 f_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

注意到关于Σ中元素的零约束, 应该有

$$\sigma_3^2 f_{13} f_{33}=0.$$

由于允许变换的非奇异性, 我们有$f_{33}\neq 0$, $f_{13}=0$. 从而最终有

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & & \\ & f_{22} & \\ & & f_{33} \end{pmatrix}.$$

既然任何允许变换矩阵都是对角矩阵, 根据识别的允许变换说, 模型的每一个方程都将是可识别的.

3.2 几点质疑

(a) 来自参数关系体系的质疑

设联立方程模型(2.1)的简约形式

$$Y=\Pi X+V,$$

其中$\Pi=B^{-1}\Gamma$, $V=B^{-1}U$, Π为简约式参数矩阵. 关系式

$$B\Pi=\Gamma \tag{3.1}$$

通常称为结构式–简约式参数关系体系. 可以说明示例模型中第一个方程的结构式参数是不能够按照参数关系体系由模型的简约式参数确定的.

经验证以上模型的简约式参数矩阵中没有零元素, 因而结构式–简约式参数关系体系中与第一个方程有关的等式是

$$\begin{pmatrix} 1, & -\alpha_1, & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_0, & \alpha_3, & 0 \end{pmatrix},$$

容易判断由于α_1,α_2不能够由π_{i3}, $i=1,2,3$唯一确定, 从而全部非零参数α_i, $i=0,1,2,3$都不能按照参数关系体系被简约式参数唯一确定.

一个根据允许变换观点识别了的模型, 不能保证方程的结构式参数被模型的简约式参数唯一确定. 这样, 在允许变换说的识别观点之下, 联立方程模型的简约式概念将失去其意义.

(b) 来自秩条件的质疑

记$S(m)=(s_{ij})_{(g-1)\times(g_2+k_2)}$为第$m$个结构式方程中不出现的变量在其它方程中的结构式参数所形成的矩阵, 其中g_2, k_2分别是第m个方程缺省的当期内生变量与前定变量的个数, $g_2+k_2>0$. 一个著名的识别条件是识别的秩条件, 秩条件可见于任何一本经济计量学著作中. 以下符号$r(M)$表示矩阵M的秩.

秩条件　若模型(2.1)中第m个结构式方程可识别, 则$r(S(m))=g-1$.

秩条件所表达的直接意义是, 对于一个可识别的结构式方程, 模型中其它方程的任何非平凡线性运算所产生的组合方程都至少有一个变量为该方程所没有. 从而, 对一个可识别的结构式方程所涉及的变量而言, 模型的线性运算不会再产生关于它们的其它描述.

容易写出示例模型中第1个方程的S矩阵

$$S(1)=\begin{pmatrix}\beta_2\\0\end{pmatrix},$$

显然有

$$r(S(1))=1<g-1=2.$$

所以, 秩条件判断第1个方程不可识别.

示例模型第1个方程中出现的变量有y_1、y_2、y_3、x_1与截距项, 第3个方程中出现的变量全部包含于第1个方程中. 模型的第3个方程加至第1个方程, 可有

$$y_1=\alpha_0+(\alpha_1+\gamma_1)y_2+(\alpha_2-1)y_3+(\alpha_3+\gamma_2)x_1+(u_1+u_3).$$

这是关于变量y_1,y_2,y_3,x_1与截距项的一个不同于第一个方程的描述, 它与第一个方程是观测等价的. 一个根据允许变换观点识别了的模型, 没有能够保证一个结构式方程中变量间线性关系的表述在线性运算下的唯一性.

3.3　识别概念的允许变换说质疑

以上示例中, 变量的缺省性约束与协方差约束共同作用致使一个变换是允许的. 实际上, 我们可以证明, 仅仅协方差约束有时已经足以迫使对一个方程的线性变换成为允许的, 此间全然不顾方程中变量的缺省性约束是如何给定的. 给定模型(2.1)的协方差约束如下

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \\ & \Omega\end{pmatrix},$$

其中Ω是$g-1$阶正定矩阵. 此协方差约束的意义是, 在每一时间t, u_1与u_i不相关, $i=2,\ldots,g$, u_i与u_j具有平稳协方差, $i,j=2,\ldots,g$.

考虑关于第一个方程的线性变换

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1g} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

将F进行以下形式的分块

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & F_{12} \\ 0 & I_{g-1} \end{pmatrix}.$$

线性变换F下, 有

$$F\Sigma F^\tau=\begin{pmatrix} f_{11} & F_{12} \\ 0 & I_{g-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \\ & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ F_{12}^\tau & I_{g-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 f_{11}^2+F_{12}\Omega F_{12}^\tau & F_{12}\Omega \\ \Omega F_{12}^\tau & \Omega \end{pmatrix}.$$

只要F是允许的, 就应有

$$F_{12}\Omega=\begin{pmatrix} 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix}.$$

这就导致

$$F_{12}\Omega F_{12}^\tau=0.$$

注意到Ω的正定性, 即有

$$F_{12}=\begin{pmatrix} 0, & \cdots, & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$F=\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

对第一个方程而言F已经是数乘变换, 按照允许变换观点它将是可以识别的, 而此间我们没有涉及第一个方程中变量的任何缺省性信息.

以上讨论表明, 在允许变换观点下协方差不相关条件的识别对变量缺省性条件的识别有部分甚至全部挤出作用. 由于变量的缺省性条件对保证方程的观测不等价性是必需的, 所以两类条件的联合识别是不能成立的.

§4. 关于允许变换观点的一个修正条件

本文就Fisher的允许变换定义给出一个修正条件. 我们使对一个方程的允许变换仅仅具备Fisher定义中的(a)与(b)两款性质, 而且将(b)款中关于参数的线性约束限于参数的零约束. 我们证明了修正以后的"允许变换"说与秩条件是等价的, 这里的引号表示对应的修正概念.

修正允许变换观点 一个由$g \times g$矩阵F表示的线性变换被称为是的"允许"的, 当且仅当它具有以下二条性质:

(a) F非奇异.

(b) $A^* = FA$满足关于A的全部零约束.

定理 4.1 模型(2.1)中第m个方程的任何"允许变换"是数乘变换的充分必要条件是$r(S(m)) = g - 1$.

证明: 仍然以第一个方程的识别问题为例. 记S_i为$S(1)$的第i行, $i = 1, \ldots, g - 1$. 设$S_0 = 0_{1\times(g_2+k_2)}$, 其中$g_2 + k_2 > 0$是第一个方程中没有出现的当期内生变量与前定变量的个数.

若关于第一个方程的任何"允许变换"都是数乘变换. 使

$$\sum_{i=2}^{g} c_i S_{i-1} = 0,$$

则对任何$c_1 \neq 0$, 也有

$$c_1 S_0 + \sum_{i=2}^{g} c_i S_{i-1} = 0. \tag{4.1}$$

记$I(1)$、$II(1)$分别为第一个方程中出现的当期内生变量与前定变量的脚标集. 这样对$i \in I(1)$, 有$b_{1i} \neq 0$; 对$j \in II(1)$, 有$\gamma_{1j} \neq 0$. 因而可以适当选择$c_1 \neq 0$, 使得

$$\sum_{l=1}^{g} c_l b_{li} \neq 0, \qquad i \in I(1), \tag{4.2}$$

$$\sum_{l=1}^{g} c_l \gamma_{lj} \neq 0, \qquad j \in II(1). \tag{4.3}$$

采用以上c_i, $i = 1, \ldots, g$构造对第一个方程的线性变换

$$F = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_g \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

由$c_1 \neq 0$知F非奇异; 由(4.1)、(4.2)、(4.3)式知变换生成方程与第一个方程满足完全相同的零约束. 如此已经表明F是"允许"的. 从而$e_1 F = c_1 e_1$, 即有$c_2 = \cdots = c_g = 0$. 于是$S_1, \ldots S_{g-1}$线性无关, $r(S(1)) = g - 1$.

反之, 若$r(S(1)) = g - 1$. 考虑对第一个方程的"允许变换"

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1g} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

由于变换是"允许"的, α_1与$e_1F(B,\Gamma)$有相同位置的零分量, 此即

$$f_{11}S_0+\sum_{i=2}^{g}f_{1i}S_{i-1}=S_0,$$

也即

$$\sum_{i=2}^{g}f_{1i}S_{i-1}=0.$$

由设$r(S(1))=g-1$, $S(1)$的行向量组线性无关, 于是$f_{1i}=0$, $i=2,\ldots,g$, F已是第一个方程的数乘变换. $\square$

我们的证明表明修正"允许变换"说是与秩条件等价的识别概念.

参 考 文 献

[1] Fisher, F.M., *The Identification Problem in Econometrics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1966.

[2] Baltagi, B.H., *Econometrics* (2nd edition), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.

[3] Johnston, J., *Econometric Methods*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1984.

[4] Greene, W.H., *Econometric Analysis*, Prentice Hall, Inc., New York, 2000.

[5] Gujarati, D.N., *Basic Econometrics* (Fourth edition), McGraw-Hill, Inc., New York, 2003.

[6] 李景华等, 识别概念的参数关系说质疑, 数量经济与技术经济研究, **22(8)**(2005), 148–153.

On the Admissible Transformation View on Identification for a Linear Simultaneous Equation Model

Li Jinghua

(*Department of Statistics, Shanxi University of Finance & Economics, Taiyuan, 030006*)

Zhu Shangwei

(*Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance & Economics, Taiyuan, 030006*)

For a linear simultaneous equation model in econometrics, one authoritative definition of identification is Fisher's admissible transformation view. It takes parameter restriction and covariance restriction together into consideration. We show that the covariance restriction on disturbance terms may obstruct the exclusion restriction on variables. The exclusion restriction on variables is necessary for the test of observationally equivalent of equations so that the union identification does not hold true.

Keywords: Identification, parameter restriction, covariance restriction, admissible transformation.

AMS Subject Classification: 62J05.