应用概率统计　第二十七卷
第六期　2011年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.6 Dec. 2011

最小Q-过程的Martin流入边界与Ray-Knight紧化

徐长伟
(中原工学院理学院, 郑州, 450007)

阎国军
(郑州大学数学系, 郑州, 450001)

郝淑双
(黄河科技学院信息工程学院, 郑州, 450063)

摘　要

本文讨论了在最小Q-过程不中断的条件下Martin流入边界与Ray-Knight紧化之间的关系, 即在Martin流入边界有限的条件下, Martin流入边界中的点与Ray-Knight紧化所添加的点之间具有一一对应关系.

关键词: 最小Q-过程, Martin流入边界, Ray-Knight紧化, 右过程.

学科分类号: O211.62.

§1.　引　　言

设$E=\{0,1,2,\ldots\}$, $Q=(q_{ij})_{i,j\in E}$是E上的拟Q-矩阵. 我们假定Q是全稳定且保守的, 并且满足Q-过程唯一性准则, Q所对应的最小Q-过程记作$p_{ij}^{\min}(t)$, 则$p_{ij}^{\min}(t)$是诚实的, 由[1] p.70定理2.2, $p_{ij}^{\min}(t)$还满足Kolmogorov向后和向前方程组.

由于$p_{ij}^{\min}(t)$是诚实的转移函数, 按照[2] p.57-63中的方法, 可以定义E的Ray-Knight紧化$\overline{E}$, $p_{ij}^{\min}(t)$可以扩张成$\overline{E}$上的Ray预解式$U^{\alpha}(x,dy)$. $U^{\alpha}(x,dy)$对应的Ray半群记作$P_t(x,dy)$, $\overline{E}$中的非分支点集记作D, 令$E_R=\{x|x\in\overline{E},U^1(x,E)=1\}$, $E^+=E_R\cap D$. 由[2] p.84-89, 存在以$P_t(x,dy)$为转移函数的右过程$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$, 其状态空间为$E^+$. 因为$P_t(x,dy)$限制在$E$上是$p_{ij}^{\min}(t)$, 所以当$x\in E$时, 在$\mathsf{P}^x\{\cdot\}$下, $\{X_t\}$永远停留在E中, $\{X_t\}$即为通常意义下$p_{ij}^{\min}(t)$决定的Markov链. 当$x\notin E$时, 在$\mathsf{P}^x\{\cdot\}$下, $\{X_t\}$自x很快“流入”E中, 然后永远停留在E中. 对于任意的$x\in E^+$, 令$p_{xj}(t)=P_t(x,\{j\})$.

从Markov链的角度来看, 只有在$Q=(q_{ij})$的Martin积极流入边界非空时, 才有自∞很快“流入”E中然后永远停留在E中的情况出现, 因此$Q=(q_{ij})$的Martin流入边界与E^+之间存在必然联系.

一般说来, E在$p_{ij}^{\min}(t)$下的Ray-Knight紧化$\overline{E}$、E_R及E^+是非常复杂的, 而且只有E^+对讨论右过程X有意义. 在通常情况下, 我们仅知道Q-矩阵$Q=(q_{ij})$而不知道$p_{ij}^{\min}(t)$, 所以只有将Q-矩阵$Q=(q_{ij})$与E^+联系起来才有意义. 在本文中, 我们将讨论Q-矩阵$Q=(q_{ij})$的Martin流入边界与E^+的联系.

本文2009年11月20日收到, 2010年9月23日收到修改稿.

§2. 主要结果及证明

定义 2.1 设$P(t)=(p_{ij}(t))$是E上诚实的转移函数, $g_k(t)$, $t>0$是E上的一族有限测度, 称$g_k(t)$是$P(t)$的进入律, 如果对于任意的$t>0$, $s\geq 0$,

$$g_k(t+s)=\sum_{m\in E} g_m(t)p_{mk}(s), \qquad k\in E.$$

如果$g_k(t)$是$P(t)$的进入律, 显然$\sum\limits_{k\in E} g_k(t)$恒等于某个常数, 并且$g_k(t)$关于$t$连续. 另外, 由$P_t(x,dy)$的半群性质可知, 对于每个$x\in E^+$, $p_{xj}(t)$是$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律.

定理 2.1 对任意的$k\in E$, 若$g_k(t)$是$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律, 则存在E^+上的有限测度μ, 使得

$$g_k(t)=\int_{E^+} p_{xk}(t)\mu(\mathrm{d}x), \qquad \forall k\in E,\ t>0.$$

证明: 参考[3] p.316, Section 39. □

定理 2.2 如果$g_k(t)$是$P(t)$的进入律, 令

$$\eta_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_k(t)\mathrm{d}t, \qquad \lambda>0,$$

则$\eta_k(\lambda)$满足方程组

$$\eta_j(\lambda)-\eta_j(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)R_{kj}(\mu)=0, \qquad \forall\lambda,\mu>0,\ j\in E, \tag{2.1}$$

这里$R(\lambda)=(R(\lambda))_{i,j\in E}$是$P(t)$的预解矩阵. 反之, 如果$\eta_k(\lambda)$满足方程组(2.1), 并且$\sum\limits_{k\in E}\eta_k(1)<\infty$, 则存在$P(t)$的进入律$g_k(t)$, 使得

$$\eta_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_k(t)\mathrm{d}t, \qquad \lambda>0.$$

证明: (i) 显然$\sum\limits_{k\in E}\eta_k(1)<\infty$. 任给$\lambda,\mu>0$, $\lambda\neq\mu$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E}\eta_k(\lambda)R_{kj}(\mu) &= \sum_{k\in E}\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_k(t)\mathrm{d}t\int_0^\infty e^{-\mu s}p_{kj}(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t-\mu s}\sum_{k\in E}g_k(t)p_{kj}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t-\mu s}g_j(t+s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \frac{\eta_j(\lambda)-\eta_j(\mu)}{\mu-\lambda},\end{aligned}$$

所以(2.1)成立.

(ii) 设$\eta_k(\lambda)$满足方程组(2.1), 并且$\sum\limits_{k\in E}\eta_k(1)<\infty$, 则

$$\eta_k(\lambda)=\eta_k(1)-(\lambda-1)\sum_{m\in E}\eta_m(1)R_{mk}(\lambda),$$

上式两端对k求和可知$A(\lambda)=\sum\limits_{k\in E}\eta_k(\lambda)<\infty$.

对于任意的$\alpha>0$, 令$\xi_k^\alpha(\lambda)=\eta_k(\alpha+\lambda)$, 则$\xi_k(\lambda)$关于$\lambda$是单调减的, 并且

$$\xi_k^\alpha(\lambda)-\xi_k^\alpha(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{m\in E}\xi_m^\alpha(\lambda)R_{mk}(\alpha+\mu)=0.$$

将$\xi_k^\alpha(\lambda)$, $k\in E$写成行向量的形式, 将上式也写成行向量的形式, 则有

$$\xi^\alpha(\lambda)-\xi^\alpha(\mu)+(\lambda-\mu)\xi^\alpha(\lambda)R(\alpha+\mu)=0,$$

容易看出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\xi^\alpha(\lambda)=-\xi^\alpha(\lambda)R(\alpha+\lambda),$$

依此类推可得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\xi^\alpha(\lambda)=(-1)^n n!\eta^\alpha(\lambda)R(\alpha+\lambda)^n,$$

所以对于每个$k\in E$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\xi_k^\alpha(\lambda)=(-1)^n n!\sum_{m\in E}\eta_m(\lambda)[R(\alpha+\lambda)^n]_{mk},\qquad (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\xi_k^\alpha(\lambda)\le\frac{n!A(\alpha)}{(\alpha+\lambda)^n}.$$

应用完全单调定理, 可知存在$(0,\infty)$上的非负可测函数$f_k^\alpha(t)$, 使得

$$\xi_k^\alpha(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_k^\alpha(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall\lambda>0.$$

$$\eta_k(\lambda)=\xi_k^\alpha(\lambda-\alpha)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}[e^{\alpha t}f_k^\alpha(t)]\mathrm{d}t,\qquad \forall\lambda>\alpha.$$

不妨假定$f_k^\alpha(t)$是Borel可测的. 由Laplace逆变换公式可知对于任意的$s>0$,

$$\int_0^s e^{\alpha t}f_k^\alpha(t)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{n\le\lambda s}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\eta_k(\lambda),$$

所以$e^{\alpha t}f_k^\alpha(t)$与$\alpha$的选取无关.

令$h_k(t)=e^{\alpha t}f_k^\alpha(t)$, 则

$$\eta_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}h_k(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall\lambda>0.$$

由(2.1)易知对于任意的$k\in E$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\eta_k(\lambda)=-\sum_{m\in E}\eta_m(\lambda)R_{mk}(\lambda).$$

令
$$g_k(t)=\frac{1}{t}\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s,\qquad k\in E.$$
任给$T>0$, 在$[0,T]$上, 当$t'\to t$时, $h_m(s)I_{(0,t']}(s)p_{mk}(t'-s)$几乎处处收敛于$h_m(s)I_{(0,t]}(s)$ $\cdot p_{mk}(t-s)$, 又由于
$$\int_0^T\sum_{m\in E}h_m(s)\mathrm{d}s\le e^T\int_0^T\sum_{m\in E}e^{-\lambda t}h_m(s)\mathrm{d}s\le e^T\sum_{k\in E}\eta_k(1)<\infty,\tag{2.2}$$
$$\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s=\int_0^T\sum_{m\in E}h_m(s)I_{(0,t]}(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s,$$
由控制收敛定理可知
$$\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s$$
是$t\in[0,T]$的连续函数, 所以$g_k(t)$是$t\in(0,\infty)$的连续函数.

由于$\sum\limits_{k\in E}p_{mk}(u)$是$u\in(0,\infty)$的连续函数, 于是对于任意的$T>0$, 在$(0,T)$上, 当$t'\to t$时, $\sum\limits_{k\in E}p_{mk}(t'-s)$收敛于$\sum\limits_{k\in E}p_{mk}(t-s)$. 另外,
$$\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)\sum_{k\in E}p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s=\int_0^T\sum_{m\in E}h_m(s)I_{(0,t]}(s)\sum_{k\in E}p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s,$$
由(2.2)和控制收敛定理可知
$$\sum_{k\in E}tg_k(t)=\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)\sum_{k\in E}p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s$$
是$t\in[0,T]$的连续函数. 由Dini定理, 函数项级数$\sum\limits_{k\in E}tg_k(t)$在$[0,T]$上一致收敛.

此外, 对于任意的$\lambda>0$,
$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}tg_k(t)\mathrm{d}t&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big[\int_0^t\sum_{m\in E}h_m(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\Big[\int_s^\infty\sum_{m\in E}e^{-\lambda t}h_m(s)p_{mk}(t-s)\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}s\\&=\int_0^\infty\Big[\int_0^\infty\sum_{m\in E}e^{-\lambda(s+u)}h_m(s)p_{mk}(u)\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}s\\&=\sum_{m\in E}\int_0^\infty e^{-\lambda s}h_m(s)\mathrm{d}s\int_0^\infty e^{-\lambda u}p_{mk}(u)\mathrm{d}u\\&=\sum_{m\in E}\eta_m(\lambda)R_{mk}(\lambda)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\eta_k(\lambda)\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}th_k(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以$g_k(t)$与$h_k(t)$几乎处处相等. 从而

$$\eta_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_k(t)\mathrm{d}t.$$

如前所述, 函数项级数$\sum\limits_{m\in E}tg_m(t)$在任何有限区间上都是一致收敛的, 所以二元函数项级数$\sum\limits_{m\in E}tg_m(t)p_{mk}(s)$在任何有界区域内都一致收敛, 即$\sum\limits_{m\in E}tg_m(t)p_{mk}(s)$是$\{(s,t)|s,t\geq 0\}$上的连续函数, 故$\sum\limits_{m\in E}g_m(t)p_{mk}(s)$是区域$\{(s,t)|s,t>0\}$上的连续函数.

为证明

$$g_k(t+s)=\sum_{m\in E}g_m(t)p_{mk}(s), \tag{2.3}$$

在(2.3)两端对s,t作双重Laplace变换$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$, 对于任意的$\lambda,\mu>0$, $\lambda\neq\mu$,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{m\in E}g_m(t)p_{mk}(s)e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_{m\in E}\eta_m(\lambda)R_{mk}(\mu),$$

对于每个$t\geq 0$, 作为s的函数, $g_k(t+s)$几乎处处等于$h_k(t+s)$; 由Fubini定理, 作为$\{(s,t)|s, t\geq 0\}$上的函数, 在二维Lebsgue测度意义下, $g_k(t+s)$几乎处处等于$h_k(t+s)$, 显然,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty g_k(t+s)e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t &= \int_0^\infty\int_0^\infty h_k(t+s)e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \frac{\eta_k(\lambda)-\eta_k(\mu)}{\mu-\lambda},\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^\infty\int_0^\infty g_k(t+s)e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{m\in E}g_m(t)p_{mk}(s)e^{-\lambda t-\mu s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

令$\mu\to\lambda$, 可知上式对于$\lambda=\mu$的情形也成立, 因此(2.3)在$\{(s,t)|s,t\geq 0\}$上几乎处处成立. 再注意到(2.3)的两端在$\{(s,t)|s,t\geq 0\}$上连续, 所以对每个$s,t>0$, (2.3)都成立, 即$g_k(t)$是$P(t)$的进入律. $\square$

命题 2.1 若$(g_k(t);k\in E)_{t>0}$是$P(t)$的进入律, 则对于任意的$k\in E$, 极限$\lim\limits_{t\Downarrow 0}g_k(t)$存在且有限.

证明: 由于$\lim\limits_{t\downarrow 0}p_{kk}(t)=1$, 故对于任意的$0<\varepsilon<1$, 存在$\delta>0$, 使得当$t<\delta$时, 有$p_{kk}(t)>1-\varepsilon$. 任取$t<t'<\delta$, 我们有

$$\begin{aligned}g_k(t') &= \sum_m g_m(t)p_{mk}(t'-t)\geq g_k(t)p_{kk}(t'-t)\\ &\geq g_k(t)(1-\varepsilon),\end{aligned}$$

并且$g_k(t')<\infty$, 因此

$$\limsup_{t\Downarrow 0} g_k(t)\le \frac{g_k(t')}{1-\varepsilon}<\infty,$$

再令$t'\Downarrow 0$, 这时又有

$$\limsup_{t\Downarrow 0} g_k(t)\le \liminf_{t'\Downarrow 0}\frac{g_k(t')}{1-\varepsilon}<\infty,$$

由ε的任意性, 因而$\lim\limits_{t\Downarrow 0} g_k(t)$存在且有限. $\square$

定理 2.3 给定$\lambda>0$, 设$\eta(\lambda)=(\eta_i(\lambda))_{i\in E}$满足方程$\eta(\lambda)(\lambda I-Q)=0$, 并且$\sum\limits_i \eta_i(\lambda)<\infty$, 则存在唯一的关于$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律$(K_i(t),i\in E)_{t>0}$, 使得

$$\eta_i(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}K_i(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall i\in E,$$

并且$\lim\limits_{t\downarrow 0} K_i(t)=0$.

证明: (i) 存在性: 令

$$\eta(\lambda)=\eta-(\lambda-1)\eta R^{\min}(\lambda),$$

对于任意的$\lambda,\mu>0$, 由$R^{\min}(\lambda)$满足预解方程, 则

$$\begin{aligned}
&\eta(\lambda)-\eta(\mu)\\
=\;&-(\lambda-1)\eta R^{\min}(\lambda)+(\mu-1)\eta R^{\min}(\mu)\\
=\;&-(\lambda-1)\eta[R^{\min}(\mu)-(\lambda-\mu)R^{\min}(\lambda)R^{\min}(\mu)]+(\mu-1)\eta R^{\min}(\mu)\\
=\;&-(\lambda-\mu)\eta R^{\min}(\mu)+(\lambda-1)(\lambda-\mu)\eta R^{\min}(\lambda)R^{\min}(\mu)\\
=\;&-(\lambda-\mu)\eta(\mu)R^{\min}(\lambda),
\end{aligned}$$

所以$\eta(\lambda)-\eta(\mu)+(\lambda-\mu)\eta(\lambda)R^{\min}(\mu)=0$, 即$\eta(\lambda)$满足方程组(2.1). 由定理2.2, 存在$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律$g_k(t)$, $t>0$, $k\in E$使得

$$\eta_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g_k(t)\mathrm{d}t,\qquad \forall k\in E.$$

令$a_k=\lim\limits_{t\Downarrow 0} g_k(t)$, $\overline{g}_k(t)=g_k(t)-\sum\limits_{m\in E} a_i p_{mk}^{\min}(t)$, $\overline{\eta}_k(\lambda)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\overline{g}_k(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\eta(\lambda)=\overline{\eta}(\lambda)+aR^{\min}(\lambda),$$

其中a表示行向量$(a_k,k\in E)$. 由[4] p.60引理2.11.3以及$R^{\min}(\lambda)$满足Kolmogorov向前方程组, 可得

$$0=\eta(1)[I-Q]=\overline{\eta}(1)[I-Q]+aR^{\min}(1)[I-Q]=a,$$

所以$a=0$, 即$\lim\limits_{t\downarrow 0} g_k(t)=0$, $\forall k\in E$.

(ii) 唯一性: 如果$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律$f_k(t)$, $t>0$, $k\in E$和$g_k(t)$, $t>0$, $k\in E$使得

$$\eta_k=\int_0^\infty e^{-t}f_k(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-t}g_k(t)\mathrm{d}t,$$

由定理2.2, $f_k(t)$和$g_k(t)$的Laplace变换$\eta_k^f(\lambda)$和$\eta_k^g(\lambda)$都满足(2.1), 因此

$$\eta^f(\lambda)=\eta-(\lambda-1)\eta R^{\min}(\lambda)=\eta^g(\lambda),$$

由Laplace变换的唯一性及$f_k(t)$和$g_k(t)$的连续性可知$f_k(t)=g_k(t)$. □

定理 2.4 如果$Q=(q_{ij})$对应的极小转移函数$p_{ij}^{\min}(t)$是诚实的, 则$E^+=E$的充分必要条件是: 对于某个$\lambda>0$, 方程组

$$\begin{cases} v(\lambda\cdot I-Q)=0, \\ v=(v_1,v_2,\ldots), \qquad v_i\geq 0, \text{ 并且 } \sum\limits_{i\in E}v_i<\infty \end{cases} \tag{2.5}$$

没有非平凡解.

证明: (1) 必要性: 设$E^+=E$. 如果存在某个$\lambda>0$, 方程组(2.5)存在非平凡解$(\eta_i(\lambda),i\in E)$, 由定理2.3, 存在$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律$(K_i(t),i\in E)_{t>0}$, 使得$\forall i\in E$, $\lim\limits_{t\downarrow 0}K_i(t)=0$, 并且

$$\eta_i(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}K_i(t)\mathrm{d}t.$$

由定理2.1, 存在E^+上的有限测度$\mu(\mathrm{d}x)$, 使得

$$K_i(t)=\int_{E^+}p_{xi}(t)\mu(\mathrm{d}x)=\sum_{k\in E}p_{ki}(t)\mu(k), \qquad \forall i\in E,\ t>0.$$

由于$\mu(\{k\})\leq\lim\limits_{t\downarrow 0}K_k(t)=0$, 所以$K_i(t)=0$, $\forall i\in E$, $t>0$, 从而$\eta_i(\lambda)=0$, $\forall i\in E$, 矛盾! 故方程组(2.5)没有非平凡解.

(2) 充分性: 如果方程组(2.5)没有非平凡解, 而存在$x\in E^+\setminus E$, 则$(p_{xj}(t))_{t>0}$是关于$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律, 并且$\lim\limits_{t\downarrow 0}p_{xj}(t)=0$. 由定理2.2,

$$\eta_i(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{xi}(t)\mathrm{d}t, \qquad i\in E$$

满足(2.1), 再由定理2.3的证明方法, 存在a_i, 使得$\eta_i(\lambda)=\overline{\eta}_i(\lambda)+\sum\limits_{k\in E}a_kR_{ki}^{\min}(\lambda)$, 其中$\overline{\eta}_i(\lambda)$满足方程组(2.5), 由$\lim\limits_{t\downarrow 0}p_{xj}(t)=0$可得$a_i=0$, 矛盾! 所以$E=E^+$. □

该定理说明, 如果方程组(2.5)有非平凡解, 则即使在$p_{ij}^{\min}(t)$诚实条件下, $E^+\setminus E$中仍可能含有很多点. 如果$E^+=E$, 则由定理2.4可知方程组(2.5)无非平凡解, 即方程组(2.5)的

解空间维数$n^+=0$, 故Q为零流入, 这时由Martin流入边界理论我们知道对E没有Martin流入边界点. 同时在此条件下$X=(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,X_t,\theta_t,\mathsf{P}^x)$为取值于$E$的右过程. 因此, 我们只须在$E^+\backslash E$非空时来讨论最小Q-过程$X$的Martin流入边界与Ray-Knight紧化的关系.

对任意的$x\in E^+\setminus E$, 则$(p_{xj}(t))_{t>0}$是关于$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律. 令

$$\eta_j(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{xj}(t)\mathrm{d}t,\qquad j\in E,$$

则$\eta(\lambda)$是向后方程$v(\lambda I-Q)=0$的非负可和解. 即方程组(2.5)解空间非空, 故Q的Martin积极流入边界非空, 且由Q确定的最小Q-过程X以正概率从∞很快跳回E中.

设$\widehat{B}_e$为Q的Martin积极流入边界. 下面我们来说明X的Martin流入边界$\widehat{B}_e$与E^+的关系, 我们有下面定理:

定理 2.5 设$p_{ij}^{\min}(t)$诚实. 若$E^+\backslash E$有限, 则存在双射$\Phi:\widehat{B}_e\to E^+\setminus E$.

证明: 设$E^+\backslash E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, 由[4] p.206定理6.16.3, Martin积极流入边界$\widehat{B}_e$仅由n个原子边界点组成$\Longleftrightarrow$方程组(2.5)的解空间维数为n, 所以我们只须证明(2.5)仅有n个线性独立解. 对于每个$k\le n$, 令

$$\eta_j^k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{x_kj}(t)\mathrm{d}t,$$

从定理2.4的证明中容易看出$\eta^k=(\eta_0^k(\lambda),\eta_1^k(\lambda),\ldots)$是方程组(2.5)的解. 如果$\eta^k$, $k=1,2,\ldots,n$不是线性无关的, 取a_k, $k=1,2,\ldots,n$不全为零, 使得$\sum\limits_k a_k\eta^k=0$. 令$g_i(t)=\sum\limits_{a_k>0}a_kp_{x_ki}(t)$, $h_i(t)=-\sum\limits_{a_k<0}a_kp_{x_ki}(t)$, 则$g_i(t)$和$h_i(t)$都是$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律, 由定理2.3, $g_i(t)$和$h_i(t)$相同, 再由定理2.1, $g_i(t)$和$h_i(t)$对应的E^+上的测度μ也相同, 但$g_i(t)$和$h_i(t)$对应的测度分别是$\sum\limits_{a_k>0}a_k\delta_{x_k}(\cdot)$和$-\sum\limits_{a_k<0}a_k\delta_{x_k}(\cdot)$, 矛盾! 所以$\eta^k$, $k=1,2,\ldots,n$线性无关.

对于(2.5)的任意一个非平凡解$\eta_i(\lambda)$, 由定理2.3, 可以取$p_{ij}^{\min}(t)$的进入律$K_i(t)$使得

$$\overline{\eta}_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}K_i(t)\mathrm{d}t,$$

并且$\lim\limits_{t\Downarrow 0}K_i(t)=0$. 又由定理2.1, 可取$E^+$上的有限测度$\mu$使得

$$K_i(t)=\int_{E^+}p_{xi}(t)\mu(\mathrm{d}x)=\sum_{m\in E}\mu(\{m\})p_{mi}^{\min}(t)+\sum_{k=1}^n\mu(\{x_k\})p_{x_ki}(t),$$

由$\lim\limits_{t\Downarrow 0}K_i(t)=0$可知$\mu(\{m\})=0$, 所以$K_i(t)=\sum\limits_{k=1}^n\mu(\{x_k\})p_{x_ki}(t)$, 从而

$$\overline{\eta}_k(\lambda)=\sum_{k=1}^n\mu(\{x_k\})\eta_i^k,\qquad\forall i\in E,$$

这说明(2.5)仅有n个线性无关解. $\square$

同理我们可以得到

定理 2.6　设$p_{ij}^{\min}(t)$诚实. 若Q的Martin积极流入边界有限, 则存在双射$\Phi: \widehat{B}_e \to E^+ \setminus E$.

参 考 文 献

[1] Anderson, W.J., *Continuous-Time Markov Chains*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[2] Getoor, R.K., *Markov Processes: Ray Processes and Right Processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[3] Rogers, L.C.G. and Williams, D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales* (*Volume 1 Itô Calculus*), Cambridge Mathematical Library, 2000.

[4] Yang, X.Q., *The Construction Theory of Denumerable Markov Processes*, Hunan Science and Technology Publishing House, 1990.

[5] Blumenthal, R.M., *Excursions of Markov Processes*, Birkhauser Boston Mass, 1992.

[6] 王梓坤, 杨向群, 生灭过程和马尔科夫链, 科学出版社, 2005.

[7] 阎国军, 杨亚飞, Markov链的瞬时态与Martin边界的个数, 数学理论与应用, **30(2)**(2010), 39–42.

Martin Entrance Boundary and Ray-Knight Compactification of Minimal Q-Processes

Xu Changwei

(*College of Science, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou, 450007*)

Yan Guojun

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, 450001*)

Hao Shushuang

(*Information Engineering College, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou, 450063*)

In this paper we discuss relation between the Martin entrance boundary and Ray-Knight compactification of with respect to a honest minimal Q-processes, and mainly obtain the bijective mapping between the Martin entrance boundary of minimal Q-processes and $E^+\backslash E$ in Ray-Knight compactification when $E^+\backslash E$ is finite.

Keywords: Minimal Q-processes, Martin entrance boundary, Ray-Knight compactification, right process.

AMS Subject Classification: 60J35, 60J50.