应用概率统计 第二十八卷
第一期 2012年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.1 Feb. 2012

随机环境中分枝过程的暂留性与灭绝概率的性质 *

胡杨利[1,2] 杨向群[1]

([1]湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙, 410081; [2]长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙, 410004)

摘 要

从随机环境中分枝过程是随机环境中马氏链入手, 讨论了随机环境中分枝过程状态的暂留性、常返性以及灭绝概率的性质.

关键词: 随机环境中分枝过程, 暂留性, 常返性, 灭绝概率.

学科分类号: O211.62, O211.65.

§1. 引言与模型

随机环境中分枝过程(BPRE)的研究始于二十世纪六十年代([1–4]), 是当前国际上随机环境中随机过程研究中成果最丰富的方向之一, 已取得一系列十分深刻的结果, 但这些结果中未见关于BPRE暂留性、常返性的讨论. 李应求将π-不可约、常返、暂留的概念引入了随机环境中马氏链的研究中, 并讨论了各种暂留性、常返性之间的关系([5–9]). 本文首先证明了BPRE是随机环境中马氏链, 然后借鉴李应求处理随机环境中马氏链的方法, 讨论了BPRE的暂留性和常返性, 并得出在一定条件下过程必然趋于0或∞.

关于BPRE的灭绝概率已有很深入的研究, 详见文献[1–4]及其参考文献, 但基本上是讨论BPRE灭绝的条件. 本文借助于BPRE的马氏性, 从转移概率入手, 讨论了灭绝概率与转移概率之间的关系. 在GW分枝过程的研究中, 比例定理是一个重要结论([11]), 本文得到了BPRE一个类似的结论(定理4.2).

设$Z_+=\{0,1,2,\ldots\}$, $N=\{1,2,\ldots\}$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$为一概率空间, $(\Theta,\mathcal{B})$为环境空间, $(\mathcal{X},\mathcal{A})$为状态空间, 其中$\mathcal{X}=Z_+$, 而$\mathcal{A}$是$\mathcal{X}$离散$\sigma$域. 对于$\forall\,\theta\in\Theta$, $\{p_n(\theta):n\in Z_+\}$为概率分布列, 且满足

$$\sum_{j=0}^{\infty} jp_j(\theta)<+\infty,\qquad 0\le p_0(\theta)+p_1(\theta)<1. \tag{1.1}$$

令T是Θ^{Z_+}到Θ^{Z_+}上的推移算子, 即对于$\forall\,k\in N$, $\vec{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots)\in\Theta^{Z_+}$, 有$T^k\vec{\theta}=(\theta_k,\theta_{k+1},\ldots)$. 对任意的序列$\vec{\eta}=\{\eta_n,n\in Z_+\}$, 记$\vec{\eta}_k^r=\{\eta_n,k\le n\le r\}$, $0\le k\le r\le\infty$.

*国家自然科学基金(10771021; 10471012; 10871064; 11171101)、高校博士点基金(20104306110001)、教育部留学回国人员科研启动基金([2005]564)、湖南省自然科学基金(08JJ3007)和湖南省教育厅科研基金(07A003; 08C120; 09K026)资助项目.

本文2009年2月3日收到.

定义 1.1[10] 设$\vec{\xi}=\{\xi_n, n\in Z_+\}$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上取值于$(\Theta,\mathcal{B})$的随机变量序列, $\vec{Z}=\{Z_n, n\in Z_+\}$和$\{X_{n_i}, n\in Z_+, i\in N\}$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上取值于$(\mathcal{X},\mathcal{A})$的随机变量序列, 且满足

$$Z_{n+1}=\sum_{i=1}^{Z_n}X_{n_i},\qquad \mathsf{P}(X_{n_i}=j|\vec{\xi})=p_j(\xi_n),\qquad j\in\mathcal{X}, \tag{1.2}$$

$$\mathsf{P}(X_{n_i}=j_{n_i}, 1\le i\le m, 0\le n\le k|\vec{\xi})=\prod_{n=0}^{k}\prod_{i=1}^{m}\mathsf{P}(X_{n_i}=j_{n_i}|\vec{\xi}),\qquad j_{n_i}\in\mathcal{X}, \tag{1.3}$$

则称$\vec{Z}$是随机环境$\vec{\xi}$中的分枝过程.

本文以下恒设$\vec{Z}$是随机环境$\vec{\xi}$中的分枝过程.

§2. 马 氏 性

为讨论BPRE的暂留性和常返性, 首先验证随机环境$\vec{\xi}$中的分枝过程是(单无限)随机环境$\vec{\xi}$中马氏链.

定义 2.1[5] 设$\vec{Y}=\{Y_n, n\in Z_+\}$是$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$上取值于$(\mathcal{X},\mathcal{A})$的随机变量序列, 如果对任意$A,B\in\mathcal{A}$, $n\in Z_+$, 有

$$\mathsf{P}(Y_0\in A|\vec{\xi})=\mathsf{P}(Y_0\in A|\xi_0), \tag{2.1}$$

$$\mathsf{P}(Y_{n+1}\in B|Y_0,Y_1,\ldots,Y_n;\vec{\xi})=\mathsf{P}(Y_{n+1}\in B|\xi_n;Y_n), \tag{2.2}$$

则称$\vec{Y}$为单无限随机环境$\vec{\xi}$中的马氏链.

定理 2.1 令

$$P(\theta;i,j)=\begin{cases}P_j^{*(i)}(\theta), & i\in N,\ j\in Z_+,\\ \delta_{0j}, & i=0,\ j\in Z_+,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中$P_j^{*(i)}(\theta)=\sum\limits_{r_1+\cdots+r_i=j}p_{r_1}(\theta)\cdots p_{r_i}(\theta)$, $\forall\,\theta\in\Theta$. 若对任意的$k\in\mathcal{X}$, $\mathsf{P}(Z_0=k|\vec{\xi}_0^{\infty})=\mathsf{P}(Z_0=k|\xi_0)$, 则$\vec{Z}$是以$P(\cdot;i,j)$为一步转移概率的(单无限)随机环境$\vec{\xi}$中的马氏链.

证明: 只须证明$\forall\,j\in\mathcal{X}$, $n\in Z_+$,

$$\mathsf{P}(Z_{n+1}=j|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})=P(\xi_n;Z_n,j). \tag{2.4}$$

由于式(2.4)两边均关于$\sigma(Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})$可测, 要证式(2.4), 只须证: 对任意$\Delta\in\sigma(Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})$,

$$\int_\Delta\mathsf{P}(Z_{n+1}=j|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})\mathrm{d}\mathsf{P}=\int_\Delta P(\xi_n;Z_n,j)\mathrm{d}\mathsf{P}, \tag{2.5}$$

从而只须对$\Delta=\{Z_0=i_0,\ldots,Z_n=i_n;\xi_0\in B_0,\ldots,\xi_l\in B_l\}$, 证明式(2.5)成立即可, 其中$i_0,\ldots,i_n\in\mathcal{X}$, $B_0,\ldots,B_l\in\mathcal{B}$. 不妨设$l\geq n$ (因$l<n$可取$B_{n+1}=\cdots=B_n=\Theta\in\mathcal{B}$). 记$C=\{Z_0=i_0,\ldots,Z_n=i_n\}$, $D=\{\xi_0\in B_0,\ldots,\xi_l\in B_l\}$.

由式(2.3), 式(2.5)右边可化为

$$\int_{\Delta}P(\xi_n;i_n,j)\mathrm{dP}=\int_{\Delta}\sum_{r_1+\cdots+r_{i_n}=j}p_{r_1}(\xi_n)\cdots p_{r_{i_n}}(\xi_n)\mathrm{dP};$$

由条件期望的定义及式(1.2)和(1.3), 式(2.5)左边等于

$$\int_{\Delta}\mathsf{E}(I_{(Z_{n+1}=j)}|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})\mathrm{dP}=\int_{D}\mathsf{E}\Big(I_{\big(\sum\limits_{l=1}^{i_n}X_{n_l}=j\big)}I_C|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi}\Big)\mathrm{dP}.$$

由于第n代单个粒子生成下一代的情况只与该粒子所处的环境有关, 而与以前各代粒子的分布条件独立, 那么由条件独立性可得上式右边等于

$$\begin{aligned}&\int_{D}\mathsf{E}\Big(I_{\big(\sum\limits_{l=1}^{i_n}X_{n_l}=j\big)}|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi}\Big)\mathsf{E}(I_C|Z_0,\ldots,Z_n;\vec{\xi})\mathrm{dP}\\ =\;&\int_{D}\mathsf{P}\Big(\sum_{l=1}^{i_n}X_{nl}=j|\vec{\xi}\Big)I_C\mathrm{dP}=\int_{D}\sum_{r_1+\cdots+r_{i_n}=j}\prod_{l=1}^{i_n}p_{r_l}(\xi_n)I_C\mathrm{dP}\\ =\;&\int_{\Delta}\sum_{r_1+\cdots+r_{i_n}=j}\prod_{l=1}^{i_n}p_{r_l}(\xi_n)\mathrm{dP},\end{aligned}$$

所以式(2.5)成立. □

令$E=\mathcal{X}\times\Theta^{Z_+}$, $\mathcal{E}=\mathcal{A}\times\mathcal{B}^{Z_+}$, 在$(E,\mathcal{E})$上定义转移函数:

$$\pi(i,\vec{\theta};\{j\}\times B)=P(\theta_0;i,j)I_B(T\vec{\theta}),\qquad i,j\in\mathcal{X},\ B\in\mathcal{B}^{Z_+}.$$

定理 2.2　如果对任意的$k\in\mathcal{X}$, $\mathsf{P}(Z_0=k|\vec{\xi_0^\infty})=\mathsf{P}(Z_0=k|\xi_0)$, 则$\{(Z_n,T^n\vec{\xi}):n\in N\}$是以$\pi(i,\vec{\theta};\{j\}\times B)$为一步转移概率的马氏链.

证明:　要证$\{(Z_n,T^n\vec{\xi}):n\in N\}$是马氏链, 只须证: 对于$\forall j\in\mathcal{X}$, $B\in\mathcal{B}^{Z_+}$,

$$\mathsf{P}(Z_{n+1}=j,T^{n+1}\vec{\xi}\in B|(Z_0,\vec{\xi}),\ldots,(Z_n,T^n\vec{\xi}))=\mathsf{P}(Z_{n+1}=j,T^{n+1}\vec{\xi}\in B|Z_n,T^n\vec{\xi}).\quad(2.6)$$

由于$\forall n\in N$, $\sigma(\vec{\xi_n^\infty})\subset\sigma(\vec{\xi_0^\infty})$, 式(2.6)左边等于

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(Z_{n+1}=j,\vec{\xi_{n+1}^\infty}\in B|(Z_0,\vec{\xi_0^\infty}),\ldots,(Z_n,\vec{\xi_n^\infty}))\\ =\;&\mathsf{P}(Z_{n+1}=j,\vec{\xi_{n+1}^\infty}\in B|\vec{Z_0^n},\vec{\xi_0^\infty})=I_{(\vec{\xi_{n+1}^\infty}\in B)}\mathsf{P}(Z_{n+1}=j|\vec{Z_0^n},\vec{\xi_0^\infty})\\ =\;&I_B(T^{n+1}\vec{\xi})P(\xi_n;Z_n,j).\end{aligned}$$

由式(2.4)知最后的等式成立. 由条件期望的平滑性及式(2.4), 式(2.6)右边等于

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(Z_{n+1}=j,\vec{\xi}_{n+1}^{\infty}\in B|Z_n,\vec{\xi}_n^{\infty}) \\ = \ & I_{(\vec{\xi}_{n+1}^{\infty}\in B)}\mathsf{P}(Z_{n+1}=j|Z_n,\vec{\xi}_n^{\infty}) = I_B(T^{n+1}\vec{\xi})\mathsf{E}[\mathsf{E}(I_{(Z_{n+1}=j)}|\vec{Z}_0^n,\vec{\xi}_0^{\infty})|Z_n,\vec{\xi}_n^{\infty}] \\ = \ & I_B(T^{n+1}\vec{\xi})\mathsf{E}[P(\xi_n;Z_n,j)|Z_n,\vec{\xi}_n^{\infty}] = I_B(T^{n+1}\vec{\xi})P(\xi_n;Z_n,j), \end{aligned} \tag{2.7}$$

所以式(2.6)成立. 当$Z_n=i$, $T^n\vec{\xi}=\vec{\theta}$时, 式(2.6)右边等于$\pi(i,\vec{\theta};\{j\}\times B)$, 从而由式(2.6)及(2.7)知定理2.2的结论成立. □

§3. 暂留性、常返性

借鉴文献[6–9]讨论双无限随机环境中马氏链状态的方法, 我们讨论了作为单无限环境中马氏链的BPRE的状态的暂留性和常返性. 首先类似定义单无限随机环境中马氏链状态暂留性和常返性.

定义 3.1 对任意的$C\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}^{Z_+}$, 令$[C]_x=\{(x,\vec{\theta}):(x,\vec{\theta})\in C\}$为集合$C$在$x$上的限制, 令$\eta_C=\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{\{(Y_n,T^n\vec{\theta})\in C\}}$为过程到达集合$C$的次数; $\eta_x=\eta_{[E]_x}$为过程到达点x的次数;

$$Q(x,\vec{\theta};C)=\mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}((Y_n,T^n\vec{\theta})\in C)\Big)$$

表示过程从$(x,\vec{\theta})$出发, 无穷次到达集合C的概率;

$$L(x,\vec{\theta};C)=\mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}((Y_n,T^n\vec{\theta})\in C)\Big)$$

表示过程从$(x,\vec{\theta})$出发, 经有限步到达集合C的概率;

$$f_k(x,\vec{\theta};C)=\mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}((Y_1,T\vec{\theta})\,\overline{\in}\,C,\ldots,(Y_{k-1},T^{k-1}\vec{\theta})\,\overline{\in}\,C,(Y_k,T^k\vec{\theta})\in C)$$

表示过程从$(x,\vec{\theta})$出发, 经过k步首达集合C的概率; 特别地,

$$f_k(x,\vec{\theta};y)=\mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}(Y_1\neq y,\ldots,Y_{k-1}\neq y,Y_k=y)$$

表示过程从$(x,\vec{\theta})$出发经k步首达y点的概率.

定义 3.2 称状态x是弱暂留的, 若存在$\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$, 使得$L(x,\vec{\theta};[E]_x)<1$; 称状态$x$是$*$-暂留的, 若$\forall\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$, $y\neq x$, $L(y,\vec{\theta};[E]_x)<1$; 称状态$x$是暂留的, 若存在数列$\{M_i>0$, $i\geq1\}$及Θ^{Z_+}的划分$\{B_i,i\geq1\}$, 使得$\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_{\{x\}\times B_i}\leq M_i$, $\forall\vec{\theta}\in B_i$, $i\geq1$; 称状态x是强暂留的, 若$\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_x<\infty$, $\forall\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$; 称状态$x$是一致暂留的, 若存在$M<\infty$, 使得$\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_x<M$, $\forall\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$.

定义 3.3 称状态x是常返的, 若$\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_x = \infty$, $\forall \vec{\theta} \in \Theta^{N_+}$; 称状态$x$是Harris常返的, 若$Q(x,\vec{\theta};[E]_x) = 1$, $\forall \vec{\theta} \in \Theta^{Z_+}$.

定理 3.1 若状态$x > 0$, 则x是弱暂留的, 且对于$\forall \vec{\theta} \in \Theta^{Z_+}$, $L(x,\vec{\theta};[E]_x) < 1$.

证明: 取定环境$\vec{\xi} = \vec{\theta} \in \Theta^{Z_+}$.

i) 若$\exists\, \theta_m \in \vec{\theta}$使得$p_0(\theta_m) > 0$, 则由式(2.3)有,

$$P(\theta_m; Z_m, 0) = \sum_{r_1+\cdots+r_{Z_m}=0} p_{r_1}(\theta_m)\cdots p_{r_{Z_m}}(\theta_m) = [p_0(\theta_m)]^{Z_m} > 0,$$

若假设$Z_0 \equiv x$, 那么

$$\begin{aligned} L(x,\vec{\theta};[E]_x) &= \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = x, T^n\vec{\theta} \in \Theta^{Z_+})\Big) = \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = x)\Big) \\ &\le 1 - \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty}(Z_{n+1} = 0)\Big) = 1 - P(\theta_m; x, 0) < 1. \end{aligned}$$

ii) 若对于$\forall\, \theta_n \in \vec{\theta}$, 均有$p_0(\theta_n) = 0$, 由式(1.1)和(2.3)知, 单个粒子生成多个后代的概率是大于0小于1的, 令$A = \{y \in \mathcal{X} : y > x\}$, 则有

$$\begin{aligned} L(x,\vec{\theta};[E]_x) &= \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Z_n = x)\Big) \le 1 - \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(Z_n \in A)\Big) \\ &= 1 - P(\theta_0; x, A) = \prod_{i=1}^{x} p_1(\theta_0) < 1. \end{aligned}$$

综上所述, 过程中所有大于零的状态都是弱暂留的, 而且经有限步返回到自身的概率均小于1. □

定理 3.2 若状态$x > 0$, 则x是$*$-暂留的.

证明: 取定环境$\vec{\xi} = \vec{\theta} \in \Theta^{Z_+}$, 任取状态$y \ne x$.

i) 若$y = 0$, 则显然有$L(y,\vec{\theta};[E]_x) = 0$.

ii) 若$y > 0$, 则由过程的转移性可得

$$L(y,\vec{\theta};[E]_x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y,\vec{\theta};x) L(x, T^k\vec{\theta};[E]_x),$$

由于$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y,\vec{\theta};x) \le 1$, 且各项非负, 而由定理3.1知$L(x,T^k\vec{\theta};[E]_x) < 1$, 所以此加权和一定小于1, 即$L(y,\vec{\theta};[E]_x) < 1$. □

定理 3.3 若状态$x > 0$, 则x是暂留的.

证明: 对于状态$x > 0$, 任取$n \in N$, 令$F_n = \{\vec{\theta} \in \Theta^{Z_+} : L(x,\vec{\theta};[E]_x) \le 1 - 1/n\}$. 若任取$\vec{\theta} \in F_n$, 则有

$$\frac{1}{n}\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_{\{x\}\times F_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}(Z_n = x, T^n\vec{\theta} \in F_n)(1 - L(x, T^n\vec{\theta};[E]_x)).$$

由定理3.1知, 对非零状态x有$L(x,\vec{\theta};[E]_x)<1$, 那么上式右边等于

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}_{x,\vec{\theta}}(Z_n=x,T^n\vec{\theta}\in F_n,Z_{n+k}\neq x,k\geq 1)\\ \leq\ & L(x,\vec{\theta};\{x\}\times F_n)\leq L(x,\vec{\theta};[E]_x)<1,\end{aligned}$$

所以$\mathsf{E}_{x,\vec{\theta}}\eta_{\{x\}\times F_n}\leq n$. 由于$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\Theta^{Z_+}$, 那么存在$\Theta$的一个划分, 使之满足定义3.2, 所以$x$是暂留的. □

定理 3.4 i) $\forall x\in\mathcal{X}$, 存在$\delta(x)>0$, 使得对$\forall\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$, $L(x,\vec{\theta};x)<1-\delta(x)$.

ii) 令μ为$\vec{\xi}$的分布, 若$\mu(B)>0$, $B\in\mathcal{B}^{Z_+}$, 则对任意的$\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$, 存在$n(\vec{\theta})>0$, 使得$T^{n(\vec{\theta})}(\vec{\theta})\in B$.

若i)或ii)成立, 则任意大于零的状态$x\in\mathcal{X}$均是强暂留的, 而且当$n\uparrow\infty$时, $Z_n\to 0$或$Z_n\to\infty$. 并且满足i)时, x还是一致暂留的.

证明: 类似文献[8]可以证明状态x的强暂留性或一致暂留性. 那么当$n\uparrow\infty$时, 显然有$Z_n\to 0$或$Z_n\to\infty$. □

注记 1 此处条件ii)比文献[8]中的π-不可约性弱.

定理 3.5 $\forall x>0$, 则x不是Harris常返的, 也不是常返的.

证明: 类似文献[6]可证: 状态x是Harris常返当且仅当$L(x,\vec{\theta};[E]_x)=1$, $\forall\vec{\theta}\in\Theta^{Z_+}$, 再结合上述讨论易证此定理. □

§4. 灭绝概率的性质

鉴于BPRE是随机环境中马氏链, 我们从转移概率入手, 讨论了灭绝概率与转移概率之间的关系, 特别是得到了一个类似于经典分枝过程中的比例定理的结论(定理4.2).

对任意的$i,j\in\mathcal{X}$, $i>0$, $n\in Z_+$, $s\in[0,1]$, 令

$$\begin{aligned}P(\vec{\xi}_0^n;i,j)&=\mathsf{P}(Z_{n+1}=j|Z_0=i,\vec{\xi}),\\ f_i(\xi_n;s)&=\mathsf{E}(s^{Z_{n+1}}|Z_n=i,\vec{\xi})=\sum_{j=0}^{\infty}P(\xi_n;i,j)s^j,\\ f_i(\vec{\xi}_0^n;s)&=\mathsf{E}(s^{Z_{n+1}}|Z_0=i,\vec{\xi})=\sum_{j=0}^{\infty}P(\vec{\xi}_0^n;i,j)s^j.\end{aligned}$$

显然$P(\xi_n;1,j)=p_j(\xi_n)$, $\forall j\in\mathcal{X}$, $n\in Z_+$. 记$f(\vec{\xi}_0^n;s)\equiv f_1(\vec{\xi}_0^n;s)$, $f(\xi_n;s)\equiv f_1(\xi_n;s)$, 则由文献[2]显然有$f_i(\xi_n;s)=[f(\xi_n;s)]^i$, $f_i(\vec{\xi}_0^n;s)=[f(\vec{\xi}_0^n;s)]^i$, $\forall i>0$, $i\in\mathcal{X}$, $n\in Z_+$, $s\in[0,1]$.

引理 4.1　对任意固定的n, $f(\vec{\xi}_0^n;s)$关于s的k阶导数记为$f^{(k)}(\vec{\xi}_0^n;s)$, $k\geq 1$, 则满足:

$$f^{(k)}(\vec{\xi}_0^n;s)=a_{n,k}(s)+f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f^{(k)}(\vec{\xi}_1^n;s), \tag{4.1}$$

其中$a_{n,k}(s)$是幂级数形式的非负值随机变量.

证明:　由文献[2], $f(\vec{\xi}_0^n;s)=f(\xi_0;f(\xi_1;\cdots f(\xi_n;s)\cdots))$, 那么

$$f'(\vec{\xi}_0^n;s)=[f(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))]'=f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f'(\vec{\xi}_1^n;s), \tag{4.2}$$

即式(4.1)对$k=1$, $n\geq 1$成立, 其中$a_{n,k}(s)=0$. 假设式(4.1)对固定的k成立, 下证其对$k+1$成立:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(\vec{\xi}_0^n;s) &= [f^{(k)}(\vec{\xi}_0^n;s)]' \\ &= [a_{n,k}(s)+f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f^{(k)}(\vec{\xi}_1^n;s)]' \\ &= a_{n,k+1}(s)+f'(\vec{\xi}_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f^{(k+1)}(\vec{\xi}_1^n;s), \end{aligned}$$

其中$a_{n,k+1}(s)=a'_{n,k}(s)+f''(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f'(\vec{\xi}_1^n;s))\cdot f^{(k)}(\vec{\xi}_1^n;s)$, 显然是幂级数形式的非负随机变量.　□

引理 4.2　若对任意固定的$n\in Z_+$, $\mathsf{P}(p_1(\xi_n)\neq 0)=1$, 则

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n;1,j)}{P(\vec{\xi}_0^n;1,1)}\geq\frac{P(\vec{\xi}_1^n;1,j)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)},\qquad \forall j\geq 1,\ n\geq 1. \tag{4.3}$$

证明:　由定理2.1,

$$\begin{aligned} P(\vec{\xi}_0^n;1,1) &= \sum_{j=1}^{\infty}P(\vec{\xi}_0^{n-1};1,j)\cdot P(\xi_n;j,1)\geq P(\vec{\xi}_0^{n-1};1,1)\cdot P(\xi_n;1,1) \\ &\geq P(\vec{\xi}_0^{n-2};1,1)\cdot P(\xi_{n-1};1,1)\cdot P(\xi_n;1,1) \\ &\geq \cdots\geq P(\xi_0;1,1)\cdots P(\xi_n;1,1), \end{aligned} \tag{4.4}$$

由于$\mathsf{P}(p_1(\xi_n)\neq 0)=1$, 且$P(\xi_n;1,1)\equiv p_1(\xi_n)$, $\forall n\in Z_+$, 所以$\mathsf{P}\Big(\prod_{i=0}^{n}P(\xi_i;1,1)>0\Big)=1$, 从而$\mathsf{P}(P(\vec{\xi}_0^n;1,1)>0)=1$, $\forall n\in N$. 由此, 对任意的$j\geq 1$, $n\in N$, 由引理4.1有

$$\begin{aligned} \frac{P(\vec{\xi}_0^n;1,j)}{P(\vec{\xi}_0^n;1,1)} &= \frac{f^{(j)}(\vec{\xi}_0^n;0)}{j!\cdot f'(\vec{\xi}_0^n;0)}=\frac{a_{n,j}(0)+f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;0))\cdot f^{(j)}(\vec{\xi}_1^n;0)}{j!\cdot f'(\vec{\xi}_0^n;0)} \\ &\geq \frac{f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;0))\cdot f^{(j)}(\vec{\xi}_1^n;0)}{j!\cdot f'(\xi_0;f(\vec{\xi}_1^n;0))\cdot f'(\vec{\xi}_1^n;0)}=\frac{f^{(j)}(\vec{\xi}_1^n;0)}{j!\cdot f'(\vec{\xi}_1^n;0)}=\frac{P(\vec{\xi}_1^n;1,j)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)}. \end{aligned}$$　□

令$B_n=\{\omega:Z_n(\omega)=0\}$, $n\in N$, $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, $q_i(\vec{\xi})=\mathsf{P}(B|Z_0=i,\vec{\xi})$, 则

$$q_i(\vec{\xi})=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(Z_n=0|Z_0=i,\vec{\xi})=\lim_{n\to\infty}P(\vec{\xi}_0^{n-1};i,0),$$
$$q_i(T\vec{\xi})=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(Z_n=0|Z_0=i,T\vec{\xi})=\lim_{n\to\infty}P(\vec{\xi}_1^n;i,0),$$

$\forall i \geq 1$. 记$q(\vec{\xi}) \equiv q_1(\vec{\xi})$, $q(T\vec{\xi}) \equiv q_1(T\vec{\xi})$.

定理 4.1 若$\mathsf{P}(p_1(\xi_n) \neq 0) = 1$, $\forall n \in Z_+$, 则

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1)} \uparrow f'(\xi_0; q(T\vec{\xi})), \qquad n \to \infty. \tag{4.5}$$

证明: 由式(4.4)有$\mathsf{P}(P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1) > 0) = 1$, $\mathsf{P}(P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1) > 0) = 1$, $\forall n \in N$, 所以由式(4.3), 对$\forall n \in N$,

$$\begin{aligned}\frac{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, 1)} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, k) P(\xi_n; k, 1)}{P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, 1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, k)}{P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, 1)} \cdot P(\xi_n; k, 1) \\ &\geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(\vec{\xi}_1^{n-1}; 1, k)}{P(\vec{\xi}_1^{n-1}; 1, 1)} \cdot P(\xi_n; k, 1) = \frac{P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^{n-1}; 1, 1)},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1)} \geq \frac{P(\vec{\xi}_0^{n-1}; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^{n-1}; 1, 1)}, \qquad \forall n > 1,$$

又由式(4.2)有

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1)} = \frac{f'(\vec{\xi}_0^n; 0)}{f'(\vec{\xi}_1^n; 0)} = \frac{f'(\xi_0; f(\vec{\xi}_1^n; 0)) \cdot f'(\vec{\xi}_1^n; 0)}{f'(\vec{\xi}_1^n; 0)} = f'(\xi_0; f(\vec{\xi}_1^n; 0)),$$

由于$f(\vec{\xi}_1^n; 0) \equiv P(\vec{\xi}_1^n; 1, 0) \leq 1$, $f'(\xi_0; f(\vec{\xi}_1^n; 0)) \leq f'(\xi_0; 1) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k p_k(\xi_0) < +\infty$, 所以两边关于$n \to \infty$求极限, 得

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)}{P(\vec{\xi}_1^n; 1, 1)} = \lim_{n \to \infty} f'(\xi_0; f(\vec{\xi}_1^n; 0)) = f'(\xi_0; q(T\vec{\xi})). \qquad \square$$

定理 4.2 若$\mathsf{P}(p_1(\xi_n) \neq 0) = 1$, $\forall n \in Z_+$, 那么

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(\vec{\xi}_0^n; i, 1)}{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)} = i \cdot [q(\vec{\xi})]^{i-1}, \qquad \forall i \geq 1. \tag{4.6}$$

证明: 由于$f_i(\vec{\xi}_0^n; s) = [f(\vec{\xi}_0^n; s)]^i$, 两边在$s = 0$处求导, 得

$$f_i'(\vec{\xi}_0^n; 0) = i \cdot [f(\vec{\xi}_0^n; 0)]^{i-1} \cdot f'(\vec{\xi}_0^n; 0),$$

即

$$P(\vec{\xi}_0^n; i, 1) = i \cdot [P(\vec{\xi}_0^n; 1, 0)]^{i-1} \cdot P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1),$$

由于$\mathsf{P}(P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1) > 0) = 1$, $\forall n \in N$, 所以

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n; i, 1)}{P(\vec{\xi}_0^n; 1, 1)} = i \cdot [P(\vec{\xi}_0^n; 1, 0)]^{i-1}.$$

两边关于$n \to \infty$求极限即得定理结论. $\square$

推论 4.1 若$\mathsf{P}(p_1(\xi_n)\neq 0)=1, \forall n\in Z_+$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(\vec{\xi}_1^n;i,1)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)}=i\cdot[q(T\vec{\xi})]^{i-1},\qquad \forall i\geq 1. \tag{4.7}$$

定理 4.3 若$\mathsf{P}(p_1(\xi_n)\neq 0)=1, \forall n\in Z_+$, 且$\mathsf{P}(q(\vec{\xi})<1)=1$, 则

$$f'(\xi_0;q(T\vec{\xi}))=\Big[\frac{1-q(\vec{\xi})}{1-q(T\vec{\xi})}\Big]^2. \tag{4.8}$$

证明: 由定理2.1,

$$\frac{P(\vec{\xi}_0^n;k,1)}{P(\vec{\xi}_0^n;1,1)}\cdot\frac{P(\vec{\xi}_0^n;1,1)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(\xi_0;k,j)P(\vec{\xi}_1^n;j,1)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)}=\sum_{j=1}^{\infty}P(\xi_0;k,j)\frac{P(\vec{\xi}_1^n;j,1)}{P(\vec{\xi}_1^n;1,1)}.$$

两边关于$n\to\infty$求极限, 由式(4.5), (4.6)和(4.7)有

$$k[q(\vec{\xi})]^{k-1}\cdot f'(\xi_0;q(T\vec{\xi}))=\sum_{j=1}^{\infty}P(\xi_0;k,j)\cdot j\cdot[q(T\vec{\xi})]^{j-1},\qquad \forall k\geq 1. \tag{4.9}$$

由于对任意固定的$j\geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(\xi_0;k,j)=1$, 所以式(4.9)两边关于$k$求和, 得

$$f'(\xi_0;q(T\vec{\xi}))\Big[\frac{q(\vec{\xi})}{1-q(\vec{\xi})}\Big]'=\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot[q(T\vec{\xi})]^{j-1}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi_0;k,j)=\Big[\frac{q(T\vec{\xi})}{1-q(T\vec{\xi})}\Big]',$$

即

$$f'(\xi_0;q(T\vec{\xi}))\cdot\frac{1}{[1-q(\vec{\xi})]^2}=\frac{1}{[1-q(T\vec{\xi})]^2}.\qquad\square$$

推论 4.2 若$\mathsf{P}(p_1(\xi_n)\neq 0)=1, \forall n\in Z_+$, 且$\mathsf{P}(q(\vec{\xi})<1)=1$, 则

$$\frac{1}{1-q(\vec{\xi})}=\frac{1}{1-q(T\vec{\xi})}+\frac{p_0(\xi_0)}{1-p_0(\xi_0)}.$$

证明: 由于$f_k(\vec{\xi}_0^{n-1};s)=[f(\vec{\xi}_0^{n-1};s)]^k$, 式(4.8)右边等于

$$f_k'(\xi_0;q(T\vec{\xi}))=\{[f(\xi_0;q(T\vec{\xi})]^k\}'=k\cdot[f(\xi_0;q(T\vec{\xi})]^{k-1}\cdot f'(\xi_0;q(T\vec{\xi})),\qquad \forall k\geq 1.$$

所以由式(4.9),

$$[q(\vec{\xi})]^{k-1}=[f(\xi_0;q(T\vec{\xi}))]^{k-1},\qquad \forall k\geq 1.$$

当$k=2$时,

$$q(\vec{\xi})=f(\xi_0;q(T\vec{\xi})). \tag{4.10}$$

式(4.10)代入式(4.8), 求解微分方程即得结论. $\square$

参 考 文 献

[1] Afanasyev, V.I., Geiger, J., Kersting, G. and Vatutin, V.A., Criticality for branching processes in random environment, *Ann. Probab.*, **33(2)**(2005), 645–673.

[2] Athreya, K.B. and Karlin, S., Branching processes with random environments (I), (II), *Ann. Math. Statist.*, **42(5,6)**(1971), 1499–1520, 1843–1858.

[3] Smith, W.L., Necessary conditions for almost sure extinction of a branching process with random environment, *Ann. Math. Statist.*, **39(7)**(1968), 2136–2140.

[4] Smith, W.L. and Wilkinson, W., On branching processes in random environments, *Ann. Math. Statist.*, **40(2)**(1969), 814–827.

[5] 李应求, 双无限环境中马氏链的存在和不可约性, 数学物理学报, **21A(4)**(2001), 439–442.

[6] 李应求, 双无限环境中马氏链的常返性与不变测度, 中国科学, **31A(8)**(2001), 702–707.

[7] 李应求, 双无限环境中马氏链的瞬时性与不变函数, 数学年刊, **24(2)**(2003), 515–520.

[8] 李应求, 双无限随机环境中马氏链的暂留性, 数学物理学报, **27(2)**(2007), 269–276.

[9] 李应求, 双无限随机环境中的常返马氏链, 数学学报, **50(5)**(2007), 1099–1110.

[10] 胡杨利, 杨向群, 李应求, 随机环境中分枝过程的等价定理, 应用数学学报, **30(3)**(2007), 411–421.

[11] Athreya, K.B. and Ney, P.E., *Branching Processes*, Berlin Heidellberg, New York: Springer-Verlag, 1972.

[12] 李应求, 李旭, 刘全升, 随机环境中随机游动上的随机分枝系统, 中国科学, **37A(3)**(2007), 341–347.

[13] 李应求, 王苏明, 胡杨利, 随机环境中马氏链与马氏双链间的相互关系, 数学学报, **49(6)**(2006), 1373–1380.

[14] 李应求, 胡杨利, 随机环境中广义随机游动的灭绝概率, 数学物理学报, **26(3)**(2006), 476–480.

[15] 李应求, 刘全升, 随机环境中依赖年龄的分枝过程, 中国科学, **38A(7)**(2008), 799–919.

[16] 李应求, 王苏明, 胡杨利, 马氏环境中马氏链的一类强极限定理, 数学进展, **37(5)**(2008), 539–550.

Some Properties of Branching Processes in Random Environments

Hu Yangli[1,2] Yang Xiangqun[1]

([1] *Institute of Mathematics and Computer Sciences, Hunan Normal University, Changsha, 410081*)

([2] *Institute of Mathematics and Computing Sciences, Changsha University of Science and Technology, Changsha, 410004*)

Based on the fact that branching processes in random environments are Markovian chains in random environments, transience and recurrence of the states are discussed and some properties of the extinction probability are obtained.

Keywords: Branching process in random environment, transience, recurrence, extinction probability.

AMS Subject Classification: 60K37, 60J80.