应用概率统计　第二十八卷
第二期　2012年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.2 Apr. 2012

IV模型中变点序贯检验方法 *

夏志明[1]　赵文芝[2]　濮晓龙[3]　郭鹏江[1]

([1]西北大学数学系, 西安, 710069; [2]西安工程大学理学院, 西安, 710048)

([3]华东师范大学金融与统计学院, 上海, 200241)

摘　要

本文研究了IV模型中变点序贯检验问题. 提出了基于加权残差部分和(weighted-CUSUM)的检验统计量. 证明了其在原假设和备择假设下的极限性质. 该检验方法在特征量与跃度非正交性条件下, 当$\delta = 1/2$具有非平凡势, 而当$0 \le \delta < 1/2$时, 则是相合的.

关键词:　变点, 跃度, IV模型, weighted-CUSUM.

学科分类号:　O212.1.

§1.　引　　论

变点检验的历史始自Page于1954年在Biometrika上发表的一篇关于连续抽样检验的文章[1], 首次提出CUSUM方法. 此后, 发展较为缓慢, Nyblom (1989)提出了基于ML得分的拉格朗日乘子法(LM). Hansen把这种方法扩展到线性模型(Hansen, 1992). Nyblom和Hansen的方法事实上是经典的Cramer-Von Mises统计量在变点检验领域的相应形式. 此后, Hjort则于2002年在文献[5]提出了一大类很一般的基于ML得分的结构变化检验方法, 上述方法都是基于ML得分或者说似然方程, 受此启发, 我们本质上也利用了IV模型参数估计的'一阶条件'. 另一方面, Brown, Durbin和Evans于1975年在文献[6]中提出了基于残差的波动检验方法. 此后Gombay和Horvath (1994), Ploberger和Kramer (1992), Kuan和Hornick (1995)相继提出一大类相似的基于残差的方法. 就作者掌握的文献看, 在IV模型场合, 尚未对其变点序贯分析问题做出探索.

本文在IV模型中提出了基于残差的加权累积和(weighted-CUSUM)的序贯检验方法, 并证明其在特征量与跃度不正交的条件下, 当$\delta = 1/2$具有非平凡势, 而当$0 \le \delta < 1/2$时, 则是相合的.

*国家自然科学基金天元基金(11026135, 11126312)、教育部人文社科一般项目(10YJC910007)、陕西省13115科技创新工程(2009ZDTG-85)和陕西省教育厅项目(2010JK561)资助.

本文2009年5月12日收到, 2011年10月8日收到修改稿.

§2. 统计模型及其变点检验问题

考虑IV模型

$$\begin{cases} y_i = x_i'\beta_i + \varepsilon_i, & i = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, N; \\ \mathsf{E}(z_i\varepsilon_i) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中$x_i \in R^p$, $z_i \in R^q$, $(q \geq p)$, 且β_i为系数向量.

关于该模型, 我们做两点说明:

注记 1 该模型在计量经济学中又称为"矩条件模型"(moment condition models), 或者"估计方程模型"(estimating equations models), 可参见Hansen于2009年新著([4], P.77). 当$z_i = x_i$时, 该模型就是线性回归模型; 而当$z_i \neq x_i$时, 一般有$\mathsf{E}(x_i\varepsilon_i) \neq 0$, 此时称模型具有"内生性"(endogeneity), 经典最小二乘估计的无偏性等基本性质一般不再满足, z_i被称为工具变量(IV, instrument variable). 关于"内生性"问题与工具变量应用广泛, 特别是在经济学和金融学中, 常见的有四种情形: 解释变量带测量误差的模型、随机解释变量问题、"联立方程"模型以及重要变量的缺失, 可参见文献[15].

注记 2 当$q > p$时(此时一定不再是经典模型情形), 由于可能的约束个数大于正规方程个数, 因而最小二乘方法已经不再适应; 此时, 通常采用广义矩方法(GMM, generalized moment methods).

理论结果需要的假设如下. $\|\cdot\|$表示欧氏泛数; $\xrightarrow{p}$表示依概率收敛; $\xrightarrow{d}$表示依分布收敛; $\Rightarrow$表示概率测度弱收敛; $[a]$表示实数a的整数部分.

假设 1 $\beta_i = \beta_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 该假设在文献中通常被称为"未污染假设"(non-contamination assumption), 见Chu et al. (1996).

假设 2 $\mathsf{E}(z_i\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

假设 3 $\{x_i\}, \{z_i\}$满足:

$$Q_{[nt]} = \frac{1}{[nt]}\sum_{i=1}^{[nt]} z_i x_i' \xrightarrow{p} Q \tag{2.2}$$

对任意$t \in [0, \tau]$一致成立, 其中$\mathrm{Rank}(Q) = p$为列满秩$q \times p$阵.

假设 4 $\{z_i\}$满足: $\limsup\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}|x_i|^{2+\eta} < \infty$ (η为某一正数), 且

$$\Omega_{[nt]} = \frac{1}{[nt]}\sum_{i=1}^{[nt]} z_i z_i' \xrightarrow{p} \Omega \tag{2.3}$$

对任意$t \in [0, \tau]$一致成立, 其中$\Omega > 0$为$q \times q$正定阵.

注意到在假设2–假设4条件下, 泛函中心极限定理(FCLT) (见Pollard所著文献[12])满足:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{[nt]} z_i\varepsilon_i \Rightarrow Z(t), \qquad t\in[0,\tau], \tag{2.4}$$

其中$\{Z(t), t\in[0,\tau]\}$为p-维高斯过程, 且$\mathsf{Cov}\,(Z(t),Z(s))=(s\wedge t)\sigma^2 Q'\Omega^{-1}Q$, $0\le s\le t\le\tau$.

我们检验以下假设

$$H_0:\ \ \beta_i=\beta_0, \quad i=1,\ldots,n,n+1,\ldots,N$$

对备择假设, 见Kramer (1988):

$$H_1:\ \ \beta_i=\beta_0+n^{-\delta}\Delta I_{\{k\ge n+k^*+1\}}, \quad (\Delta\ne 0, \delta\in[0,1/2]).$$

注意到上一备择假设是很一般的结构变化情形, $n^{-\delta}\Delta I_{\{k\ge n+k^*+1\}}$被称之为“跃度”(change size), k^*称为变点(change point). 关于N与变点k^*, 我们再加一条很通常的假设.

假设 5　$N=[n\tau]$, $\tau\in(1,\infty)$, $k^*=[n\lambda]$, $\lambda\in[0,\tau-1)$.

上一假设无非要求变点位置k^*与最大样本量N都与“训练样本容量”成正比, 即: 依赖于训练样本容量, 但是与其保持常数比例.

本文主要基于监测统计量$\Gamma_n(k)$和一个适合的边界函数$g_n(k)$. 我们会在下面时刻停止抽样同时拒绝H_0

$$\mathrm{HT}(n)=\begin{cases}\inf\{n+1\le k\le N:\Gamma_n(k)\ge cg_n(k)\},\\ \infty, \qquad \text{if } \Gamma_n(k)<cg_n(k), \ \text{for all } k=n+1,n+2,\ldots,N.\end{cases} \tag{2.5}$$

该时刻被称为首次击中时(first hitting time). 常数c须满足条件

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\mathrm{HT}(n)<\infty|H_0\}=\alpha, \qquad (\alpha\in(0,1)),\\ &\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\mathrm{HT}(n)<\infty|H_1\}=1.\end{aligned} \tag{2.6}$$

前者要求在原假设下(无变点), 当n很大时, 停止概率(误报概率, false alarm)为α, 而后者是说, 在备择假设下, 当n很大时, 必然会报警. 或者等价的建立检验统计量

$$T_n=\sup_{n+1\le k\le N}\frac{\Gamma_n(k)}{g_n(k)},$$

从而常数c由下式确定:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{T_n\ge c|H_0\}=\alpha, \qquad (\alpha\in(0,1)),\\ &\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{T_n<c|H_1\}=1.\end{aligned} \tag{2.7}$$

这种检验策略被Robbins (1970)称为“水平α势1序贯检验” (α level sequential tests with power one), 为方便以后均简称为“Power-one”检验.

§3. 变点检测

3.1 加权残差部分和过程

检验统计量的构造主要基于以下的加权残差部分和过程(partial sum processes based on weighted residual):

$$S_n(k)=\frac{1}{\sqrt{n}}Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{k}z_i(y_i-x_i'\widehat{\beta}),\qquad k=0,1,2,\ldots,n,n+1,\ldots,N,\tag{3.1}$$

其中

$$Q_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}z_ix_i',\quad \Omega_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}z_iz_i',\qquad k=1,\ldots,N,$$

$S_n(0)=0$. $\widehat{\beta}$则是系数向量β基于训练样本的广义矩估计, 即

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}&=\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i'\Big)\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}z_ix_i'\Big)\Big]^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i'\Big)\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}z_iy_i\Big)\\&=\frac{1}{n}(Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n)^{-1}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}z_iy_i\Big).\end{aligned}\tag{3.2}$$

更一般的, 可以将部分和$S_n(k)$, $k=0,1,\ldots,N$连续化, 并适当标准化

$$W_n(t)=\frac{1}{\widehat{\sigma}_n}J_n^{-1/2}S_n([nt]),\qquad t\in[0,\tau],\tag{3.3}$$

其中$J_n=Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n$, $\widehat{\sigma}_n^2$是误差方差的一个合适的相合估计量, 在后面定理假设条件下总是有: $J_n\xrightarrow{p}Q'\Omega^{-1}Q\triangleq J$, $\widehat{\sigma}_n\xrightarrow{p}\sigma$.

下面构造的检验统计量都是基于上述经验过程(3.3), 其基本思想在于经验过程反映了结构变化的某些症状. 下面的定理将表明随机过程$W_n(t)$ (或者$S_n(k)$)在原假设H_0下的行为近似的由布朗桥$\{W^0(t),0\le t\le\tau\}$刻画. 如果原假设H_0是错误的(H_1满足), 过程(3.3)将会发生系统性的偏移, 此时其行为不再能被布朗桥$\{W^0(t),0\le t\le\tau\}$去近似描述. 事实上, 我们将会证明在备择假设下该过程的极限性质确实不同于布朗桥. 基于此种差异, 通过对经验过程(3.3)取一个合适的泛函$f(\cdot)$从而抓住经验过程的反常波动, 我们将能构造合适的检验统计量. 在线性模型结构变化的历史检测场合, Hansen (1992)基于类似于(3.3)的经验过程而提出了Nyblom-Hansen检验; 这种思想也被作者推广到广义线性模型序贯检测场合(Xia, Guo和Zhao, 2009).

由于经验过程(3.1)或(3.3)本质上就是一个$p\times N$数据矩阵, 即: 样本是p维的且样本容量为N, 则检验统计量可以构造为以下形式:

$$T_n=\sup_{n+1\le k\le N}\frac{f_{n,k}}{b(k/n)},\tag{3.4}$$

其中$f_{n,k}=\|W_n(i/n)\|^2$, $b(t)$是适当的加权函数, 常称为"边界函数"(boundary function), 是序贯检测很重要的特征, 其选取一般联合考虑变点位置、数学方便程度等等信息. 其在原假设和备择假设下的极限性质将成为本文研究的基本内容.

3.2 检验统计量的极限性质

下面研究$\Delta \in R^p$时检验统计量的极限性质, 而将原假设H_0视为备择假设H_1的特殊情形. 下面定理描述了经验过程的极限性质:

定理 3.1 若假设1–5满足, 且$\Delta \in R^p$下, 有

1) 当$\delta = 1/2$时,

$$W_n(t) \Rightarrow W^0(t) + \frac{f(t;\lambda)}{\sigma} J^{1/2}\Delta, \tag{3.5}$$

其中$W^0 \equiv \{W^0(t), t \in [0,\tau]\}$表示标准布朗桥, $f(t;\lambda) = (t-\lambda-1)I_{\{t>\lambda+1\}}$; $W_n \equiv \{W_n(t), t \in [0,\tau]\}$表示经验过程; $\Rightarrow$表示空间$D([0,\tau])$上关于Skorohod-J_1拓扑的测度弱收敛(见Pollard, 1984).

2) 当$0 \le \delta < 1/2$, $\Delta \ne 0$时, 关于$t \in [0,\tau]$一致的有

$$n^{\delta-1/2} W_n(t) \xrightarrow{p} \frac{f(t;\lambda)}{\sigma} J^{1/2}\Delta. \tag{3.6}$$

证明: 首先可以对部分和过程作以下简单分解:

$$\begin{aligned}
S_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{k} z_i(y_i - x_i'\widehat{\beta}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{k} z_i(y_i - x_i'\beta_i) - \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{k} z_i(x_i'\widehat{\beta} - x_i'\beta_i) \\
&= Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k} z_i\varepsilon_i\Big) - \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\sum_{i=1}^{k} z_i x_i'(\widehat{\beta} - \beta_0) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(n^{-\delta}\sum_{i=1}^{k} z_i x_i'\Delta I_{\{i\ge n+k^*+1\}}\Big), \\
&\qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其次考虑到$\widehat{\beta}$为系数向量β_0的GMM估计, 且满足假设1, 则有

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \frac{1}{n}(Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n)^{-1}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i y_i\Big) = \frac{1}{n}(Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n)^{-1}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i(x_i'\beta_0 + \varepsilon_i)\Big) \\
&= \beta_0 + \frac{1}{n}(Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n)^{-1}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i\Big).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

将公式(3.8)带入公式(3.7), 进行必要的整理, 可得

$$\begin{aligned}
S_n([nt]) &= Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]} z_i\varepsilon_i\Big) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{[nt]} z_i x_i'\Big)\Big[\frac{1}{n}(Q_n'\Omega_n^{-1}Q_n)^{-1}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\varepsilon_i\Big)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(n^{-\delta}\sum_{i=1}^{[nt]} z_i x_i'\Delta I_{\{i\ge n+k^*+1\}}\Big) \\
&= S_n^{(1)}(k) + S_n^{(2)}(k) + S_n^{(3)}(k).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

由泛函中心极限定理及公式(2.4)结合假设1−4, 有

$$\frac{1}{\widehat{\sigma}_n}J_n^{-1/2}(S_n^{(1)}([nt])+S_n^{(2)}([nt]))\Rightarrow W^0(t),\qquad t\in[0,\tau]. \tag{3.10}$$

下面观察$S_n^{(3)}([nt])$项, 有

$$\begin{aligned}S_n^{(3)}([nt]) &= \frac{1}{\sqrt{n}}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(n^{-\delta}\sum_{i=1}^{[nt]}z_ix_i'\Delta I_{\{i\geq n+k^*+1\}}\Big)\\ &= \begin{cases}n^{1/2-\delta}Q_n'\Omega_n^{-1}\Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=n+[n\lambda]+1}^{[nt]}z_ix_i'\Delta\Big), & t>\lambda+1,\\ 0, & t\leq\lambda+1.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.11}$$

由假设3, 则$t\in[0,\tau]$一致的满足: 当$t>\lambda+1$时,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=n+[n\lambda]+1}^{[nt]}z_ix_i'\xrightarrow{p}(t-\lambda-1)Q.$$

当$\delta=1/2$时, 有

$$\frac{1}{\widehat{\sigma}}J_n^{-1/2}S_n^{(3)}([nt])\xrightarrow{p}\frac{f(t;\lambda)}{\sigma}J^{1/2}\Delta. \tag{3.12}$$

当$0\leq\delta<1/2$时, 容易得

$$n^{\delta-1/2}\frac{1}{\widehat{\sigma}}J_n^{-1/2}S_n^{(3)}([nt])\xrightarrow{p}\frac{f(t;\lambda)}{\sigma}J^{1/2}\Delta.\qquad\Box \tag{3.13}$$

由连续映射定理以及定理3.1, 可以很快得到下面的推论, 该推论是我们变点检验的直接理论依据.

推论 3.1 若假设1−5满足, 在备择假设H_1下, 则对$\delta=1/2$,

$$T_n\xrightarrow{d}\sup_{1\leq t\leq\tau}\Big\|W^0(s)+\frac{f(s;\lambda)}{\sigma}J^{1/2}\Delta\Big\|^2,\qquad 当\ n\to\infty;$$

对$0\leq\delta<1/2$,

$$n^{2\delta-1}T_n\xrightarrow{p}\sup_{1\leq t\leq\tau}\Big\|\frac{f(s;\lambda)}{\sigma}J^{1/2}\Delta\Big\|^2,\qquad 当\ n\to\infty.$$

证明: 由连续映射定理即可, 其中第二个结论左边系数$n^{2\delta-1}$源于欧氏范数的平方.
□

当$\Delta=0$可以视推论的第一条为原假设下的检验统计量的极限分布, 该推论为我们的结构变化检验的应用方法提供了直接的理论依据. 基于推论3.1, T_n的临界值$c_\alpha(n)$可以由下式获得其渐近值:

$$\mathsf{P}(T_n>c_\alpha)\to\mathsf{P}\Big(\sup_{1\leq t\leq\tau}\|W^0(s)\|^2>c_\alpha\Big)=\alpha. \tag{3.14}$$

显然在微弱的分布连续条件下有$c_\alpha(n)\xrightarrow{p}c_\alpha$, 其中$c_\alpha(n)$由式$\mathsf{P}(T_n>c_\alpha(n))=\alpha$决定.

当$\Delta\neq 0$时, 其结论自然描述了备择假设下的特征, 基于此我们做两点注解:

注记 3 当$\delta = 1/2$时, 由于$f(t;\lambda) \geq 0$, $t \in (0,1)$, 推论3.1表明: 假定$J^{1/2}\Delta \neq 0$时检验统计量T_n在备择假设时有"非平凡势"(non-trivial power); 类似的, 当$\delta \in [0, 1/2)$时, 假定$J^{1/2}\Delta \neq 0$时, 则$T_n \to +\infty$, 即: 该检验是相合的.

注记 4 当$J^{1/2}\Delta = 0$时, 检验不再相合, 这可以理解为有限维参数的跃度Δ与特征量$J^{1/2}$不再正交, 类似结论也在其他变点文献中出现, 其几何意义和类似的详细讨论可参看Chu在文献[14]中3.2节.

§4. 随机模拟

4.1 检验统计量构造分析

为了获得渐近显著性水平为α的序贯检验方法, 我们需要确定一个合适的边界函数$b(s)$, $s \in [1, \tau]$的形状. 通常正比于布朗桥的方差或者直接取为其方差, 即: $b(s) = s(s-1)$, $s \in [1, \tau]$. 因为在$s = 1$处, 边界函数均为零, 为使得渐近理论依然有效, 需要对边界函数作某些修正. 我们对边界函数做两种类型偏移(offset), 得到以下两种情形:

$$
\begin{aligned}
&b_1(s) = s^2, \\
&b_2(s) = s^2 - s + \pi, \qquad (\pi \text{ 为一较小的正数, 如: } 0.01).
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

表1按下式给出了检验统计量的渐近分位值c_α:

$$
\mathsf{P}\Big(\sup_{s\in[1,\tau]} \frac{\|W^0(s)\|^2}{b(s)} > c_\alpha\Big) = \alpha.
$$

表1 $\sup\limits_{s\in[1,\tau]} \dfrac{\|W^0(s)\|^2}{b(s)}$的分位值$c_\alpha$

	$\tau=2$		$\tau=4$		$\tau=6$		$\tau=8$	
$g(s)$	10%	5%	10%	5%	10%	5%	10%	5%
g_1	3.0023	3.6283	4.4420	5.4449	4.9416	5.9230	5.0385	6.3200
g_2	6.8606	8.4146	7.7889	9.2264	7.7721	9.4624	7.8713	9.6510

每一单位长度用1000个i.i.d.标准正态随机变量的标准化部分和近似标准布朗运动, 然后转化为布朗桥, 随机模拟的重复次数为2500.

4.2 原假设下检验统计量的极限性质

为了验证原假设下检验的有限样本性质, 我们以"简化形式"(reduced form)给出其方程, 确定一个数据生成过程(DGP1):

$$
\begin{aligned}
&y_i = \beta_0 + x_i'\beta_1 + \varepsilon_i; \\
&x_i = \gamma_0 + \gamma_1 z_i + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, N,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

其中$x_i \in R^1$, 且$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$分别为截距项和斜率; $z_i \in R^1$, 且$\{z_i\}$是i.i.d. N(0,1)序列, 而$\{u_i\}$是i.i.d. N(0,1)序列, 且$\{z_i\}$和$\{u_i\}$两序列之间独立; $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\varepsilon_i = 0.5u_i$, 容易判断, z_i满足: $\mathsf{E}(z_i\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. 假设条件将类似于下节的验证方法.

表2 H_0下T_n的经验水平($\alpha = 0.05$)

边界函数	$n=100$			$n=200$			$n=400$		
	$N=2n$	$N=4n$	$N=6n$	$N=2n$	$N=4n$	$N=6n$	$N=2n$	$N=4n$	$N=6n$
$b_1(s)$	0.0740	0.0780	0.0920	0.0360	0.0600	0.0680	0.0560	0.0440	0.0500
$b_2(s)$	0.0680	0.0700	0.0780	0.0640	0.0700	0.0700	0.0460	0.0520	0.0560

原假设下经验过程穿界频率(统计量经验显著性水平)在此表中报告, 表中模拟结果均基于2500次重复.

表2给出了在名义水平0.05下检验统计量的经验水平, 除了情形b_1, $n = 100$, $N = 6n$对应值偏大(0.092), 表中结果整体而言较为接近名义水平. 其中边界函数b_1, b_2的选择对统计量的经验水平不存在明显的优劣影响; "训练样本"容量n影响显著, 当n较小时(如: $n = 100$), 经验水平稍显偏大, 且同时随着N增加而增大, 特别是情形b_1, $n = 100$, $N = 6n$; 当n较大时(如: $n \geq 200$), 经验水平稳定在名义水平0.05附近, 上下波动, 且不再明显依赖N的取值.

4.3 备择假设下检验统计量的极限性质

为了验证备择假设下检验的有限样本性质, 我们确定一个数据生成过程(DGP2):

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + x_i'\beta_1 + x_i'\Delta I_{\{i\geq n+k^*+1\}} + \varepsilon_i; \\ x_i &= \gamma_0 + \gamma_1 z_i + u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中$x_i \in R^1$, 且$\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$分别为截距项和斜率, Δ为跃度, k^*代表变点位置; $z_i \in R^1$, 且$\{z_i\}$是i.i.d. N(0,1)序列, 而$\{u_i\}$是i.i.d. N(0,1)序列, 且$\{z_i\}$和$\{u_i\}$两序列之间独立; $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\varepsilon_i = 0.5u_i$, 容易判断, z_i满足: $\mathsf{E}(z_i\varepsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (即假设2满足); 根据模型(4.3), 可知假设1和假设5都成立; 关于假设3与假设4的验证, 需要用到"等度连续"(equi-continuity)的概念, i.i.d.虽然是其最简单情形但是验证过程还是显得复杂, 可以参看Horvath et al.在文献[16]中的相关讨论.

表3 H_1下T_n的经验势

边界函数	$\lambda=0.05\,(k^*=10)$			$\lambda=1.5\,(k^*=300)$			$\lambda=2.5\,(k^*=500)$		
	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=3$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=3$	$\Delta=1$	$\Delta=2$	$\Delta=3$
$b_1(s)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$b_2(s)$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表中每个数字代表备择假设成立的条件下的拒绝原假设的比率, 所有数字均基于1000次重复试验.

通观表3, 虽很好的印证了最初制定的“Power-one”检验策略, 但其所列结果皆较平凡, 无法比较优劣, 所以在结构变化的序贯检测中提出了另一个更重要的指标—“检测延迟”(T_{delay}, delay time), 即: $T_{\text{delay}} = \text{HT}_n - (n + k^*)$, 有关结果列在表4中. 为方便且受表2的启发, 我们只给出了显著性水平(名义水平) $\alpha = 5\%$且$n = 200$及$N = [n\tau]$, $\tau = 4$情形下统计量的检测延迟. 同时考虑不同的变点位置λ和跃度水平Δ以及两种边界函数$b_1(s), b_2(s)$.

表4 “检测延迟”的均值和标准差

边界	$\lambda = 0.05\,(k^* = 10)$			$\lambda = 1.5\,(k^* = 300)$			$\lambda = 2.5\,(k^* = 500)$		
函数	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
$b_1(s)$	9(4)	5(3)	4(2)	18(9)	10(6)	7(4)	26(13)	12(7)	8(5)
$b_2(s)$	5(3)	3(2)	2(1)	20(10)	10(5)	7(4)	28(14)	15(7)	10(6)

表格中所列为“检测延迟”的数学期望和标准差(小括号内), 其模拟均基于2500次重复.

从表中我们观察到以下几个特点:

1) 变点位置的影响: 变点位置靠前的容易检测, 我们观察到其相应的“检测延迟”较小, 并且其相应的标准差也较小, 这暗示着更有可能被检测到.

2) 跃度大小的影响: 跃度越大越容易检测, 其“检测延迟”较小, 并且其相应的标准差也较小, 这暗示着更有可能被检测到.

3) 边界函数的差异: 在其他条件确定的情况下, 边界函数两者之间的差异较大, 其对“检测延迟”的影响似乎与变点位置有关, 需要结合分析. 从表中观测可得, 对于变点位置靠前的情形($\lambda = 0.05$), b_1表现比b_2较差; 对于变点位置居中的情形($\lambda = 1.5$), b_1表现和b_2接近; 而对于变点位置靠后的情形($\lambda = 2.5$), b_1表现比b_2较好. 其根源应该是边界函数的形状稍有差异, 关于边界函数的深入探讨, 作者正展开进一步研究.

参 考 文 献

[1] Page, E.S., Continuous inspection schemes, *Biometrika*, **41(1/2)**(1954), 100–115.

[2] Nyblom, J., Testing for the constancy of parameters over time, *Journal of the American Statistical Association*, **84**(1989), 223–230.

[3] Hansen, B.E., Testing for parameter instability in linear models, *Journal of Policy Modeling*, **14**(1992), 517–533.

[4] Hansen, B.E., *Econometrics*, Manuscript: Universtity of Wiscosin, 2009.

[5] Hjort, N.L. and Koning, A., Tests for constancy of model parameters over time, *Journal of Nonparametric Statistics*, **14**(2002), 113–132.

[6] Brown, R.L., Durbin, J. and Evans, J.M., Techniques for testing the constancy of regression relationships over time, *Journal of the Royal Statistical Society*, **B37**(1975), 149–163.

[7] Gombay, E. and Horath, L., Limit theorems for change in linear regression, *Journal of multivariate analysis*, **48**(1994), 43–69.

[8] Ploberger, W. and Kramer, W., The CUSUM test with OLS residuals, *Econometrica*, **60(2)**(1992), 271–285.

[9] Kuan, C.M. and Hornik, K., The generalized fluctuation test: a unifying view, *Econometric Reviews*, **14**(1995), 135–161.

[10] Robbins, H., Statistical methods related to the law of the iterated logarithm, *Annals of Mathematical Statistics*, **41**(1970), 1397–1409.

[11] Xia, Z.M., Guo, P.J. and Zhao, W.Z., Monitoring structural changes in generalized linear models, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **38(11)**(2009), 1927–1947.

[12] Pollard, D., *Convergence of Stochastic Processes*, New York: Springer-Verlag, 1984.

[13] Kramer, W., Ploberger, W. and Alt, R., Testing for structural change in dynamic models, *Econometrica*, **56**(1988), 1355–1369.

[14] Chu, C.S., Stinchcombe, M. and White, H., Monitoring structural change, *Econometrica*, **64**(1996), 1045–1065.

[15] Hayashi, F., *Econometrics*, Princeton: Princeton University Press, 2000.

[16] Horvath, L., Huskova, M., Kokoszka, P. and Steinebach, J., Monitoring changes in linear models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**(2004), 225–251.

Monitoring Change Points in IV Models

Xia Zhiming[1] Zhao Wenzhi[2] Pu Xiaolong[3] Guo Pengjiang[1]

([1] *Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, 710069*)

([2] *School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an, 710048*)

([3] *School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200241*)

This paper studies how to detect change points in IV models. LM method is proposed based on weighted residual partial sum. The asymptotic properties under null or alternative hypothesis are proved. Under some non-orthogonality condition, the test has non-trivial power when $\delta = 1/2$ and will be consistent when $0 \le \delta < 1/2$.

Keywords: Change points, jump size, IV models, weighted-CUSUM.

AMS Subject Classification: 62F12.