应用概率统计　第三十卷
第一期　2014年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.1 Feb. 2014

套误差分量回归模型中方差分量的精确检验 *

赵　静[2]　王松桂[1]　王　磊[2]

([1]北京工业大学应用数理学院, 北京, 100022; [2]滨州学院数学与信息科学系, 滨州, 256603)

摘　要

本文利用广义p-值和广义置信区间的概念构造含有三个随机效应的套误差分量模型中方差分量的几种新的精确检验和置信区间, 并讨论它们在尺度变换下的不变性. 模拟结果表明, 基于广义p-值的检验很好地控制了犯第一类错误的概率.

关键词: 套误差分量回归模型, 随机效应, 广义p-值, 广义置信区间，方差分量.

学科分类号: O212.1.

§1. 引　　言

考虑下面的套误差分量模型

$$y_{ijt} = x'_{ijt}\beta + u_{ijt}, \qquad i=1,\ldots,M,\ j=1,\ldots,N,\ t=1,\ldots,T, \tag{1.1}$$

这是一个平衡的套误差回归模型, 其中y_{ijt}表示第i个产业第j个公司在时间段t的产量, x_{ijt}表示一个k维的非随机向量. 其中误差项

$$u_{ijt} = \mu_i + \upsilon_{ij} + \varepsilon_{ijt}, \qquad i=1,\ldots,M,\ j=1,\ldots,N,\ t=1,\ldots,T, \tag{1.2}$$

其中μ_i表示第i个不可观测的具体产业效应, 假定它们独立同分布于$N(0,\sigma_\mu^2)$, υ_{ij}表示第i个产业第j个公司的套效应, 假定它们独立同分布于$N(0,\sigma_\upsilon^2)$, ε_{ijt}表示剩余误差项, 假定它们独立同分布于$N(0,\sigma_\varepsilon^2)$, 且$\mu_i$, υ_{ij}和ε_{ij}也是相互独立的.

在实际应用中, 关于方差分量的检验和置信区间已成为数据分析的一个重要组成部分, 受到统计学家的极大关注. 然而, 在很多情况下, 由于冗余参数(nuisance parameter)的存在, 很难甚至无法利用传统的方法来获取精确检验和置信区间. Tsui和Weerahandi(1989)和Weerahandi (1993)分别提出了广义p-值(generalized p-value)和广义置信区间(generalized confidence interval)的概念. 实践证明, 在多余参数出现的情况下, 基于广义p-值和广义置信区间来获取精确检验和置信区间的方法是富有成效的, 文献中也有不少研究成果[1–10]. Weerahandi (1987, 1995)把广义p-值应用于异方差回归模型和不等误差方差的

*滨州学院科学基金项目(BZXYL1105)资助.
本文2012年8月8日收到, 2012年11月6日收到修改稿.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.01.004

单向方差分析模型中, 分别考虑了回归系数和方差分量的相等性检验, 建立了广义F检验. Zhou和Mathew (1994)把这种方法应用到混合模型中, 分别对单个方差分量的显著性检验和两个独立平衡模型中方差分量的比较建立了精确检验, 并把部分结果推广到非平衡情况. Chi和Weerahandi (1998), Weerahandi和Berger (1999)利用广义p-值对协方差具有组内相关结构的简单生长曲线模型中回归系数建立了精确检验, Lin和Lee (2003)把他们的结果推广到协方差矩阵具有等相关结构的简单生长曲线模型. Krishnamoorthy和Mathew (2003)利用广义p-值和广义置信区间对对数正态分布的均值建立了精确检验和置信区间. Ye和Wang (2007)对平衡数据下一般随机效应模型的单个方差分量构造出精确检验和置信区间, 并将结果推广至两个独立平衡模型方差分量的比较. 马铁丰和王松桂(2007)对含有两个方差分量的随机效应为任意阵的线性混合模型的方差分量单边检验问题给出了精确的F检验和基于广义p-值的检验.

套误差分量回归模型广泛应用于计量经济、试验设计、抽样调查等问题中. 叶仁道和王松桂在[12]中讨论了$v_{ij}=0$时模型随机效应方差分量的任意线性组合的精确检验和置信区间. 程靖, 王松桂和岳荣先在[13]中讨论了无嵌套关系即$v_{ij}=\lambda_j$时模型中方差分量的精确检验和置信区间, 并讨论了检验的不变性. 本文将利用广义p-值和广义置信区间的概念对此具有嵌套结构的模型给出其方差分量的各类单边假设检验问题的精确检验, 构造参数的置信区间, 并讨论有关统计性质.

§2. 广义p-值和广义置信区间

设X为分布依赖于参数(θ,η)的随机变量, 其中θ为检验参数, η为多余参数, 且η可以为参数向量, 假如我们要检验假设

$$H_0:\theta\leq\theta_0 \longleftrightarrow H_1:\theta>\theta_0, \tag{2.1}$$

这个θ_0为预先给定值. 令x为X的观测值, 定义一个广义检验变量$T_1(X;x,\theta,\eta)$, 它满足如下条件:

(a) $T_1(X;x,\theta_0,\eta)$的分布与多余参数无关;

(b) $T_1(X;x,\theta,\eta)$的观测值$T_1(x;x,\theta,\eta)$与任何未知参数无关;

(c) 对于固定的x和η, $T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布关于θ随机单调增(stochastically increasing)或随机单调减(stochastically decreasing). (2.2)

当$T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布是关于θ随机单调增时, 对于假设检验问题(2.1), 广义p-值定义为$\mathsf{P}(T_1(X;x,\theta,\eta)\geq t|\theta=\theta_0)$, 这里$t=T_1(x;x,\theta,\eta)$. 当$T_1(X;x,\theta,\eta)$的分布是关于$\theta$随机单调减的, 对于假设检验问题(2.1), 广义p-值定义为$\mathsf{P}(T_1(X;x,\theta,\eta)\leq t|\theta=\theta_0)$.

为了构造参数θ的置信区间, 给出一个广义枢轴量$T_2(X;x,\theta,\eta)$, 它满足如下条件:

(a) $T_2(X;x,\theta,\eta)$的分布与任何未知参数无关;

(b) $T_2(X;x,\theta,\eta)$的观测值, 即$T_2(x;x,\theta,\eta)$与多余参数无关. (2.3)

由条件(2.3), 我们可以利用$T_2(X;x,\theta,\eta)$的百分位数$T_2(1-\alpha)$来构造参数θ的广义置信区间. 如: 当$T_2(x;x,\theta,\eta)=\theta$时, 若$T_2(1-\alpha)$表示$T_2(X;x,\theta,\eta)$的第$100(1-\alpha)$百分位点, 则$T_2(1-\alpha)$就为$\theta$的广义置信上限, 同理可得$\theta$的广义置信下限和广义双边置信限. 详细讨论参见Tsui和Weerahandi (1989)和Weerahandi (1993).

§3. 模型分析

把模型(1.1)写成矩阵形式

$$y=X\beta+u, \tag{3.1}$$

其中y是$MNT\times 1$的向量, X是$MNT\times k$的矩阵, β是$k\times 1$的参数向量, u是$MNT\times 1$的误差向量. 把(1.2)写成矩阵形式为

$$u=Z_\mu\mu+Z_\nu\nu+\varepsilon,$$

其中$\mu'=(\mu_1,\ldots,\mu_M)$, $\nu'=(\nu_{11},\ldots,\nu_{1N},\ldots,\nu_{NM})$, $\varepsilon'=(\varepsilon_{111},\ldots,\varepsilon_{11T},\ldots,\varepsilon_{MNT})$, $Z_\mu=I_M\otimes 1_N\otimes 1_T$, $Z_\nu=I_M\otimes I_N\otimes 1_T$, $\otimes$是Kronecher乘积, $1_N, 1_T$表示元素全为1的N维和T维列向量.

在这些假设下, 误差协方差阵$\mathsf{E}(uu')$可写成

$$\begin{aligned}\Omega &= \sigma_\mu^2 Z_\mu Z_\mu'+\sigma_\nu^2 Z_\nu Z_\nu'+\sigma_\varepsilon^2 I_{MNT}\\ &= \sigma_\mu^2 I_M\otimes J_N\otimes J_T+\sigma_\upsilon^2(I_M\otimes I_N\otimes J_T)+\sigma_\varepsilon^2 I_{MNT},\end{aligned}$$

其中$J_N=1_N1_N'$, $J_T=1_T1_T'$表示元素全为1的N阶和T阶方阵. 对Ω进行谱分解, 容易验证

$$\Omega=\sigma_1^2Q_1+\sigma_2^2Q_2+\sigma_3^2Q_3,$$

其中$\sigma_1^2=\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_2^2=T\sigma_\upsilon^2+\sigma_\varepsilon^2$, $\sigma_3^2=NT\sigma_\mu^2+T\sigma_\nu^2+\sigma_\varepsilon^2$, 相应地, $Q_1=I_M\otimes I_N\otimes E_T$, $Q_2=I_M\otimes E_N\otimes\overline{J}_T$, $Q_3=I_M\otimes\overline{J}_N\otimes\overline{J}_T$. 这里$\overline{J}_s=J_s/s$, $E_s=I_s-\overline{J}_s$. 显然, $\lambda_1=\sigma_1^2$, $\lambda_2=\sigma_2^2$, $\lambda_3=\sigma_3^2$是Ω的不同特征值, 其重数分别为$MN(T-1), M(N-1), M$. Q_1,Q_2,Q_3是相互正交的对称幂等阵, 和为单位阵 (即$Q_1+Q_2+Q_3=I$).

分别用Q_1,Q_2,Q_3左乘原模型, 由于$E_T1_T=0$, $E_N1_N=0$, 故有

$$\begin{cases}y_1=Q_1y=Q_1X\beta+Q_1u=Q_1X\beta+u_1,\\ y_2=Q_2y=Q_2X\beta+Q_2u=Q_2X\beta+u_2,\\ y_3=Q_3y=Q_3X\beta+Q_3u=Q_3X\beta+u_3,\end{cases} \tag{3.2}$$

其中$\mathsf{E}u_i = Q_i\mathsf{E}u = 0$, $\mathsf{Cov}\,(u_i) = \sigma_i^2 Q_i$, $i = 1, 2, 3$. 假定$(X'Q_iX)^{-1}$均存在, 这在实际观测中是很容易满足的. 在(3.2)各子模型中可得到β的最小二乘估计为

$$\widehat{\beta}_i = (X'Q_iX)^{-1}X'Q_iy, \qquad i = 1, 2, 3.$$

由最小二乘统一理论知$\widehat{\beta}_i$分别为上述三个模型中β的最佳线性无偏估计, 且

$$\mathsf{Cov}\,(\widehat{\beta}_i) = \sigma_i^2(X'Q_iX)^{-1} = \Sigma_i(\sigma_i^2), \qquad i = 1, 2, 3.$$

利用残差估计$\widehat{u}_i = Q_iy - Q_iX\widehat{\beta}_i$, $i = 1, 2, 3$, 得到σ_i^2无偏估计

$$\widehat{\sigma}_i^2 = S_i^2 = \frac{\widehat{u}_i'Q_i^-\widehat{u}_i}{n_i} = \frac{y'(Q_i - Q_iX(X'Q_iX)^{-1}X'Q_i)y}{n_i},$$

其中$n_i = rk(Q_i) - k$, 且有

$$V_i = \frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i}^2, \qquad i = 1, 2, 3.$$

引理 3.1 $\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3, S_1^2, S_2^2, S_3^2$相互独立.

$\widehat{\beta}_i, S_i^2$分别为y的线性型和二次型, 而y服从多元正态分布. 依据王松桂等(2004)中的相关结论可以证明引理.

下面将利用这里获得的优良估计来构造方差分量的精确检验和置信区间.

§4. 方差分量的精确检验和置信区间

这一部分将讨论模型(1.1)中方差分量的几种假设问题基于广义p-值理论的精确检验和置信区间, 并探讨其有关性质. 本节沿用§3中参数估计的结果和记号.

首先考虑模型(1.1)中产业效应的单边假设检验问题

$$H_0: \sigma_\mu^2 \le c_0 \ \longleftrightarrow\ H_1: \sigma_\mu^2 > c_0, \tag{4.1}$$

其中c_0为一已知正数. 记s_i^2为S_i^2, $i = 1, 2, 3$的观测值, 定义

$$T_1 = \frac{n_3S_3^2}{\sigma_3^2} - \frac{n_3s_3^2}{NT\sigma_\mu^2 + \sigma_2^2s_2^2S_2^{-2}} = V_3 - \frac{n_3s_3^2}{NT\sigma_\mu^2 + n_2s_2^2V_2^{-1}}. \tag{4.2}$$

显然, T_1的观测值$t_1 = 0$与未知参数无关; 由S_1^2, S_2^2独立知

$$V_2 = \frac{n_2S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_2}^2, \qquad V_3 = \frac{n_3S_3^2}{\sigma_3^2} \sim \chi_{n_3}^2$$

相互独立，故T_1的分布与冗余参数无关；且由T_1的表达式可见，T_1关于σ_μ^2随机单调增．因此对假设问题(4.1)，T_1定义了一个广义检验变量．利用T_1给出如下广义p-值

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathsf{P}(T_1 \geq 0|\sigma_\mu^2 = c_0) = \mathsf{P}\Big(V_3 \geq \frac{n_3 s_3^2}{NTc_0 + n_2 s_2^2 V_2^{-1}}\Big) \\ &= 1 - \mathsf{E}_{V_2}\Big[F_{\chi^2_{n_3}}\Big(\frac{n_3 s_3^2}{NTc_0 + n_2 s_2^2 V_2^{-1}}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中E_{V_2}表示对V_2求期望，$F_{\chi^2_{n_3}}$表示自由度为n_3的卡方分布的分布函数．

考虑尺度变换

$$\begin{array}{l} (\beta, \sigma_2, \sigma_3) \longrightarrow (a\beta, a\sigma_2, a\sigma_3) \\ (\widehat{\beta}, S_2, S_3) \longrightarrow (a\widehat{\beta}, aS_2, aS_3) \end{array} \qquad (a > 0). \tag{4.4}$$

虽然广义检验变量T_1在尺度变换(4.4)下保持不变，但假设检验问题(4.1)本身不是尺度变换(4.4)下的不变检验问题．考虑与之等价的假设检验问题

$$H_0: \frac{\sigma_\mu^2}{s_2^2} = \lambda_\mu \leq \lambda_0 = \frac{c_0}{s_2^2} \longleftrightarrow H_1: \lambda_\mu > \lambda_0, \tag{4.5}$$

通过如下尺度变换

$$\begin{array}{l} (\beta, \sigma_2, \lambda_\mu) \longrightarrow (a\beta, a\sigma_2, \lambda_\mu) \\ (\widehat{\beta}, S_2, S_3) \longrightarrow (a\widehat{\beta}, aS_2, aS_3) \end{array} \qquad (a > 0), \tag{4.6}$$

则假设检验问题(4.5)为不变检验问题，其广义p-值可表示为

$$\widetilde{p}_1 = 1 - \mathsf{E}_{V_2}\Big[F_{\chi^2_{n_3}}\Big(\frac{n_3 s_3^2 s_2^{-2}}{NT\lambda_0 + n_2 V_2^{-1}}\Big)\Big]. \tag{4.7}$$

于是，对假设检验问题(4.5)，在尺度变换(4.6)下，基于(4.7)所定义的广义p-值的检验方法为p不变检验．

下面来构造σ_μ^2的广义置信区间，定义

$$T_1^* = \frac{1}{NT}\Big(\frac{\sigma_3^2 s_3^2}{S_3^2} - \frac{\sigma_2^2 s_2^2}{S_2^2}\Big) = \frac{1}{NT}\Big(\frac{n_3 s_3^2}{V_3} - \frac{n_2 s_2^2}{V_2}\Big).$$

显然，T_1^*的观测值为σ_μ^2，与冗余参数无关，由$V_2 \sim \chi^2_{n_2}$，$V_3 \sim \chi^2_{n_3}$相互独立知，T_1^*的分布与未知参数无关，因而T_1^*为一广义枢轴量．利用T_1^*可得到σ_μ^2的置信水平为$1-\alpha$的广义置信下限和广义置信上限分别为$T_1^*(\alpha)$和$T_1^*(1-\alpha)$．这里，$T_1^*(\alpha)$和$T_1^*(1-\alpha)$分别表示T_1^*的α和$1-\alpha$分位数．对于σ_μ^2的广义不变置信区间可利用下面的广义枢轴量$\widehat{T}_1^*$获得

$$\widehat{T}_1^* = \frac{1}{NTs_2^2}\Big(\frac{\sigma_3^2 s_3^2}{S_3^2} - \frac{\sigma_2^2 s_2^2}{S_2^2}\Big).$$

对于套效应及随机误差效应的单边假设检验问题

$$H_0:\sigma_\upsilon^2\le c_0 \ \longleftrightarrow\ H_1:\sigma_\upsilon^2>c_0, \tag{4.8}$$
$$H_0:\sigma_\varepsilon^2\le c_0 \ \longleftrightarrow\ H_1:\sigma_\varepsilon^2>c_0, \tag{4.9}$$

其中c_0为一已知正数. 类似于检验问题(4.1)定义

$$T_2=\frac{n_2S_2^2}{\sigma_2^2}-\frac{n_2s_2^2}{T\sigma_\upsilon^2+\sigma_1^2s_1^2S_1^{-2}}=V_2-\frac{n_2s_2^2}{T\sigma_\upsilon^2+n_1s_1^2V_1^{-1}},$$
$$T_3=\frac{\sigma_\varepsilon^2s_1^2}{S_1^2}-\sigma_\varepsilon^2=\frac{n_1s_1^2}{V_1}-\sigma_\varepsilon^2.$$

这里s_i^2表示S_i^2, $i=1,2,3$的观测值. 同样可验证T_2,T_3为广义检验变量. 由此可分别得到检验问题(4.8), (4.9)的广义p-值计算式

$$p_2=\mathsf{P}(T_2\ge t_2|\sigma_\upsilon^2=c_0)=1-\mathsf{E}_{V_1}\Big[F_{\chi^2_{n_2}}\Big(\frac{n_2s_2^2}{Tc_0+n_1s_1^2V_1^{-1}}\Big)\Big],$$
$$p_3=\mathsf{P}(T_3\le 0|\sigma_\varepsilon^2=c_0)=1-F_{\chi^2_{n_1}}\Big(\frac{n_1s_1^2}{c_0}\Big).$$

显然, p_3与卡方检验是等价的. 对于σ_υ^2, σ_ε^2的广义置信区间, 类似可利用如下广义枢轴量来构造

$$T_2^*=\frac{1}{T}\Big(\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}-\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big),\qquad T_3^*=\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}.$$

对于尺度变换下的不变检验和不变置信区间的构造, 类σ_μ^2的情形, 不再详述.

最后我们讨论方差分量的线性组合的单边假设检验问题

$$H_0:l\sigma_\mu^2+m\sigma_\upsilon^2+n\sigma_\varepsilon^2\le c_0\ \longleftrightarrow\ H_1:l\sigma_\mu^2+m\sigma_\upsilon^2+n\sigma_\varepsilon^2>c_0, \tag{4.10}$$

其中$l,m,n\in R$, c_0为一给定值. (4.10)是许多有实际意义的假设检验问题一般表示形式. 例如, 取$l=1$, $m=-1$, $n=c_0=0$, 要检验的就是$\sigma_\mu^2\le\sigma_\upsilon^2$; 如果取$l=m=1$, $n=-1$, $c_0=0$, 要检验的就是$\sigma_\mu^2+\sigma_\upsilon^2\le\sigma_\varepsilon^2$; 特别的, 分别取$m=n=0$, $l=1$或$l=m=0$, $n=1$, (4.9)就归结为前面讨论的三种假设问题. 下面对(4.10)建立广义p-值检验, 定义

$$\begin{aligned}T_4&=\Big[\frac{l}{NT}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{S_3^2}+\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}+\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}\Big]-(l\sigma_\mu^2+m\sigma_\upsilon^2+n\sigma_\varepsilon^2)\\&=\Big[\frac{l}{NT}\frac{n_3s_3^2}{V_3}+\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{n_2s_2^2}{V_2}+\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big]-(l\sigma_\mu^2+m\sigma_\upsilon^2+n\sigma_\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{4.11}$$

则有: T_4的观测值$t_4=0$与未知参数无关;

$$V_i=\frac{n_iS_i^2}{\sigma_i^2}\sim\chi^2_{n_i},\qquad i=1,2,3$$

相互独立, 故T_4的分布与冗余参数无关; T_4关于$l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2$随机单调减, 故$T_4$为一广义检验变量, 基于$T_4$的广义$p$-值为

$$\begin{aligned}
p_4 &= \mathsf{P}(T_4\le 0|l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2=c_0)\\
&= \mathsf{P}\Big(\frac{l}{NT}\frac{n_3s_3^2}{V_3}+\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{n_2s_2^2}{V_2}+\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\le c_0\Big)\\
&= \mathsf{P}\Big(V_3\ge \frac{l}{NT}n_3s_3^2\Big(c_0-\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{n_2s_2^2}{V_2}-\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)^{-1}\Big)\\
&= 1-\mathsf{E}_{V_1,V_2}\Big[F_{\chi^2_{n_3}}\Big(\frac{l}{NT}n_3s_3^2\Big(c_0-\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{n_2s_2^2}{V_2}-\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{n_1s_1^2}{V_1}\Big)^{-1}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

为构造$l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2$的置信区间, 定义

$$T_4^*=\frac{l}{NT}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{S_3^2}+\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{\sigma_2^2s_2^2}{S_2^2}+\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{\sigma_1^2s_1^2}{S_1^2}. \tag{4.12}$$

由上面分析可知T_4^*的分布与未知参数无关, T_4^*的观测值$t_4^*=l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2$与冗余参数无关, 故$T_4^*$为一个广义枢轴量. 由$T_4^*$分位点可构造$l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2$的广义置信区间. 如$T_4^*(1-\alpha)$为$T_4^*$的$1-\alpha$分位点, 则$T_4^*(1-\alpha)$可作为$l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2$的置信水平为$1-\alpha$的广义置信上限, 广义置信下限和双边置信限类似可得.

如果考虑尺度变换

$$\begin{array}{l}(\beta,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\longrightarrow(a\beta,a\sigma_1,a\sigma_2,a\sigma_3)\\ (\widehat{\beta},S_1,S_2,S_3)\longrightarrow(a\widehat{\beta},aS_1,aS_2,aS_3)\end{array}\qquad (a>0). \tag{4.13}$$

在此尺度变换下检验问题(4.10)本身和广义检验变量T_4均发生了变化, 考虑与之等价的假设问题

$$H_0:\frac{l\sigma_\mu^2+m\sigma_v^2+n\sigma_\varepsilon^2}{s_1^2}=\theta\le\theta_0=\frac{c_0}{s_1^2}\longleftrightarrow H_1:\theta>\theta_0. \tag{4.14}$$

定义

$$\widetilde{T}_4=\theta-\Big(\frac{l}{NT}\frac{\sigma_3^2s_3^2}{s_1^2S_3^2}+\Big(\frac{m}{T}-\frac{l}{NT}\Big)\frac{\sigma_2^2s_2^2}{s_1^2S_2^2}+\Big(n-\frac{m}{T}\Big)\frac{\sigma_1^2}{S_1^2}\Big),$$

可验证$\widetilde{T}_4$为一广义检验变量, 相应的广义p-值为

$$\widetilde{p}_4=\mathsf{P}(\widetilde{T}_4\ge\widetilde{t}_4|\theta=\theta_0).$$

考虑相应尺度变换

$$\begin{array}{l}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\theta)\longrightarrow(a\sigma_1,a\sigma_2,a\sigma_3,\theta)\\ (S_1,S_2,S_3)\longrightarrow(aS_1,aS_2,aS_3)\end{array}\qquad (a>0). \tag{4.15}$$

由于$\widetilde{T}_4$和检验问题(4.14)在尺度变换(4.15)下均保持不变, 所以(4.14)基于$\widetilde{T}_4$的广义p-值检验为尺度变换(4.15)下的p不变检验.

§5. 模拟结果

本部分给出方差分量一般形式的假设检验问题(4.10)的部分模拟结果, 不失一般性取$l=m=n=1$. 设$\mu_i\sim N(0,\sigma_\mu^2)$, $\upsilon_{ij}\sim N(0,1)$, $\varepsilon_{ijt}\sim N(0,0.1)$, 且设$M=15$, $N=10$, $T=5$, 考虑k为$2\sim 4$时, 设计点随机选取, 对基于广义检验变量(4.11)的广义p-值和基于(4.12)的广义置信区间的覆盖率进行数值模拟, 结果如下面两表所示:

表1 基于T_4的广义p-值检验的功效($\alpha=0.05$)

k	c_0	σ_μ^2					
		0.5	0.7	0.9	1.2	1.5	1.8
2	1.6	<u>0.0565</u>	0.2085	0.4110	0.6335	0.7975	0.8715
	1.8	0.0155	<u>0.0610</u>	0.1550	0.3835	0.5825	0.7045
	2.0	0.0075	0.0165	<u>0.0555</u>	0.2510	0.2750	0.3975
3	1.6	<u>0.0521</u>	0.2020	0.3765	0.6185	0.7500	0.8550
	1.8	0.0195	<u>0.0625</u>	0.1655	0.3620	0.5520	0.6810
	2.0	0.0012	0.0232	<u>0.0520</u>	0.2787	0.4660	0.6180
4	1.6	<u>0.0595</u>	0.1980	0.3745	0.5935	0.7340	0.8124
	1.8	0.0195	<u>0.0575</u>	0.1630	0.3670	0.5753	0.6775
	2.0	0.0115	0.0230	<u>0.0480</u>	0.1975	0.4145	0.5435

表2 基于T_4^*的广义置信区间的覆盖率($\alpha=0.05$)

k	σ_μ^2					
	0.5	0.7	0.9	1.2	1.5	1.8
2	0.9225	0.9325	0.9485	0.9610	0.9822	0.9840
3	0.9250	0.9220	0.9345	0.9675	0.9710	0.9800
4	0.9335	0.9405	0.9425	0.9765	0.9790	0.9830

表1可以看出本文构造的广义p-值检验能较好地控制犯第一类错误的概率, 其中划线数据为犯第一类错误的概率. 功效为待检验参数的增函数且功效增长较为理想. 表2可以看出本文构造的广义置信区间包含参数的概率在$1-\alpha$附近波动. 因此广义p-值方法用于解决此类问题具有一定的可行性.

参 考 文 献

[1] Tsui, K.W. and Weerahandi, S., Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters, *Journal of the American Statistical Association*, **84(406)**(1989), 602–607.

[2] Weerahandi, S., Generalized confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association*, **88(423)**(1993), 899–905.

[3] Weerahandi, S., Testing regression equality with unequal variances, *Econometrica*, **55(5)**(1987), 1211–1215.

[4] Weerahandi, S., ANOVA under unequal error variances, *Biometrics*, **51(1)**(1995), 289–299.

[5] Zhou, L.P. and Mathew, T., Some tests for variance components using generalized p values, *Technometrics*, **36(4)**(1994), 394–402.

[6] Chi, E.M. and Weerahandi, S., Comparing treatments under growth curve models: exact tests using generalized p-values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **71(1-2)**(1998), 179–189.

[7] Weerahandi, S. and Berger, V.W., Exact inference for growth curves with intraclass correlation structure, *Biometries*, **55(3)**(1999), 921–924.

[8] Lin, S.H. and Lee, J.C., Exact tests in simple growth curve models and one-way ANOVA with equicorrelation error structure, *Journal of Multivariate Analysis*, **84(2)**(2003), 351–368.

[9] Krishnamoorthy, K. and Mathew, T., Inferences on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **115(1)**(2003), 103–121.

[10] Ye, R.D. and Wang, S.G., Generalized p-values and generalized confidence intervals for variance components in general random effect model with balanced data, *Journal of Systems Science and Complexity*, **20(4)**(2007), 572–584.

[11] 马铁丰, 王松桂, 线性混合模型方差分量的检验, 高校应用数学学报, **22(4)**(2007), 433–440.

[12] 叶仁道, 王松桂, Panel模型中的精确检验和置信区间, 高校应用数学学报, **23(4)**(2008), 415–426.

[13] 程靖, 王松桂, 岳荣先, Panel数据模型中方差分量的精确检验, 应用概率统计, **26(1)**(2010), 89–98.

[14] 王松桂, 史建红, 尹素菊, 吴密霞, 线性模型引论, 科学出版社, 2004.

Exact Tests of Variance Components in Nested Error Component Regression Model

Zhao Jing[2] Wang Songgui[1] Wang Lei[2]

([1]*College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing, 100022*)

([2]*Department of Mathematics and Information Science, Binzhou University, Binzhou, 256603*)

In this paper, some new exact tests and confidence intervals of variance components in nested error component regression model with three random effects are developed by using generalized p-value and generalized confidence interval. Invariance of these tests and confidence intervals under scale transformation is also discussed. It is showed that the generalized p-value is feasible and effective to resolve the hypothesis testing problems with nuisance parameters. A simulation study is conducted to illustrate the powers of these tests and coverage probabilities.

Keywords: Nested error component regression model, random effect, generalized p-value, generalized confidence interval, variance component.

AMS Subject Classification: 62J10.