应用概率统计 第三十卷
第三期 2014年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.3 Jun. 2014

基于分数维Vasicek利率模型的CDS定价 *

刘永辉[1,3] 郝瑞丽[2,3] 王守佰[4]

([1]上海对外经贸大学商务信息学院, 上海, 201620; [2]复旦大学应用经济学博士后流动站, 上海, 200433)

([3]上海金融学院应用数学系, 上海, 201209; [4]上海财经大学应用数学系, 上海, 200433)

摘 要

本文研究CDS的定价问题, 其中涉及到利率风险和传染风险. 文中用分数维Vasicek利率模型刻画利率风险, 对公司的违约强度进行建模, 给出了违约与利率相关时风险债券的价格, 并在此基础上得到CDS的价格.

关键词: 分数维Vasicek利率模型, 风险债券, 传染模型, CDS定价.

学科分类号: O175.2, O211.

§1. 引 言

1.1 信用违约互换定价模型简介

信用风险是金融行业面临的主要风险之一, 如何管理信用风险则是金融行业要解决的重要问题. 自上个世纪九十年代信用违约互换(credit default swap)产生以来, 由于它的巨大优点, CDS便很快成为管理信用风险的一种重要的衍生工具. 但是, 随着信用违约互换市场的急剧扩张, 一些深层次矛盾不断暴露在人们面前, 如美国次贷危机和欧洲主权债务危机, 使人们认识到金融衍生品在给人们带来方便的同时也蕴藏了巨大的风险, 如传染风险等. 因此, 需要对金融衍生品, 特别是它的定价问题进行深入细致的研究.

CDS的定价主要有两类方法: 一类是结构化方法, 另一类是约化方法. 结构化方法对公司的资产负债信息建模, 将违约看成一种内生变量, 该变量与公司的资产有关. 约化方法则认为违约是外生变量, 是不可预料的, 用一个外生的跳过程来刻画违约事件, 违约时刻就是跳过程发生第一次跳的时刻. 然而, 由于公司的资产价值通常是很难确定的, 所以, 相比结构化模型来说, 约化模型在真实市场中更有用. 本文主要用约化模型研究CDS的定价问题.

对违约强度进行建模, 引入违约的外生机制, 认为违约是由一个强度过程决定的随机事件. Jarrow 和 Turnbull (1995), Duffie 和 Singleton (1999)给出了相应的结论, 后来

*国家自然科学基金(11271259)、数学天元基金(11326170)、中国博士后基金第55批面上资助(2014M551297)和上海市教委科研创新项目(13YZ125)资助.

本文2013年1月21日收到, 2014年5月19日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.03.003

Lando (1998)将模型推广到Cox过程情形. 另外, Duffie, Pan和Singleton (2000)在上述模型的基础上建立了跳扩散仿射强度模型. 本文认为违约强度是一个随机过程$\lambda=\{\lambda_t\}_{t\geq 0}=\{\lambda(X_t)\}_{t\geq 0}$, 违约时间定义为

$$\tau=\inf\Big\{t:\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s\geq E\Big\},\tag{1.1}$$

其中E为单位指数随机变量, 则条件违约概率为

$$\mathsf{P}[\tau\leq t|\{X_s\}_{\{0\leq s\leq t\}}]=1-\exp\Big(-\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}s\Big),\tag{1.2}$$

其中$X=\{X_s:0\leq t\leq T\}$表示状态变量. T表示到期日.

1.2 分数维Vasicek利率模型

分数维布朗运动最早由Kolmogorov在Hilbert空间中定义和研究, 并命名为Wiener螺线. 由于分数维布朗运动具有自相似性, 长期依赖性等特性, 而金融市场中的许多现象表现出某种程度的自相似性和长期依赖性, 因此分数维布朗运动自然便成为研究金融问题的一个非常有用的工具. 然而当Hurst指数$H\neq 1/2$时, 分数维布朗运动既不是马尔可夫过程, 也不是半鞅, 所以, 我们不能用传统的随机积分理论进行建模. Lin (1995)发展了分数维布朗运动路径依赖积分理论, 但Rogers (1997)发现用这种积分理论建立的金融市场数学模型存在套利机会. 后来, Hu和ØKsendal (2003)在Duncan, Hu和Pasik-Duncan (2000)介绍的以Wick积为基础的分数维布朗运动的基础上, 通过分数维白噪音分析进一步发展了$H>1/2$时的积分理论, 并基于此积分理论建立了金融市场数学模型, 继而证明了对应的金融市场是无套利且完备的, 这就为其在金融领域的应用建立了坚实的理论基础. 本文也考虑Hurst指数$H\in(1/2,1)$的情形. 我们不加证明地给出如下定义和定理, 详细情况可参见Hu和ØKsendal (2003).

定义 1.1 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是可测的. 如果$|f|_\phi^2=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}f(s)f(t)\phi(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty$, 那么我们称$f\in L_\phi^2(\mathbb{R})$, 其中$\phi(s,t)=H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$, $\forall\, t,s\in\mathbb{R}$.

定义 1.2 (拟条件期望) 设$G=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_n(s)\mathrm{d}B_H^{\otimes n}\in G^*$, G^*为赋予归纳拓扑的随机分布空间, 则G关于$\mathcal{F}_t^H=\sigma(B_H(t),0\leq s\leq t)$流域拟条件期望定义为

$$\mathsf{E}_t[G]:=\mathsf{E}[G|\mathcal{F}_t^H]=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}g_n(s)\chi_{\{0\leq s\leq t\}}\mathrm{d}B_H^{\otimes n},\tag{1.3}$$

其中$\chi_{\{0\leq s\leq t\}}=\begin{cases}1 & 0\leq s\leq t\\ -1 & t\leq s\leq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$. 为了简单起见, 我们将其记为$\chi_{[0,t]}$.

定义 1.3 (拟鞅) 若随机过程$\{M(t,\omega)\}_{t\geq 0}$是关于流域$\mathcal{F}_t^H$适应的, 如果对任意的$t$, $M(t)\in G^*$, 满足$\mathsf{E}_s[M(t)]=M(s)$, $\forall\, t\geq s$, 则我们称$\{M(t,\omega)\}_{t\geq 0}$为拟鞅.

定义 1.4 (分数维布朗运动) 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$是一个概率空间, $H\in(0,1)$是一个常数, 具有Hurst参数为H的分数维布朗运动为一个连续的高斯过程$B_H=\{B_H(t):t\geq 0\}=\{B_H(t,\omega):t\geq 0,\omega\in\Omega\}$, 且满足:

(i) $B_H(0)=\mathsf{E}(B_H(t))=0$, $(t>0)$;

(ii) $\mathsf{E}[(B_H(t)B_H(s)]=(t^{2H}-s^{2H}-|t-s|^{2H})/2$.

由定义1.3和1.4我们不难证明有如下定理:

定理 1.1 如下结论成立

(1) $B_H(t)$是拟鞅;

(2) 设$f\in L_\phi^2(\mathbb{R})$, 则$\varepsilon(t):=\exp\Big(\displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_H(s)-|f(s)\chi_{\{0\leq s\leq t\}}|_\phi^2/2\Big)$是拟鞅;

(3) 设$f\in L_\phi^{1,2}(\mathbb{R})$, 则$X(t)=\displaystyle\int_0^t f(s,\omega)\mathrm{d}B_H(s)$是拟鞅.

利率对金融衍生品的定价有重要影响, 尤其在浮动利率代替固定利率后, 这种影响进一步加深. 从时间上看, 利率也具有分数维布朗运动的特点, 因此, 可以使用分数维布朗运动来描述利率变化过程. 最近, 黄文礼, 陶祥兴和李胜宏(2012)研究了分数维Vasicek利率模型下的欧式期权定价问题. 我们采用他们的符号, 考虑如下分数维Vasicek利率模型:

$$\mathrm{d}r_s=a(b-r_s)\mathrm{d}s+\sigma\mathrm{d}B_H(s), \tag{1.4}$$

其中$\{B_H(s):s\geq 0\}$是分数维布朗运动, 用来刻画市场风险, σ是标准差, 用来刻画随机波动率的大小, 参数b称为利率的长期平均水平, 参数a表示恢复速度, 其作用是控制着利率r_t从偏离长期平均水平b的值又回归到b的快慢. 它有如下形式的解:

$$r_s=b+(r_0-b)\mathrm{e}^{-as}+\sigma\mathrm{e}^{-as}\int_0^s\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}B_H(t), \tag{1.5}$$

其中r_0表示统一利率初值(0时刻值). 公式右端的随机变量$\displaystyle\int_0^s\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}B_H(t)$服从正态分布, 均值为0, 方差为$|\mathrm{e}^{at}\chi_{\{0\leq t\leq s\}}|_\phi^2$, 因此, r_s是均值为$b+(r_0-b)\mathrm{e}^{-as}$, 方差为$\sigma^2\mathrm{e}^{-2as}|\mathrm{e}^{at}\chi_{\{0\leq t\leq s\}}|_\phi^2$的正态随机变量.

在风险管理和衍生品定价中, 随机利率在无风险零息债券的研究中起着非常重要的作用, 为了简化公式, 我们假设无风险零息债券的面值为1美元. 下面的无风险零息债券的价格公式来自黄文礼, 陶祥兴和李胜宏(2012).

定理 1.2 以$P(t,T)$表示到期日为T的无风险零息债券在t时刻的价值, 假设无风险零息债券的面值为1美元, 市场利率满足分数维Vasicek利率模型, 市场风险价格为λ, 则无风险零息债券的价格公式为

$$P(t,T)=\mathrm{e}^{-r_tB(t,T)+A(t,T)}, \tag{1.6}$$

其中

$$A(t,T)=\Big(b-\frac{\lambda}{a}\sigma\Big)B(t,T)+H\sigma^2\int_t^T s^{(2H-1)}B^2(s,T)\mathrm{d}s-\Big(b-\frac{\lambda}{a}\sigma\Big)(T-t),$$
$$B(t,T)=\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}).$$

§2. 风险债券的定价

Davis和Lo (2001)提出了传染模型, 对违约强度建模. 当一个公司违约后, 其相关公司的违约强度会有跳跃, 这是已有的结构模型所不能解释的. 后来, Jarrow和Yu (2001)利用这种传染模型来刻画交易对手间的风险, 提出了原生–从生模型和环形违约模型, 并在市场利率是Vasicek利率的情况下对债券和CDS进行了定价. 最近, Hao和Ye (2011a, 2011b)进一步假设市场利率服从跳扩散过程, 且交易对手的传染有衰减效应时, 给出了债券和CDS的价格. 接下来, 我们将在已有研究成果的基础上讨论分数维Vasicek利率下债券和CDS的定价问题.

我们只考虑两个公司的情况, 在原生–从生模型下, 不妨设为原生公司A和从生公司B, Jarrow和Yu (2001)假设原生公司的违约只与宏观状态变量有关, 违约强度如下

$$\lambda_t^A=a_1+a_2r_t, \tag{2.1}$$

从生公司B的违约依赖原生公司和宏观状态变量, 违约强度如下

$$\lambda_t^B=b_1++b_2r_t+b_3 1_{\{\tau^A\le t\}}, \tag{2.2}$$

其中a_1, a_2, b_1, b_2为正数, $1_{\{\tau^A\le t\}}$表示示性函数, b_3为使得λ_t^A, λ_t^B大于0的实数. 为了求出风险债券的价格, 我们不加证明地给出如下引理, 详情可参考Jarrow和Yu (2001).

引理 2.1 假设公司i发行面值为1美元, 到期日为T的零息债券, 债券按面值回收, 回收率为β, 违约时间为τ^i, 违约强度为λ_t^i, 无风险利率为r_t, 则风险零息债券价格为

$$V^i(t,T)=\beta^iP(t,T)+(1-\beta^i)\mathsf{E}_t\Big[\exp\Big(-\int_t^T(r_s+\lambda_s^i)\mathrm{d}s\Big)\Big],\qquad t\le T. \tag{2.3}$$

我们假设市场短期利率r_t是唯一的宏观状态变量. 我们考虑两个公司的情况, 公司A、B分别发行面值为1美元、到期日为T的零息债券, 债券按面值回收. 为简单起见, 假设债券的回收率为0, 违约时间分别为τ^A, τ^B, 违约强度为λ_t^A, λ_t^B. 我们首先来推导原生–从生违约模型下风险零息债券的定价公式, 有如下定理.

定理 2.1 假设市场利率满足分数维Vasicek模型, 公司A、B的违约强度λ_t^A、λ_t^B满足(2.1)和(2.2), 如果到t时刻为止, 公司A、B均未违约, 则公司A发行的债券在t时刻的价格

为

$$V^A(t,T)=\exp\Big(-a_1(T-t)-(1+a_2)\alpha(t,T)+\frac{1}{2}|f_1(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-\frac{1}{2}|f_1(s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2\Big),\tag{2.4}$$

公司B发行的债券在t时刻的价格为

$$\begin{aligned}&V^B(t,T)\\=\ &\mathrm{e}^{-(b_1+b_3)(T-t)-(b_2+1)\alpha(t,T)+(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}+b_3\mathrm{e}^{-(b_1+b_3)(T-t)}\\&\times\int_t^T\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)s+\beta(t,s,T)+(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2+|g(u,s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2-|g(u,s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中

$$\alpha(t,T)=b(T-t)+\frac{(b-r_0)}{a}(\mathrm{e}^{-aT}-\mathrm{e}^{-at}),\quad \beta(t,s,T)=-(b_2+1)\alpha(t,T)-a_2\alpha(t,s),$$

$$f_1(s,T)=-(1+a_2)\frac{\sigma}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)}),\qquad f_2(s,T)=-(1+b_2)\frac{\sigma}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)}),$$

$$g(u,s,T)=(1+b_2)\frac{\sigma}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})-a_2\frac{\sigma}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)}).$$

证明: 令$R_{t,T}=\int_t^T r_s\mathrm{d}s$, 由于假设$\beta$为0, 由引理2.1知公司$A$发行的可违约债券在$t$时刻的价格为

$$\begin{aligned}V^A(t,T)&=\mathsf{E}_t\Big[\exp\Big(-\int_t^T(r_s+\lambda_s^A)\mathrm{d}s\Big)\Big]\\&=\mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\mathsf{E}_t\Big[\exp\Big(-(a_2+1)\int_t^T r_s\mathrm{d}s\Big)\Big]\\&=\mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\mathsf{E}_t[\exp(-(a_2+1)R_{t,T})],\end{aligned}$$

公司B发行的可违约债券在t时刻的价格为

$$\begin{aligned}V^B(t,T)&=\mathsf{E}_t\Big[\exp\Big(-\int_t^T(r_s+\lambda_s^B)\mathrm{d}s\Big)\Big]\\&=\mathrm{e}^{-b_1(T-t)}\mathsf{E}_t[\exp(-(b_2+1)R_{t,T}-b_3(T-\tau^A)1_{\{\tau^A\le T\}})]\\&=\mathrm{e}^{-b_1(T-t)}\mathsf{E}_t[\exp(-(b_2+1)R_{t,T})\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-b_3(T-\tau^A)1_{\{\tau^A\le T\}}}]].\end{aligned}$$

由公式(1.2)可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-b_3(T-\tau^A)1_{\{\tau^A\le T\}}}]&=\Big(\int_t^T+\int_T^\infty\Big)\mathrm{e}^{-b_3(T-s)1_{\{s\le T\}}}\mathrm{d}(1-\mathrm{e}^{-a_1(s-t)-a_2R_{t,s}})\\&=\int_t^T\mathrm{e}^{-b_3(T-s)}\mathrm{d}(1-\mathrm{e}^{-a_1(s-t)-a_2R_{t,s}})+\int_T^\infty 1\mathrm{d}(1-\mathrm{e}^{-a_1(s-t)-a_2R_{t,s}})\\&=\mathrm{e}^{-b_3(T-t)}+b_3\int_t^T\mathrm{e}^{-a_1(s-t)-b_3(T-s)-a_2R_{t,s}}\mathrm{d}s\\&=\mathrm{e}^{-b_3(T-t)}\Big(1+b_3\int_t^T\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)(s-t)-a_2R_{t,s}}\mathrm{d}s\Big),\end{aligned}$$

所以

$$V^B(t,T)=\mathrm{e}^{-(b_1+b_3)(T-t)}\Big(\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+b_2)R_{t,T}}]+b_3\int_t^T\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)s}\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+b_2)R_{t,T}-a_2R_{t,s}}]\mathrm{d}s\Big).$$

观察$V^A(t,T)$和$V^B(t,T)$的表达式, 我们可以看出, 关键是求出公式中的拟条件期望. 由公式(1.5)得

$$\begin{aligned}R_{t,T}&=\int_t^T(b+(r_0-b)\mathrm{e}^{-as})\mathrm{d}s+\int_t^T\sigma\mathrm{e}^{-as}\int_0^s\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}B_H(t)\mathrm{d}s\\&=\alpha(t,T)+\frac{\sigma}{a}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)})\mathrm{d}B_H(s),\end{aligned}$$

代入$\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+a_2)R_{t,T}}]$, 并利用定理1.1中的(2)和拟鞅的定义得

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+a_2)R_{t,T}}]\\=&\ \mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+a_2)\alpha(t,T)-(1+a_2)(\sigma/a)\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)})\mathrm{d}B_H(s)}\big]\\=&\ \mathrm{e}^{-(1+a_2)\alpha(t,T)+(1+a_2)(\sigma/a)\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)})\mathrm{d}B_H(s)}\\&\cdot\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+a_2)(\sigma/a)\int_0^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)})\mathrm{d}B_H(s)}\big]\\=&\ \mathrm{e}^{-(1+a_2)\alpha(t,T)+(|f_1(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_1(s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}.\end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+a_2)(\sigma/a)\int_0^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-s)})\mathrm{d}B_H(s)}\big]\\=&\ \mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{\int_0^T f_1(s,T)\mathrm{d}B_H(s)}\big]\\=&\ \mathrm{e}^{|f_1(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2/2}\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{\int_0^T f_1(s,T)\mathrm{d}B_H(s)-|f_1(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2/2}\big]\\=&\ \mathrm{e}^{(|f_1(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_1(s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2+\int_0^t f_1(s,T)\mathrm{d}B_H(s)}.\end{aligned}$$

同理

$$\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+b_2)R_{t,T}}]=\mathrm{e}^{-(1+b_2)\alpha(t,T)+(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}.$$

相应地

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+b_2)R_{t,T}-a_2R_{t,s}}]\\=&\ \mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+b_2)(\alpha(t,T)+(\sigma/a)\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u))}\\&\cdot\mathrm{e}^{-a_2(\alpha(t,s)+(\sigma/a)\int_t^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u))}\big]\\=&\ \mathrm{e}^{\beta(t,s,T)}\mathrm{e}^{(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)+a_2(\sigma/a)\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\\&\cdot\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\mathrm{e}^{-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\big].\end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{-(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\cdot\mathrm{e}^{-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\big]\\
=\ &\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\\
&\cdot\mathsf{E}_s\big[\mathrm{e}^{-(b_2+1)(\sigma/a)\int_s^T(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\big]\big]\\
=\ &\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\\
&\cdot\mathrm{e}^{(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2)/2}\big].
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\big]\\
=:\ &\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{\int_0^s g(u,s,T)\mathrm{d}B_H(u)}\big]\\
=\ &\mathrm{e}^{(|g(u,s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2-|g(u,s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}\mathrm{e}^{\int_0^t g(u,s,T)\mathrm{d}B_H(u)}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_t[\mathrm{e}^{-(1+b_2)R_{t,T}-a_2R_{t,s}}]\\
=\ &\mathrm{e}^{\beta(t,s,T)+(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2)/2}\\
&\cdot\mathrm{e}^{-(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)+a_2(\sigma/a)\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\\
&\cdot\mathsf{E}_t\big[\mathrm{e}^{(1+b_2)(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(T-u)})\mathrm{d}B_H(u)-a_2(\sigma/a)\int_0^s(1-\mathrm{e}^{-a(s-u)})\mathrm{d}B_H(u)}\big]\\
=\ &\mathrm{e}^{\beta(t,s,T)+(|f_2(s,T)\chi_{[0,T]}|_\phi^2-|f_2(s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2+|g(u,s,T)\chi_{[0,s]}|_\phi^2-|g(u,s,T)\chi_{[0,t]}|_\phi^2)/2}.
\end{aligned}$$

将以上三个期望值带入$V^A(t,T)$, $V^B(t,T)$即得结论. $\square$

§3. 违约与利率相关时CDS的定价

假设公司C持有公司A发行的零息债券, 债券到期日为T. 为了转移风险, 公司C与公司B签订一份到期日为T_1 $(T_1<T)$的合同, 不妨认为公司B是保险公司. 合同规定公司C向公司B定期缴纳保费, 一旦公司A在T_1前发生违约, 公司B补偿由公司A违约导致的公司C的损失. 本节假设违约都与宏观状态变量相关, CDS的买方公司C不发生违约, 债券的发行公司A和CDS的卖方保险公司B可能发生违约. 假设公司A发行的债券面值为1美元, 回收率为0. 公司C向公司B定期交的保费为c, 若公司A发生违约, 公司B赔付给公司C 1美元, 若公司A不违约, 公司B赔付给公司C 0美元. 由无套利原理, 公司C向公司B定期交的保费在0时刻的价值等于公司A发生违约时公司B给公司C的赔付在0时刻的价值, 由此我们可以得到CDS的价格如下

$$c=\frac{\mathsf{E}\big[1_{\{\tau^A<T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1}r_u\mathrm{d}u}1_{\{\tau^B>T_1\}}\big]}{\mathsf{E}\Big[\displaystyle\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]}. \tag{3.1}$$

定理 3.1 假设市场利率服从分数维Vasicek利率模型, 公司A和公司B的违约强度为

$$\lambda_t^A = a_1 + a_2 r_t, \qquad \lambda_t^B = b_1 + b_2 r_t + b_3 1_{\{\tau^A \le t\}}.$$

如果到t时刻公司A和公司B没有发生违约事件, 则CDS的互换率为

$$c = \frac{V^B(0,T_1) - \mathrm{e}^{-(a_1+b_1)T_1-(1+a_1+b_1)\alpha(0,T)+|g(u,s,T_1)\chi_{[0,T_1]}|_\phi^2/2}}{\displaystyle\int_0^{T_1} P(0,s)\mathrm{d}s}, \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned} V^B(0,T_1) &= \mathrm{e}^{-(b_1+b_3)T_1-(b_2+1)\alpha(0,T_1)+|f(s,T_1)\chi_{[0,T_1]}|_\phi^2/2} + b_3\mathrm{e}^{-(b_1+b_3)T_1} \\ &\quad \times \int_t^{T_1} \mathrm{e}^{-(a_1-b_3)s+\beta(0,s,T_1)+(|f_2(s,T_1)\chi_{[0,T_1]}|_\phi^2+|g(u,s,T_1)\chi_{[0,T_1]}|_\phi^2)/2}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\mathsf{E}\big[1_{\{\tau^A<T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}1_{\{\tau^B>T_1\}}\big]}{\mathsf{E}\Big[\displaystyle\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]} \\ &= \frac{\mathsf{E}\big[1_{\{\tau^B>T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}\big] - \mathsf{E}\big[1_{\{\tau^B>T_1\}}1_{\{\tau^A>T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}\big]}{\mathsf{E}\Big[\displaystyle\int_0^{T_1}\mathrm{e}^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\Big]} \\ &= \frac{\mathsf{E}\big[\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}[1_{\{\tau^B>T_1\}}|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}_{T*}^r]\big] - \mathsf{E}\big[1_{\{\tau^B>T_1\}}1_{\{\tau^A>T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}\big]}{\displaystyle\int_0^{T_1}\mathsf{E}\big[\mathrm{e}^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\big]\mathrm{d}s} \\ &= \frac{V^B(0,T_1) - \mathsf{E}\big[\mathsf{E}[1_{\{\tau^B>T_1\}}|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{F}_{T*}^r]1_{\{\tau^A>T_1\}}\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1} r_u\mathrm{d}u}\big]}{\displaystyle\int_0^{T_1}\mathsf{E}\big[\mathrm{e}^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\big]\mathrm{d}s} \\ &= \frac{V^B(0,T_1) - \mathsf{E}\big[\mathrm{e}^{-\int_0^{T_1}(r_u+\lambda_u^B)\mathrm{d}u}\big]}{\displaystyle\int_0^{T_1}P(0,s)\mathrm{d}s} \\ &= \frac{V^B(0,T_1) - \mathsf{E}\big[1_{\{\tau^A>T_1\}}\mathrm{e}^{-b_1T_1-(1+b_2)R_{0,T_1}-b_3T_1 1_{\{\tau^A<T_1\}}}\big]}{\displaystyle\int_0^{T_1}P(0,s)\mathrm{d}s} \\ &= \frac{V^B(0,T_1) - \mathrm{e}^{-(a_1+b_1)T_1-(1+a_1+b_1)\alpha(0,T)+|g(u,s,T_1)\chi_{[0,T_1]}|_\phi^2/2}}{\displaystyle\int_0^{T_1}P(0,s)\mathrm{d}s}, \end{aligned}$$

其中$V^B(0,T_1)$, $P(0,s)$分别由定理2.1和定理1.2得到. □

§4. 总 结

本文在原生–从生模型下考虑了CDS的定价问题, 得到了相应的结论. 实际上, 公司A和公司B有违约风险时, 他们的违约强度可能有四种情况, 我们只推导了公司A是原生公司, 公司B是从生公司的情形, 对于公司A是从生公司, 公司B是原生公司和公司A, B的违约是条件独立的情形, 我们可以用文中类似的推导过程给出相应的风险债券和CDS的价格. 对于环形违约模型, 由于情况比较复杂, 我们将另外详细讨论.

参 考 文 献

[1] Jarrow, R.A. and Turnbull, S.M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50(1)**(1995), 53–85.

[2] Duffie, D. and Singleton, K.J., Modeling term structures of defaultable bonds, *The Review of Financial Studies*, **12(4)**(1999), 687–720.

[3] Lando, D., On Cox processes and credit risky securities, *Review of Derivatives Research*, **2(2-3)**(1998), 99–120.

[4] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K., Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions, *Econometrica*, **68(6)**(2000), 1343–1376.

[5] Lin, S.J., Stochastic analysis of fractional Brownian motions, *Stochastics and Stochastic Reports*, **55(1-2)**(1995), 121–140.

[6] Rogers, L.C.G., Arbitrage with fractional Brownian motion, *Mathematical Finance*, **7(1)**(1997), 95–105.

[7] Hu, Y.Z. and Øksendal, B., Fractional white noise calculus and applications to finance, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **6(1)**(2003), 1–32.

[8] Duncan, T.E., Hu, Y.Z. and Pasik-Duncan, B., Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. theory, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **38(2)**(2000), 582–612.

[9] 黄文礼, 陶祥兴, 李胜宏, 分数维Vasicek利率模型下的欧式期权定价公式, *数学学报(中文版)*, **55(2)**(2012), 219–230.

[10] Davis, M. and Lo, V., Infectious defaults, *Quantitative Finance*, **1(4)**(2001), 382–387.

[11] Jarrow, R.A. and Yu, F., Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *Journal of Finance*, **56(5)**(2001), 1765–1799.

[12] Hao, R.L. and Ye, Z.X., The intensity model for pricing credit securities with jump diffusion and counterparty risk, *Mathematical Problems in Engineering*, **2011**(2011a), 1–16.

[13] Hao, R.L. and Ye, Z.X., Pricing CDS with jump-diffusion risk in the intensity-based model, *Advances in Intelligent and Soft Computing*, **100**(2011b), 221–229.

[14] Hao, R.L., Liu, Y.H. and Wang, S.B., Pricing credit default swap under fractional Vasicek interest rate model, *Journal of Mathematical Finance*, **4(1)**(2014), 10–20.

[15] 叶中行, 庄瑞鑫, 总收益互换定价, *应用概率统计*, **28(1)**(2012), 79-86.

Pricing CDS under Fractional Vasicek Interest Rate Model

Liu Yonghui[1,3] Hao Ruili[2,3] Wang Shoubai[4]

([1] *School of Business Information Management, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai, 201620*)

([2] *Post-Doctoral Station of Applied Economics, Fudan University, Shanghai, 200433*)

([3] *Department of Applied Mathematics, Shanghai Finance University, Shanghai, 201209*)

([4] *Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai, 200433*)

In this paper, the pricing problem of CDS with the interest rate risk and contagious risk is investigated. The interest rate satisfies the fractional Vasicek interest rate model. We model the firm's default intensity. We derive the pricing formula of risky bonds when the default is correlated with interest rate and get the price of CDS.

Keywords: Fractional Vasicek interest rate model, risky bonds, contagious model, pricing CDS.

AMS Subject Classification: 35J99, 60H40, 90C32.