二叉树上分支马氏链的等价性质 *

党 慧
(上海交通大学数学系, 上海, 200240)

杨卫国
(江苏大学理学院, 镇江, 212013)

摘 要

本文给出了二叉树上分支马氏链定义的离散形式, 然后研究了它的两个等价性质. 最后, 我们指出在二叉树情况下, 树指标马氏链就是一类特殊的分支马氏链.

关键词: 二叉树, 分支马氏链, 树指标马氏链.

学科分类号: O211.6.

§1. 引 言

树图T是一个没有回路的连通图, 对于任意两个顶点$\sigma \neq t \in T$, 设$\overline{\sigma t}$是连接σ与t的唯一路径, 路径$\overline{\sigma t}$中含有的边数记为$d(\sigma, t)$, 称为σ到t的距离. 设T是一个以o为根顶点的局部有限的无限树图. 对于T中的任意两个顶点σ, t, 如果σ是处在从根顶点o到t的唯一路径上, 则记为$\sigma \leq t$. 我们用$\sigma \wedge t$表示同时满足$\sigma \wedge t \leq t$与$\sigma \wedge t \leq \sigma$的离$o$最远的顶点. 对于$T$上的任一顶点$t$, $|t|$表示o和t之间的距离. 一个顶点如果其与根顶点的距离为n, 则称该顶点位于第n层上. L_n表示T的第n层上所有顶点的子图, L_n^m表示T的含有从n层到m层的所有顶点的子图, 特别$T^{(n)} = L_0^n$表示T的含有从0层(根)到n层的所有顶点子图. 如果树图T的根顶点有N个相邻顶点, 而其他顶点有$N+1$个相邻顶点, 我们称此树为Cayley树, 记为$T_{C,N}$. 对于Cayley树$T_{C,N}$上的每一个顶点t, 在它的下一层都有N个相邻顶点, 我们称这N个顶点为t的子代, t为这N个顶点的父代. 对$\forall t \in T_{C,N}$, 记1_t为t的父代. 本文我们主要研究二叉树$T_{C,2}$ (见图1), 为了方便, 我们将$T_{C,2}$简记为T_2. 对于二叉树上任一顶点t, 记t^1, t^2为t的两个子代.

设$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$为一概率空间, $\{X_t, t \in T_2\}$为定义在$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$上的树指标随机过程, 设$A$为$T_2$的子图, 记$X^A = \{X_t, t \in A\}$, 用$|A|$表示$A$中顶点的个数, x^A表示X^A的实现.

树指标随机过程是近年来发展起来的概率论的一个新的研究方向. Guyon (2007)定义了在任意状态空间取值的二叉树上分支马氏链, 并研究了其极限定理. Benjamini和Peres (1994)给出了树指标马氏链的定义并研究其常返性及角常返性. Berger和Ye (1990)研究了齐次树上某些平稳随机场的熵率. Yang (2003)研究了齐次树指标有限状态马氏链的强大数

*国家自然科学基金(11071104)资助.
本文2013年4月18日收到, 2014年6月12日收到修改稿.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.05.005

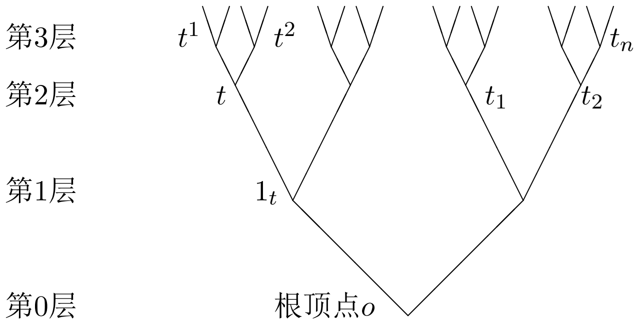

图1 二叉树$T_{C,2}$

定理和渐近均分性(AEP). Yang和Ye (2007)研究了齐次树指标层非齐次马氏链的强大数定理和渐近均分性(AEP). Huang和Yang (2008)研究了一致有界树指标马氏链的强大数定理和渐近均分性(AEP). 陈晓雪, 杨卫国和王豹(2012)研究了树指标马氏链的等价定义.

本文的目的是给出二叉树上分支马氏链定义的离散形式, 然后研究它的两个等价性质, 最后, 我们指出在二叉树情况下, 树指标马氏链就是一类特殊的分支马氏链.

§2. 主要结果

定义 2.1 (二叉树上分支马氏链) 设T_2为二叉树, $\{X_t, t\in T_2\}$是定义在概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}\}$上在$S=\{1,2,\ldots,N\}$中取值的随机变量集合, 设$p=\{p(x), x\in S\}$是$S$上一概率分布, $P=(P(y_1,y_2\,|\,x))$是定义在$S\times S^2$上的一随机矩阵(满足$P(y_1,y_2\,|\,x)\ge 0$, $\forall\, y_1,y_2,x\in S$, 及$\sum\limits_{y_1}\sum\limits_{y_2}P(y_1,y_2\,|\,x)=1$, $\forall\, x\in S$). 如果对$\forall\, n\ge 0$, 有

$$\mathsf{P}\big(X^{L_{n+1}}=x^{L_{n+1}}\,|\,X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)=\prod_{t\in L_n}P(x_{t^1},x_{t^2}\,|\,x_t), \tag{2.1}$$

及

$$\mathsf{P}(X_o=x)=p(x), \qquad \forall\, x\in S, \tag{2.2}$$

则称$\{X_t, t\in T_2\}$为具有初始分布p与随机矩阵P在S中取值的二叉树上分支马氏链.

注记 1 由定义2.1知本文给出的二叉树上分支马氏链是Guyon (2007)中在一般状态空间取值的二叉树上分支马氏链的离散形式.

定理 2.1 设T_2为二叉树, $S=\{1,2,\ldots,N\}$为一有限状态空间, $\{X_t, t\in T_2\}$为定义在概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}\}$上在$S$中取值的随机变量集合, 则以下三条等价:

(i) $\{X_t, t\in T_2\}$是在S中取值的二叉树上分支马氏链;

(ii) 对$\forall\, n\ge 1$且$\forall\, x^{T^{(n)}}\in S^{T^{(n)}}$, 有

$$\mathsf{P}\big(X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)=p(x_o)\prod_{t\in T^{(n-1)}}P(x_{t^1},x_{t^2}\,|\,x_t); \tag{2.3}$$

(iii) 对$\forall n \geq 1$, 及$t, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T_2$, $t_i \wedge t^1 \leq t$, 且$t_i \wedge t^2 \leq t$, $1 \leq i \leq n$, 有

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(X_{t^1} = y_1, X_{t^2} = y_2 \,|\, X_t = x, X_{t_1} = x_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = x_{t_n}) \\ = & \ \mathsf{P}(X_{t^1} = y_1, X_{t^2} = y_2 \,|\, X_t = x) \\ = & \ P(y_1, y_2 \,|\, x), \qquad x, y_1, y_2 \in S, \end{aligned} \tag{2.4}$$

及

$$\mathsf{P}(X_o = x) = p(x), \qquad \forall x \in S. \tag{2.5}$$

证明: (i)$\Longrightarrow$(ii) 由(2.1), (2.2)及条件概率的乘法公式有

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}\big) &= \mathsf{P}\big(X_o = x_o, X^{L_1} = x^{L_1}, X^{L_2} = x^{L_2}, \ldots, X^{L_n} = x^{L_n}\big) \\ &= \mathsf{P}(X_o = x_o) \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big(X^{L_i} = x^{L_i} \,|\, X^{T^{(i-1)}} = x^{T^{(i-1)}}\big) \\ &= p(x_o) \prod_{i=1}^{n} \prod_{t \in L_{i-1}} P(x_{t^1}, x_{t^2} \,|\, x_t) \\ &= p(x_o) \prod_{t \in T^{(n-1)}} P(x_{t^1}, x_{t^2} \,|\, x_t), \end{aligned}$$

于是(2.3)成立.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 假设(2.3)成立, 显然(2.5)成立, 下面我们证(2.4)成立.

(a) 设N为一实数, $t, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T^{(N)}$满足$t_i \wedge t^1 \leq t$, 且$t_i \wedge t^2 \leq t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 且这$n+1$个顶点均不为根顶点, 由(2.3)知

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(X_{t^1} = x_{t^1}, X_{t^2} = x_{t^2}, X_t = x_t, X_{t_1} = x_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = x_{t_n}) \\ = & \sum_{x_o, x_{i^1}, x_{i^2} : i^1, i^2 \in T^{(N+1)} \setminus \{t^1, t^2, t, t_1, \ldots, t_n\}} p(x_o) \prod_{i \in T^{(N)}} P(x_{i^1}, x_{i^2} \,|\, x_i) \\ = & \ P(x_{t^1}, x_{t^2} \,|\, x_t) \sum_{\substack{x_o, x_{i^1}, x_{i^2} : i^1, i^2 \in T^{(N+1)} \setminus \{t, t_1, \ldots, t_n\} \\ i^1 \wedge t^1 \leq t,\, i^1 \wedge t^2 \leq t \\ i^2 \wedge t^1 \leq t,\, i^2 \wedge t^2 \leq t}} p(x_o) \prod_{\substack{i \in T^{(N)} \\ i^1 \wedge t^1 \leq t,\, i^1 \wedge t^2 \leq t \\ i^2 \wedge t^1 \leq t,\, i^2 \wedge t^2 \leq t}} P(x_{i^1}, x_{i^2} \,|\, x_i), \end{aligned} \tag{2.6}$$

及

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(X_t = x_t, X_{t_1} = x_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = x_{t_n}) \\ = & \sum_{x_o, x_{i^1}, x_{i^2} : i^1, i^2 \in T^{(N+1)} \setminus \{t, t_1, \ldots, t_n\}} p(x_o) \prod_{i \in T^{(N)}} P(x_{i^1}, x_{i^2} \,|\, x_i) \\ = & \sum_{\substack{x_o, x_{i^1}, x_{i^2} : i^1, i^2 \in T^{(N+1)} \setminus \{t, t_1, \ldots, t_n\} \\ i^1 \wedge t^1 \leq t,\, i^1 \wedge t^2 \leq t \\ i^2 \wedge t^1 \leq t,\, i^2 \wedge t^2 \leq t}} p(x_o) \prod_{\substack{i \in T^{(N)} \\ i^1 \wedge t^1 \leq t,\, i^1 \wedge t^2 \leq t \\ i^2 \wedge t^1 \leq t,\, i^2 \wedge t^2 \leq t}} P(x_{i^1}, x_{i^2} \,|\, x_i), \end{aligned} \tag{2.7}$$

由(2.6)及(2.7)知(2.4)成立.

(b) 设$t,t_1,t_2,\ldots,t_n$这$n+1$个顶点中有一个为根顶点, 由(2.3)知

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_{t^1}=x_{t^1},X_{t^2}=x_{t^2},X_t=x_t,X_{t_1}=x_{t_1},\ldots,X_{t_n}=x_{t_n})\\
=&\sum_{x_{i^1},x_{i^2}:i^1,i^2\in T^{(N+1)}\backslash\{t^1,t^2,t,t_1,\ldots,t_n\}}p(x_o)\prod_{i\in T^{(N)}}P(x_{i^1},x_{i^2}\,|\,x_i)\\
=&P(x_{t^1},x_{t^2}\,|\,x_t)\sum_{\substack{x_{i^1},x_{i^2}:i^1,i^2\in T^{(N+1)}\backslash\{t,t_1,\ldots,t_n\}\\ i^1\wedge t^1\le t,\,i^1\wedge t^2\le t\\ i^2\wedge t^1\le t,\,i^2\wedge t^2\le t}}p(x_o)\prod_{\substack{i\in T^{(N)}\\ i^1\wedge t^1\le t,\,i^1\wedge t^2\le t\\ i^2\wedge t^1\le t,\,i^2\wedge t^2\le t}}P(x_{i^1},x_{i^2}\,|\,x_i),
\end{aligned}\tag{2.8}$$

及

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_t=x_t,X_{t_1}=x_{t_1},\ldots,X_{t_n}=x_{t_n})\\
=&\sum_{x_{i^1},x_{i^2}:i^1,i^2\in T^{(N+1)}\backslash\{t,t_1,\ldots,t_n\}}p(x_o)\prod_{i\in T^{(N)}}P(x_{i^1},x_{i^2}\,|\,x_i)\\
=&\sum_{\substack{x_{i^1},x_{i^2}:i^1,i^2\in T^{(N+1)}\backslash\{t,t_1,\ldots,t_n\}\\ i^1\wedge t^1\le t,\,i^1\wedge t^2\le t\\ i^2\wedge t^1\le t,\,i^2\wedge t^2\le t}}p(x_o)\prod_{\substack{i\in T^{(N)}\\ i^1\wedge t^1\le t,\,i^1\wedge t^2\le t\\ i^2\wedge t^1\le t,\,i^2\wedge t^2\le t}}P(x_{i^1},x_{i^2}\,|\,x_i),
\end{aligned}\tag{2.9}$$

这时仍有(2.4)成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i) 对$\forall\,t\in L_n$, $n\ge0$, 由(2.4)及条件概率的乘法公式知

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\big(X^{L_{n+1}}=x^{L_{n+1}}\,|\,X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)\\
=&\mathsf{P}\big(X_{t^1}=x_{t^1},X_{t^2}=x_{t^2},X^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}=x^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}\,|\,X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)\\
=&\mathsf{P}\big(X_{t^1}=x_{t^1},X_{t^2}=x_{t^2}\,|\,X^{T^{(n+1)}\backslash\{t^1,t^2\}}=x^{T^{(n+1)}\backslash\{t^1,t^2\}}\big)\\
&\cdot\mathsf{P}\big(X^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}=x^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}\,|\,X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)\\
=&\mathsf{P}(X_{t^1}=x_{t^1},X_{t^2}=x_{t^2}\,|\,X_t=x_t)\mathsf{P}\big(X^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}=x^{L_{n+1}\backslash\{t^1,t^2\}}\,|\,X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}}\big)\\
=&\cdots\\
=&\prod_{t\in L_n}P(x_{t^1},x_{t^2}\,|\,x_t),
\end{aligned}$$

于是(2.1)成立. 定理证毕. □

定义 2.2 (Benjamini和Peres, 1994, 树指标马氏链) 设T是一局部有限的无限树, $S=\{1,2,\ldots,N\}$为一有限状态空间, $\{X_t,t\in T\}$为定义在概率空间$\{\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P}\}$上在$S$中取值的随机变量集合, 设$p=\{p(x),x\in S\}$是$S$上一概率分布, $Q=(Q(y\,|\,x))$是定义在$S\times S$上的一转移矩阵. 如果对$\forall\,n\ge1$, 及$t,t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, $t_i\wedge t\le 1_t$, $1\le i\le n$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_t=y\,|\,X_{1_t}=x,X_{t_1}=x_{t_1},\ldots,X_{t_n}=x_{t_n})\\
=&\mathsf{P}(X_t=y\,|\,X_{1_t}=x)\\
=&Q(y\,|\,x),\qquad x,y\in S,
\end{aligned}\tag{2.10}$$

及

$$\mathsf{P}(X_o = x) = p(x), \qquad \forall\, x \in S, \tag{2.11}$$

则称$\{X_t, t \in T\}$为具有初始分布p与转移矩阵Q在S上取值的树指标马氏链.

引理 2.1 (陈晓雪, 杨卫国和王豹, 2012)　设T为一局部有限的无限树, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$为一有限状态空间, $\{X_t, t \in T\}$为定义在概率空间$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}\}$上在$S$中取值的随机变量集合, 则下列叙述是等价的:

(1) $\{X_t, t \in T\}$是由定义2.2定义的树指标马氏链;

(2) $\forall\, x^{T^{(n)}} \in S^{T^{(n)}}$, 有

$$\mathsf{P}\big(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}\big) = p(x_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} Q(x_t \,|\, x_{1_t}).$$

注记 2　如果T为二叉树T_2, 则$\{X_t, t \in T_2\}$为具有初始分布p与转移矩阵Q的树指标马氏链 $\Longleftrightarrow \forall\, x^{T^{(n)}} \in S^{T^{(n)}}$, 有

$$\mathsf{P}\big(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}\big) = p(x_o) \prod_{t \in T^{(n-1)}} Q(x_{t^1} \,|\, x_t) Q(x_{t^2} \,|\, x_t). \tag{2.12}$$

证明:　若树T为二叉树, 则

$$\prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} Q(x_t \,|\, x_{1_t}) = \prod_{t \in T^{(n-1)}} Q(x_{t^1} \,|\, x_t) Q(x_{t^2} \,|\, x_t),$$

再由引理2.1可知本注记成立.　　□

定理 2.2　设$\{X_t, t \in T_2\}$是由定义2.1定义的二叉树上分支马氏链, 其随机矩阵$P = (P(y_1, y_2 \,|\, x))$, $x, y_1, y_2 \in S$, 如果存在转移矩阵$Q = (Q(y \,|\, x))$, $x, y \in S$, 使得$P(y_1, y_2 \,|\, x) = Q(y_1 \,|\, x) Q(y_2 \,|\, x)$, 则$\{X_t, t \in T_2\}$是树指标马氏链, 其转移矩阵为Q. 反过来, 设$\{X_t, t \in T_2\}$是由定义2.2定义的树指标马氏链, 其转移矩阵$Q = (Q(y \,|\, x))$, $x, y \in S$, 则$\{X_t, t \in T_2\}$是二叉树上分支马氏链, 其随机矩阵$P = (P(y_1, y_2 \,|\, x))$, 其中$P(y_1, y_2 \,|\, x) = Q(y_1 \,|\, x) Q(y_2 \,|\, x)$, $x, y_1, y_2 \in S$.

证明:　由定理2.1的(i), (ii)及注记2可推得本定理.　　□

研究二叉树上分支马氏链不仅有较高的理论意义, 同时也具有较好的应用价值. 例如, Guyon (2007)利用如下数学模型研究了大肠杆菌的增长率问题, 记X_i为大肠杆菌i的增长率, $2n$为父代大肠杆菌n的新极子代, $2n+1$为旧极子代, 令X_1为初始大肠杆菌的增长率, 初始分布为v, 则对$\forall\, n \geq 1$, 有

$$\begin{cases} X_{2n} = \alpha_0 X_n + \beta_0 + \varepsilon_{2n}; \\ X_{2n+1} = \alpha_1 X_n + \beta_1 + \varepsilon_{2n+1}, \end{cases}$$

其中$\alpha_0, \alpha_1 \in (-1,1)$, $\beta_0, \beta_1 \in R$, $(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n+1}) \sim N_2(0,\Gamma)$, $\Gamma = \sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 > 0$, $\rho \in (-1,1)$. Guyon (2007)中定义的在一般状态空间取值的二叉树上分支马氏链是上述模型的推广, 本文研究的离散形式二叉树上分支马氏链是Guyon (2007)中在一般状态空间取值的二叉树上分支马氏链的特例.

参 考 文 献

[1] Guyon, J., Limit theorems for bifurcating Markov chains: application to the detection of cellular aging, *The Annals of Applied Probability*, **17(5/6)**(2007), 1538–1569.

[2] Benjamini, I. and Peres, Y., Markov chains indexed by trees, *The Annals of Probability*, **22(1)**(1994), 219–243.

[3] Berger, T. and Ye, Z., Entropic aspects of random fields on trees, *IEEE Transactions on Information Theory*, **36(5)**(1990), 1006–1018.

[4] Yang, W.G., Some limit properties for Markov chains indexed by a homogeneous tree, *Statistics and Probability Letters*, **65(3)**(2003), 241–250.

[5] Yang, W.G. and Ye, Z., The asymptotic equipartition property for nonhomogeneous Markov chains indexed by a homogeneous tree, *IEEE Transactions on Information Theory*, **53(9)**(2007), 3275–3280.

[6] Huang, H.L. and Yang, W.G., Strong law of large numbers for Markov chains indexed by an infinite tree with uniformly bounded degree, *Science in China Series A: Mathematics*, **51(2)**(2008), 195–202.

[7] 陈晓雪, 杨卫国, 王豹, 树指标马氏链的等价定义, 数学研究, **45(4)**(2012), 411–414.

Equivalent Properties of Bifurcating Markov Chains Indexed by a Binary Tree

Dang Hui

(*Department of Mathematics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240*)

Yang Weiguo

(*Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013*)

In this paper, we give the discrete form of the definition of bifurcating Markov chains indexed by a binary tree, and then study the equivalent properties of it. Finally, we prove that tree-indexed Markov chains are bifurcating Markov chains indexed by a binary tree in certain situation.

Keywords: Binary tree, bifurcating Markov chains, tree-indexed Markov chains.

AMS Subject Classification: 60J10.