应用概率统计 第三十一卷
第三期 2015年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.31 No.3 Jun. 2015

LINEX损失下双指数分布位置参数的经验Bayes估计 *

尤 游[1,2] 周 玲[2★]

([1]安徽机电职业技术学院公共基础教学部, 芜湖, 241003)

([2]安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖, 241003)

摘 要

本文对双指数分布在LINEX损失函数下获得了位置参数的Bayes估计, 同时构造了相应的经验Bayes估计, 证明了所提出的经验Bayes估计是渐近最优的, 且有收敛速度$O(n^{-\delta})$, $\delta=(rs-1)/(2s+1)$, 其中$1/2<r<1-1/(2s)$, 而$s\geq 3$是任意给定的整数. 最后给出一个例子说明适合定理条件的先验分布是存在的.

关键词: LINEX损失函数, 双指数分布, 经验Bayes估计, 收敛速度.

学科分类号: O212.2.

§1. 引 言

自1975年Varian (1975)提出了LINEX损失函数以来, 这种损失函数引起了较为广泛的关注. 例如, Zellner (1986)研究了LINEX损失下的Bayes估计和预测问题; Kuo和Dey (1990)研究了LINEX损失下Poisson分布均值线性估计的容许性问题; Huang和Liang (1997)在LINEX损失下研究了一类单边截断型分布的经验Bayes估计问题; Sadooghi-Alvandi (1990)在LINEX损失下研究了Poisson分布参数的估计问题, 等等.

本文在LINEX损失函数下研究双指数分布参数的经验Bayes估计问题. 双指数分布是一类重要的分布, 一些产品的寿命分布都可以用它来刻画, 比如汽车、飞机和水坝的寿命等. 另外, Easterling (1978)在假定测量误差服从双指数分布的前提下, 建立了一个关于蒸汽发生器的监测模型; Hsu (1979)在研究如何使用重尾分布来解决航海中位置误差问题时, 建议采用双指数分布; Dadi和Marks (1987)研究了在双指数分布下监测器的相对效率问题; Bain和Engelhardt (1973)基于双指数分布来分析水文站的洪水资料, 等等. 可见, 双指数分布在实际中有着广泛的应用.

现有文献中, 研究双指数分布参数的经验Bayes估计(EB估计)的却较少. 其中, 丁晓和韦来生(2005)在平方损失函数下讨论了双指数分布位置参数的EB估计问题. 而本文在

---

*安徽省自然科学基金(1308085QA13)资助.

★通讯作者, E-mail: lingzhou1989@163.com.

本文2014年2月28日收到, 2014年11月5日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2015.03.004

LINEX损失函数下研究双指数分布位置参数的EB估计问题, 证明了EB估计的渐近最优性, 同时给出了相应的收敛速度.

考虑具有如下密度函数的双指数分布X:

$$f(x;\theta,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\exp\Big(-\frac{|x-\theta|}{\sigma}\Big),\qquad x\in(-\infty,\infty), \tag{1.1}$$

其中θ和σ分别是位置参数和刻度参数, 且$\theta\in(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$. 为了讨论参数θ的估计问题, 令$\sigma=1$, 则给定θ时, 随机变量X的条件密度为

$$f(x|\theta)=\frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|), \tag{1.2}$$

其中$\theta\in\Omega=(-\infty,+\infty)$, Ω为参数空间.

设$G(\theta)$为θ的先验分布, 但未知, 则随机变量X的边缘密度为

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x-\theta|}\mathrm{d}G(\theta)\\ &=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{\theta-x}\mathrm{d}G(\theta)+\frac{1}{2}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{x-\theta}\mathrm{d}G(\theta). \end{aligned} \tag{1.3}$$

记X的边缘分布函数为$F(x)$, 则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

现考虑如下的LINEX损失函数(参见Varian, 1975):

$$L(\theta,\widehat{\theta})=\mathrm{e}^{c(\widehat{\theta}-\theta)}-c(\widehat{\theta}-\theta)-1, \tag{1.4}$$

其中$|c|<1$为常数.

令$\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}}(x)$表示在损失函数(1.4)下$\theta$的基于$x$的Bayes估计, 则易知

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}}(x)=\frac{1}{c}\log\frac{1}{\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)}.$$

注意到

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)&=\frac{1}{f(x)}\int_{\Theta}\mathrm{e}^{-c\theta}f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)=\frac{1}{f(x)}\int_{\Theta}\mathrm{e}^{-c\theta}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\theta|}\mathrm{d}G(\theta)\\ &=\frac{1}{f(x)}[f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)], \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中最后一个等式利用了下文中的引理3.1, 这里

$$H(x)=\frac{2-c}{2}\int_{-\infty}^{x}c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\mathrm{d}F(t)-\frac{c+2}{2}\int_{x}^{+\infty}c\mathrm{e}^{x-(1+c)t}\mathrm{d}F(t). \tag{1.6}$$

于是

$$\widehat{\theta}_{\rm BE}(x)=\frac{1}{c}\log\frac{f(x)}{f(x){\rm e}^{-cx}+H(x)}\triangleq\frac{1}{c}\log S(x),\tag{1.7}$$

其中

$$S(x)=\frac{1}{\mathsf{E}({\rm e}^{-c\theta}|x)}=\frac{f(x)}{f(x){\rm e}^{-cx}+H(x)}.\tag{1.8}$$

进而, $\widehat{\theta}_{\rm BE}$的Bayes风险为

$$R(G)=R(\widehat{\theta}_{\rm BE},G)=\mathsf{E}_{(X,\theta)}\big[{\rm e}^{c(\widehat{\theta}_{\rm BE}(X)-\theta)}-c(\widehat{\theta}_{\rm BE}(X)-\theta)-1\big].\tag{1.9}$$

由于$G(\theta)$是未知的, 因此Bayes估计实际上无实用价值, 于是我们考虑利用EB方法来构造风险可以任意接近$R(G)$的估计量. 下面先给出构造参数θ的EB估计的过程.

§2. 经验Bayes估计的构造

假设$(X_1,\theta_1),(X_2,\theta_2),\ldots,(X_n,\theta_n)$和$(X,\theta)$为相互独立的随机变量, 其中$X_1,X_2,\ldots,X_n$与$X$具有共同的密度函数$f(x)$; $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$与$\theta$有共同的先验分布$G(\theta)$. 注意样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$和$X$都是可观测的, 而$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$和$\theta$都是不可观测的. 现在我们用经验分布函数

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{[X_i\le x]}$$

作为$F(x)$的估计, 其中$I_{[A]}$表示A的示性函数. 于是由(1.6)所定义的$H(x)$的相应估计量为

$$\begin{aligned}H_n(x)&=\frac{2-c}{2}\int_{-\infty}^{x}c{\rm e}^{(1-c)t-x}{\rm d}F_n(t)-\frac{c+2}{2}\int_{x}^{+\infty}c{\rm e}^{x-(1+c)t}{\rm d}F_n(t)\\&=\frac{c(2-c)}{2n}\sum_{i=1}^{n}{\rm e}^{(1-c)X_i-x}I_{[X_i\le x]}-\frac{c(c+2)}{2n}\sum_{i=1}^{n}{\rm e}^{-(1+c)X_i+x}I_{[X_i>x]}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

对于$f(x)$, 我们采用如下的核估计方法进行估计. 设$K(\cdot)$是有界的Borel可测函数, 在区间$(0,1)$之外取值为零, 且满足:

$$\frac{1}{j!}\int_0^1 t^jK(t){\rm d}t=\begin{cases}1, & j=0;\\0, & j=1,2,\ldots,s-1,\end{cases}$$

此处$s\ge 3$是一给定的整数, 则$f(x)$的核估计定义为

$$f_n(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\Big(\frac{X_i-x}{h_n}\Big),\tag{2.2}$$

其中$h_n>0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$.

由此, 我们定义参数θ的EB估计为

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}(x)=\frac{1}{c}\log\Big[\frac{f_n(x)}{f_n(x)\mathrm{e}^{-cx}+H_n(x)}\Big]_{n^v}\triangleq\frac{1}{c}\log S_n(x). \tag{2.3}$$

此处$0<v<1$待定, 而

$$[b]_L=\begin{cases}b, & 0<b\le L;\\ 1, & \text{else}.\end{cases}$$

若用E_*和E_n分别表示关于$(X_1,X_2,\ldots,X_n,(X,\theta))$以及$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的联合分布求期望, 则$\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}$的全面Bayes风险为

$$R_n=R_n(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}(x),\theta)=\mathsf{E}_*\big[\mathrm{e}^{c(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}(X)-\theta)}-c(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}(X)-\theta)-1\big]. \tag{2.4}$$

设$\mathscr{F}$表示θ的某个先验分布类, 如果对$\forall G\in\mathscr{F}$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=R(G)$, 则称$\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}}$为$\theta$的关于$\mathscr{F}$的渐近最优EB估计. 另外, 若对某个$\delta>0$, $R_n-R(G)=O(n^{-\delta})$, 则称$\{\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}\}$的收敛速度的阶是$O(n^{-\delta})$.

§3.　引理及其证明

以下用$c_1,c_2,\ldots$表示不依赖于n的常数, 它们在不同的地方可以表示不同的值, 即使在同一表达式中也是如此. 当然, 它们区别与LINEX损失函数(1.4)中的c. 为获得EB估计的收敛速度, 需要下面的一些引理.

引理 3.1　若$f(x)>0$, 则θ的Bayes估计可表示为

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}}(x)=\frac{1}{c}\log\frac{f(x)}{f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)},$$

其中$H(x)$由(1.6)给出.

证明:　我们仅需证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}\cdot\frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|)\mathrm{d}G(\theta)=f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x).$$

记

$$\begin{aligned}H(x)&=\frac{2-c}{2}\int_{-\infty}^{x}c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\mathrm{d}F(t)-\frac{c+2}{2}\int_{x}^{+\infty}c\mathrm{e}^{x-(1+c)t}\mathrm{d}F(t)\\&\triangleq H_1(x)-H_2(x).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= \frac{2-c}{2}\int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t-\theta|}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2-c}{2}\Big[\int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-t}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{t}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t\Big] \\
&\triangleq \frac{2-c}{2}[H_{11}(x)+H_{12}(x)],
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
H_{11}(x) &= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}c\mathrm{e}^{\theta-x}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-ct}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}c\mathrm{e}^{\theta-x}\Big(\int_{\theta}^{x}\mathrm{e}^{-ct}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}G(\theta) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-x}\big(\mathrm{e}^{-c\theta}-\mathrm{e}^{-cx}\big)\mathrm{d}G(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x+(1-c)\theta}\mathrm{d}G(\theta) - \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(1+c)x+\theta}\mathrm{d}G(\theta), \\
H_{12}(x) &= \int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{t}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{t}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} c\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}c\mathrm{e}^{-x-\theta}\Big(\int_{-\infty}^{\theta}\mathrm{e}^{(2-c)t}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}G(\theta) + \int_{x}^{+\infty}\frac{1}{2}c\mathrm{e}^{-x-\theta}\Big(\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{(2-c)t}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}G(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{c}{2(2-c)}\mathrm{e}^{-x+(1-c)\theta}\mathrm{d}G(\theta) + \int_{x}^{+\infty}\frac{c}{2(2-c)}\mathrm{e}^{(1-c)x-\theta}\mathrm{d}G(\theta).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= \frac{2-c}{2}[H_{11}(x)+H_{12}(x)] \\
&= \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x+(1-c)\theta}\mathrm{d}G(\theta) - \int_{-\infty}^{x}\frac{2-c}{4}\mathrm{e}^{-(1+c)x+\theta}\mathrm{d}G(\theta) + \int_{x}^{+\infty}\frac{c}{4}\mathrm{e}^{(1-c)x-\theta}\mathrm{d}G(\theta).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

再令

$$\begin{aligned}
H_2(x) &= \frac{c+2}{2}\int_{x}^{+\infty} c\mathrm{e}^{x-(1+c)t}\mathrm{d}F(t) \\
&= \frac{c+2}{2}\Big[\int_{x}^{+\infty} c\mathrm{e}^{x-(1+c)t}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-t}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} c\mathrm{e}^{x-(1+c)t}\int_{t}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}t\Big] \\
&\triangleq \frac{c+2}{2}[H_{21}(x)+H_{22}(x)].
\end{aligned}$$

类似于H_1, 可得

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{c}{4}\mathrm{e}^{-(1+c)x+\theta}\mathrm{d}G(\theta) - \int_{x}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-(c+1)\theta}\mathrm{d}G(\theta) + \int_{x}^{+\infty}\frac{c+2}{4}\mathrm{e}^{(1-c)x-\theta}\mathrm{d}G(\theta). \tag{3.2}$$

另外,

$$f(x)\mathrm{e}^{-cx}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-(1+c)x}\mathrm{d}G(\theta)+\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1-c)x-\theta}\mathrm{d}G(\theta). \tag{3.3}$$

由(3.1), (3.2)和(3.3), 有

$$\begin{aligned}f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)&=f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H_1(x)-H_2(x)\\&=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-c\theta}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-x}\mathrm{d}G(\theta)+\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}\cdot\frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|)\mathrm{d}G(\theta).\end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.2 (刘荣玄, 2010) 假设$a>0$, $b>0$, 则有

$$\mathrm{e}^{(a-b)}-(a-b)-1\leq(\mathrm{e}^{a}-\mathrm{e}^{b})^2.$$

引理 3.3 在LINEX损失函数下, 有

$$R_n(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}},\theta)-R(\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}},\theta)=\mathsf{E}_X\big\{\mathsf{E}_{X_1,\ldots,X_n|X}\big[\mathrm{e}^{c(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}-\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}})}-c(\widehat{\theta}_{\mathrm{EB}}-\widehat{\theta}_{\mathrm{BE}})-1\big]\big\},$$

其中E_X表示关于X的分布取期望.

证明参见刘荣玄(2010)中的引理2.

引理 3.4 (赵林城, 1981) 设Y和Z为随机变量, y和z为实数, 则对任意$L>0$以及$0<\lambda\leq 2$, 有

$$\mathsf{E}\Big|\Big[\frac{Y}{Z}-\frac{y}{z}\Big]_L\Big|^r\leq 2|z|^{-r}\Big\{\mathsf{E}|Y-y|^r+\Big(\Big|\frac{y}{z}\Big|+L\Big)^r\mathsf{E}|Z-z|^r\Big\}.$$

引理 3.5 设$f(x)$存在任意阶连续导数, $f_n(x)$由(2.2)定义. 又设$0<r\leq 2$, $s\geq 3$为自然数, $X_1,X_2,\ldots,X_n$为i.i.d.样本, 则当$h_n=n^{-1/(2s+1)}$时, 有

$$\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r\leq c_1 n^{-rs/(2s+1)}.$$

证明参见韦来生(1983)引理5.

引理 3.6 设$0<r\leq 2$, 则

$$\mathsf{E}_n|H_n(x)-H(x)|^r\leq c_1 n^{-r/2},$$

其中$H(x)$和$H_n(x)$分别由(1.6)和(2.1)给出.

证明: 记

$$\begin{aligned}H_n(x) &= \frac{c(2-c)}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{(1-c)X_i-x}I_{[X_i\le x]} - \frac{c(c+2)}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-(1+c)X_i+x}I_{[X_i>x]}\\ &= \frac{c}{2n}\sum_{i=1}^{n}\{(2-c)\mathrm{e}^{(1-c)X_i-x}I_{[X_i\le x]}-(c+2)\mathrm{e}^{-(1+c)X_i+x}I_{[X_i>x]}\}\\ &\triangleq \frac{c}{2n}\sum_{i=1}^{n}T_i.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_nH_n(x) &= \mathsf{E}_n\Big(\frac{c}{2n}\sum_{i=1}^{n}T_i\Big) = \frac{c}{2}\mathsf{E}_n(T_1)\\ &= \frac{c}{2}\mathsf{E}_n\big[(2-c)\mathrm{e}^{(1-c)X_1-x}I_{[X_1\le x]}-(c+2)\mathrm{e}^{-(1+c)X_1+x}I_{[X_1>x]}\big]\\ &= \frac{c}{2}\Big[\int_{-\infty}^{x}(2-c)\mathrm{e}^{(1-c)t-x}\mathrm{d}F(t)-\int_{x}^{+\infty}(c+2)\mathrm{e}^{-(1+c)t+x}\mathrm{d}F(t)\Big]\\ &= H(x).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_n|H_n(x)-H(x)|^r &= \mathsf{E}_n[(H_n(x)-H(x))^2]^{r/2} \le [\mathsf{Var}\,(H_n(x))]^{r/2}\\ &= \Big[\frac{c^2}{4n}\mathsf{Var}\,(T_1)\Big]^{r/2} \le \Big[\frac{c^2}{4n}\mathsf{E}(T_1^2)\Big]^{r/2} \le c_1\cdot n^{-r/2}\mathsf{E}(T_1^2).\end{aligned}$$

又因为, 当$0<c<1$时,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(T_1^2) &= \mathsf{E}\big[(2-c)^2\mathrm{e}^{2(1-c)X_1-2x}I_{[X_1\le x]}+(c+2)^2\mathrm{e}^{-2(1+c)X_1+2x}I_{[X_1>x]}\big]\\ &= (2-c)^2\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{2[(1-c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+(c+2)^2\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2[(1+c)t-x]}\mathrm{d}F(t)\\ &= c_1\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{2[(1-c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+c_2\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2[(1+c)t-x]}\mathrm{d}F(t)\\ &= c_1\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2[(1-c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+c_2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2[(1+c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+c_3\\ &\le c_1\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2[(1-c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+c_2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2[(1-c)t-x]}\mathrm{d}F(t)+c_3\\ &= c_1\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2(1-c)[t-x/(1-c)]}\mathrm{d}F(t)+c_2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(1-c)[t-x/(1-c)]}\mathrm{d}F(t)+c_3\\ &= c_1\int_{-\infty}^{x/(1-c)}\mathrm{e}^{2(1-c)[t-x/(1-c)]}\mathrm{d}F(t)+c_2\int_{x/(1-c)}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(1-c)[t-x/(1-c)]}\mathrm{d}F(t)+c_4\\ &\le c_5\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2(1-c)|t-x/(1-c)|}\mathrm{d}F(t)+c_4\\ &\le c_6.\end{aligned}$$

另外, 同理可证, 当$-1 < c \le 0$时, 此结论也成立. 因此,

$$\mathsf{E}_n|H_n(x) - H(x)|^r \le c_1 n^{-r/2}.$$

证毕. □

引理 3.7 设$s \ge 3$为任意给定的整数, $1/2 < r < 1 - 1/(2s)$, 若

$$\mathsf{E}|\theta|^{2rs} < \infty, \qquad \mathsf{E}\mathrm{e}^{-c\theta} < \infty,$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} f^{1-r}(x)\mathrm{d}x < \infty, \\
&\int_{\Omega} f(x)|f(x)\mathrm{e}^{-cx} + H(x)|^{-r}\mathrm{d}x \le c_1 n^{rv}, \\
&\int_{\Omega} f(x)(\mathrm{e}^{-cx})^r|f(x)\mathrm{e}^{-cx} + H(x)|^{-r}\mathrm{d}x < \infty,
\end{aligned}$$

其中$\Omega = \{x : S(x) \le n^v/2\}$.

证明: 第一个结论的证明过程类似于韦来生(1983)的定理2, 故略去. 下证后两个结论.

注意到$1/r > 1$, 由Hölder不等式, 有

$$\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-cX})^r \le \mathsf{E}^r(\mathrm{e}^{-cX}).$$

由于

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-cX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-cx} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-cx} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\theta-x}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-cx} \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-\theta}\mathrm{d}G(\theta)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2(1+c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-c\theta}\mathrm{d}G(\theta) + \frac{1}{2(1-c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-c\theta}\mathrm{d}G(\theta) \\
&= \frac{1}{1-c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-c\theta}\mathrm{d}G(\theta) \\
&= \frac{1}{1-c^2}\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta}) < \infty,
\end{aligned}$$

故$\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-cX})^r < \infty$.

由于$\Omega = \{x : S(x) \le n^v/2\}$, 于是当$x \in \Omega$时, 有

$$[\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)]^{-r} = [S(x)]^r \le 2^{-r}n^{rv}.$$

进而,

$$\int_\Omega f(x)|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)[f(x)\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)]^{-r}\mathrm{d}x \\ \le c_1n^{rv}.$$

另外,

$$\int_\Omega f(x)(\mathrm{e}^{-cx})^r|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathrm{d}x=\int_\Omega f^{1-r}(x)\Big|\frac{f(x)\mathrm{e}^{-cx}}{f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)}\Big|^r\mathrm{d}x \\ =\int_\Omega f^{1-r}(x)\mathrm{d}x \\ <\infty.$$

证毕. □

§4. 主要定理

定理 4.1 对于双指数分布(1.1), $\widehat{\theta}_{\rm BE},\widehat{\theta}_{\rm EB}$分别由(1.7)和(2.3)定义. 设$s\ge 3$为任意给定的整数, $1/2<r<1-1/(2s)$. 如果下列条件满足:

(1) $f(x)$的s阶导数$f^{(s)}(x)$存在, 且$\sup\limits_x|f^{(s)}(x)|<\infty$;

(2) $\mathsf{E}|\theta|^{2rs}<\infty$;

(3) $\mathsf{E}(\mathrm{e}^{2crs\theta})<\infty$, $\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta})<\infty$,

则当$h_n=n^{-1/(2s+1)}$时, 有

$$R_n-R(G)=O\big(n^{-(rs-1)/(2s+1)}\big).$$

证明: 由引理3.2以及(1.7)和(2.3), 有

$$R_n(\widehat{\theta}_{\rm EB},\theta)-R(\widehat{\theta}_{\rm BE},\theta)=\mathsf{E}_X\mathsf{E}_n[\mathrm{e}^{c(\widehat{\theta}_{\rm EB}-\widehat{\theta}_{\rm BE})}-c(\widehat{\theta}_{\rm EB}-\widehat{\theta}_{\rm BE})-1] \\ \le\int_{-\infty}^{+\infty}\mathsf{E}_n(\mathrm{e}^{c\widehat{\theta}_{\rm EB}}-\mathrm{e}^{c\widehat{\theta}_{\rm BE}})^2f(x)\mathrm{d}x \\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\mathsf{E}_n(S_n(x)-S(x))^2f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

令$\Omega=\{x:S(x)\le n^v/2\}$, $\overline{\Omega}=(-\infty,+\infty)-\Omega$. 一方面, 当$x\in\Omega$时, 注意到$|S_n(x)-$

$S(x)| \le 3n^v/2$, 结合引理3.4和$\mathrm{C_r}$不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_n|S_n(x)-S(x)|^2\\
\le{}& (3n^v/2)^{2-r}\cdot \mathsf{E}_n|[S_n(x)-S(x)]_{3n^v/2}|^r\\
\le{}& (3n^v/2)^{2-r}\cdot \mathsf{E}_n\Big|\Big[\frac{f_n(x)}{f_n(x)\mathrm{e}^{-cx}+H_n(x)}-\frac{f(x)}{f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)}\Big]_{3n^v/2}\Big|^r\\
\le{}& (3n^v/2)^{2-r}\cdot 2|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\\
&\cdot\{\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r+(2n^v)^r\mathsf{E}_n|\mathrm{e}^{-cx}(f_n(x)-f(x))+H_n(x)-H(x)|^r\}\\
\le{}& c_1n^{2v}|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\\
&\cdot\{(2n^v)^{-r}\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r+\mathsf{E}_n|\mathrm{e}^{-cx}(f_n(x)-f(x))+H_n(x)-H(x)|^r\}\\
\le{}& c_2n^{2v}(f(x))^{-r}\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r\\
&+c_1n^{2v}|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathsf{E}_n|\mathrm{e}^{-cx}(f_n(x)-f(x))+H_n(x)-H(x)|^r\\
\le{}& c_2n^{2v}(f(x))^{-r}\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r+c_3n^{2v}(\mathrm{e}^{-cx})^r|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^r\\
&+c_4n^{2v}|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathsf{E}_n|H_n(x)-H(x)|^r.
\end{aligned}$$

再由引理3.5, 引理3.6和引理3.7, 只要取$2v-r/2+vr\le 0$, 便有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathsf{E}_n(S_n(x)-S(x))^2f(x)\mathrm{d}x \le{}& c_2n^{2v-rs/(2s+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^{1-r}\mathrm{d}x\\
&+c_3n^{2v-rs/(2s+1)}\int_\Omega f(x)(\mathrm{e}^{-cx})^r|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathrm{d}x\\
&+c_4n^{2v-r/2}\int_\Omega f(x)|f(x)\mathrm{e}^{-cx}+H(x)|^{-r}\mathrm{d}x\\
\le{}& c_5\cdot n^{2v-r/2+vr}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

另一方面, 当$x\in\overline{\Omega}$时, 注意到

$$[S_n(x)-S(x)]^2\le 2S_n^2(x)+2S^2(x)\le 2n^{2v}+2S^2(x)\le 10S^2(x).$$

由Hölder不等式和Markov不等式, 有

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega}}\mathsf{E}_n(S_n(x)-S(x))^2f(x)\mathrm{d}x \le 10\int_{\overline{\Omega}}S^2(x)f(x)\mathrm{d}x ={}& 10\mathsf{E}[S^2(x)I_{\overline{\Omega}}]\\
\le{}& 10\mathsf{E}^{1/(rs)}[S^{2rs}(x)]\cdot\mathsf{E}^{(rs-1)/(2s)}(I_{\overline{\Omega}})\\
\le{}& 10\mathsf{E}^{1/(rs)}[S^{2rs}(x)]\cdot[2^{2rs}n^{-2rsv}\mathsf{E}S^{2rs}(x)]^{(rs-1)/(rs)}\\
\le{}& c_1\cdot n^{-2v(rs-1)}, \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用了如下事实:

$$\mathsf{E}S^{2rs}(x)=\mathsf{E}[\mathsf{E}^{-2rs}(\mathrm{e}^{-c\theta}|x)]\le\mathsf{E}[\mathsf{E}(\mathrm{e}^{2crs\theta}|x)]=\mathsf{E}\mathrm{e}^{2crs\theta}<\infty.$$

现取$v=1/[2(2s+1)]$, 则$2v-r/2+vr=-2v(rs-1)=-(rs-1)/(2s+1)$. 由(4.1), (4.2)和(4.3)知,

$$R_n-R(G)=O(n^{-\delta}), \tag{4.4}$$

其中$\delta=(rs-1)/(2s+1)$. 证毕. $\square$

§5. 例子和模拟

本节我们先给出一个例子, 以说明满足定理4.1中条件的先验分布族是存在的.

假设参数θ的先验分布$G(\cdot)$是标准正态分布, 即θ的先验密度为

$$g(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\theta^2/2},\qquad \theta\in(-\infty,\infty).$$

给定θ时, X的条件密度为

$$f(x|\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\theta|},\qquad x\in(-\infty,\infty),$$

于是X的边缘密度为

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x|\theta)\mathrm{d}G(\theta)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2-x}\Phi(x-1)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2+x}[1-\Phi(x+1)],\end{aligned}$$

其中$\Phi(x)=(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$为标准正态分布的分布函数.

容易验证, $f(x)$的s阶导数$f^{(s)}(x)$存在且有界, 即定理4.1中条件(1)成立; 其次, 显然θ的任意m阶矩$\mathsf{E}|\theta|^m$存在, 即定理4.1中条件(2)成立; 另外,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\mathrm{e}^{2crs\theta})&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2crs\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\theta^2/2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-[(\theta-2crs)^2-4(crs)^2]/2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{2(crs)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\theta-2rs)^2/2}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{2(crs)^2}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\theta-2rs)^2/2}\mathrm{d}\theta\\&<\infty.\end{aligned}$$

同理, $\mathsf{E}(\mathrm{e}^{-c\theta})<\infty$, 即定理4.1中条件(3)成立. 这表明满足定理4.1的先验分布是存在的.

最后, 我们就这个例子进行Monte Carlo模拟研究. 在模拟中, 取$K(y)=4(4-30y+60y^2-35y^3)I_{[0<y<1]}$, $s=4$, $h_n=n^{-1/9}$, $n^v=n^{1/18}$. 另外, 损失函数中的c取为-0.5和0.8.

经计算, 对应的Bayes风险$R(G)$分别为0.1035和0.2042. 经验Bayes估计的风险R_n列在表1中. 由表1可以看出, R_n趋向于$R(G)$, 这与上文的理论结果是一致的.

表1 不同样本容量下的R_n

	$n=20$	$n=50$	$n=80$	$n=100$	$n=150$	$n=200$
$c=-0.5$	0.2108	0.1832	0.1595	0.1304	0.1187	0.1040
$c=0.8$	0.3253	0.2847	0.2549	0.2364	0.2219	0.2051

参 考 文 献

[1] Varian, H.R., A Bayesian approach to real estate assessment, In: *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics, In honor of Leonard J. Savage* (Authors: Fienberg, S.E. and Zellner, A.), North-Holland, Amsterdam, 1975, 195–208.

[2] Zellner, A., Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions, *Journal of the American Statistical Association*, **81(394)**(1986), 446–451.

[3] Kuo, L. and Dey, D.K., On the admissibility of the linear estimators of the Poisson mean using linex loss functions, *Statistics and Risk Modeling*, **8(3)**(1990), 201–210.

[4] Huang, S.Y. and Liang, T.C., Empirical Bayes estimation of the truncation parameter with linex loss, *Statistica Sinica*, **7(3)**(1997), 755–769.

[5] Sadooghi-Alvandi, S.M., Estimation of the parameter of a Poisson distribution using a LINEX loss function, *Australian Journal of Statistics*, **32(3)**(1990), 393–398.

[6] Easterling, R.G., Exponential responses with double exponetial distribution measurement error - A model for steam generator inspection, *Proceedings of the DOE Statistical Symposium*, U.S. Department of Energy, 1978, 90–110.

[7] Hsu, D.A., Long-tailed distributions for position errors in navigation, *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, **28(1)**(1979), 62–72.

[8] Dadi, M.I. and Marks, R.J., II, Detector relative efficiencies in the presence of Laplace noise, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **23(4)**(1987), 568–582.

[9] Bain, L.J. and Engelhardt, M., Interval estimation for the two-parameter double exponential distribution, *Technometrics*, **15(4)**(1973), 875–887.

[10] 丁晓, 韦来生, 双指数分布位置参数的经验Bayes估计问题, 数学杂志, **25(4)**(2005), 413–420.

[11] 刘荣玄, 指数族刻度参数EB估计的渐近最优性, 数理统计与管理, **29(5)**(2010), 65–70.

[12] 赵林城, 一类离散分布参数的经验Bayes估计的收敛速度, 数学研究与评论, **1(1)**(1981), 59–69.

[13] 韦来生, 一类Gamma分布位置参数的经验Bayes估计的收敛速度, 中国科学技术大学学报, **13(2)**(1983), 143–151.

[14] 王立春, 韦来生, 刻度指数族参数的经验Bayes估计的收敛速度, 数学年刊, **23(5)**(2002), 555–564.

[15] 陈家清, 刘次华, 指数分布危险函数的经验Bayes双侧检验的收敛速度: II型截尾情形, 应用概率统计, **24(3)**(2008), 255–264.

The Empirical Bayes Estimation of the Location Parameter in Double-Exponential Family under the LINEX Loss Function

You You[1,2] Zhou Ling[2]

([1] *Department of Public Foundation Teaching, Auhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhu, 241003*)

([2] *School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu, 241003*)

In this paper, we derive the Bayes estimator of the location parameter in double-exponential family under the LINEX loss function, and then construct the corresponding empirical Bayes estimator. It is shown that the empirical Bayes estimator is asymptotically optimal with convergence rate being $O(n^{-\delta})$, $\delta = (rs-1)/(2s+1)$, where $1/2 < r < 1 - 1/(2s)$, while $s \geq 3$ is a given integer. Finally, an example is demonstrated.

Keywords: LINEX loss function, double-exponential family, empirical Bayes estimation, convergence rate.

AMS Subject Classification: 62C12, 62F12.