应用概率统计 第 32 卷
第 6 期 2016 年 12 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Dec., 2016, Vol. 32, No. 6, pp. 603-616
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2016.06.004

非径向对称性度量为$3/n\,(n\geqslant 3)$的随机向量的结构及其最佳界

张晓宇　　徐付霞
(天津工业大学理学院, 天津, 300387)

摘　要： 本文基于Copula研究随机向量的非径向对称性理论. 首先研究了非径向对称性度量为3/4的随机变量的Copula结构, 给出非径向对称性度量为3/4的Copula的精确最佳界. 然后拓展到一般情况, 给出一个Copula的非径向对称性度量为$3/n$的必要条件, 研究了非径向对称性度量为$3/n$的随机变量的Copula结构, 得到非径向对称性度量等于$3/n$的Copula的宽泛最佳界.

关键词： Copula; 最佳界; 非径向对称; Fréchet-Hoeffding不等式
中图分类号： O212.5

§1. 引　　言

随机变量的对称性在概率统计的极限定理、极值理论、贝叶斯统计和随机过程中都有重要应用. 文献[1]基于Copula理论研究了三种对称性: 可交换性、径向对称性和联合对称性. 可交换性是最常见的对称性定义, 设连续型随机向量(X,Y)的联合分布函数为$H(x,y)$, 边缘分布分别为$F(x)$和$G(y)$, 对应的Copula为$C(u,v)$, 如果对于任意的实数x和y都有$H(x,y)=H(y,x)$, 或对任意的$u,v\in I=[0,1]$, 都有$C(u,v)=C(v,u)$, 则称随机变量X, Y是可交换的. 如果$H(x,y)\neq H(y,x)$, 或$C(u,v)\neq C(v,u)$, 则称随机变量X, Y是不可交换的.

文献[2]定义了随机变量的不可交换性度量, 研究了最大不可交换随机变量的Copula结构. 文献[3]研究了某个单点值给定的Copula最优界的不可交换性度量. 这个最优上下界C_U和C_L使得一般的Copula $C(u,v)$的Fréchet-Hoeffding上下界不等式

$$\max\{u+v-1,0\}=W(u,v)\leqslant C(u,v)\leqslant M(u,v)=\min\{u,v\} \tag{1}$$

变窄. 文献[2]给出了以下定理, 即定理1和定理2.

定理 1　设C是一个Copula, 且$C(a,b)=\theta$, 点$(a,b)\in I^2$, θ满足$\max\{a+b-1,0\}\leqslant\theta\leqslant\min\{a,b\}$, 那么

$$C_L(u,v)\leqslant C(u,v)\leqslant C_U(u,v), \tag{2}$$

本文2015年8月18日收到, 2016年4月18日收到修改稿.

其中

$$C_U(u,v)=\min\{u,v,\theta+(u-a)^+ +(v-b)^+\},$$
$$C_L(u,v)=\max\{0,u+v-1,\theta-(a-u)^+ -(b-v)^+\}.$$

这里的小于等于"$\leqslant$"是Copula的次序关系[1], $C_U(u,v)$, $C_L(u,v)$为给定点的值$C(a,b)=\theta$的最优上、下界.

文献[3]还构造了4个奇异的Copula, 他们具有最大的不可交换性, 解释了最大不可交换Copula的结构特点和性质. 文献[4,5]分别研究了C_U和C_L的相关性度量和它们相比Fréchet-Hoeffding界的变窄程度. 文献[6]研究了给定不可交换性度量的Copula的最佳上下界, 该界对Fréchet-Hoeffding界进行了改善, 但仍比较宽泛, 并且不是一个Copula, 而是拟Copula[7].

本文研究给定某些非径向对称性度量的Copula的最佳上下界, 得到了比较精确的结论. 随机向量关于点(a,b)是径向对称的, 如果$(X-a,Y-b)$和$(a-X,b-Y)$具有相同的分布函数, 即$H(x+a,y+b)=\overline{H}(a-x,b-y)$, 其中$\overline{H}(x,y)=1-F(x)-G(y)+H(x,y)$是$H$的生存函数, 若$H(x+a,y+b)\neq\overline{H}(a-x,b-y)$, 则称随机向量是非径向对称的.

定理 2 设X, Y是连续型随机变量, 联合分布函数为H, 边缘分布函数分别为F和G, 相关结构函数为C, 且X, Y分别关于点a, b径向对称, 那么(X,Y)关于点(a,b)径向对称的充分必要条件是

$$C(u,v)=\widehat{C}(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v), \tag{3}$$

$\widehat{C}(u,v)$称为C的生存Copula. 若$C(u,v)\neq\widehat{C}(u,v)$则称随机变量是非径向对称的.

文献[2,8]对非径向对称性的度量方法进行了研究, 定义了非径向对称性度量:

$$\delta(C)=3\sup_{u,v\in I}|C(u,v)-\widehat{C}(u,v)|, \tag{4}$$

其中3是使得非径向对称性度量$\delta(C)$最大为1的标准化系数, 即有

$$\sup|C(u,v)-\widehat{C}(u,v)|\leqslant\frac{1}{3}.$$

使得$\delta(C)=1$的Copula称为最大非径向对称Copula, 且有

$$|C(u,v)-\widehat{C}(u,v)|\leqslant\min\{u,v,1-u,1-v,\max\{|u-v|,|u+v-1|\}\}. \tag{5}$$

本文研究给定非径向对称性度量的随机变量的Copula结构及其最佳界. 第2部分讨论了非径向对称性度量为3/4的随机变量的Copula的结构和精确的最佳界; 第3部分研究了非径向对称性度量为$3/n$的随机变量的Copula的结构和宽泛的最佳界.

§2.　非径向对称性度量为3/4的Copula结构及其最佳界

文献[6]研究了给定不可交换性度量的随机向量的最佳界, 该文是以1 (3/3), 3/4, 3/5, 1/2 (3/6)为分界点, 将[0, 1]分割成了几个小区间进行研究的, 说明这些分界点在研究Copula的非对称性度量的最佳界问题中具有重要意义. 文献[2]研究了最大非径向对称随机向量$\delta(C)=1$的最佳界. 本节我们研究非径向对称性度量$\delta(C)=3/4$时的Copula及其最佳界.

先给出如下定义, 它们描述了两个Copula之间的关系.

定义 3　对于任意$(u,v)\in I^2$, Copula $C_1(u,v)$, $C_2(u,v)$, 若$C_1(u,v)=C_2^T(u,v)$, 即$C_1(u,v)=C_2(v,u)$, 则称$C_1(u,v)$和$C_2(u,v)$互为转置Copula, 并称$C_1(u,v)$为$C_2(u,v)$的转置Copula, 或$C_2(u,v)$为$C_1(u,v)$的转置Copula.

定义 4　对于任意$(u,v)\in I^2$, Copula $C_1(u,v)$, $C_2(u,v)$, 若$C_1(u,v)=\widehat{C}_2(u,v)$, 即$C_1(u,v)=u+v-1+C_2(1-u,1-v)$, 则称$C_1(u,v)$和$C_2(u,v)$互为径向对称Copula, 并称$C_1(u,v)$为$C_2(u,v)$的径向对称Copula, 或$C_2(u,v)$为$C_1(u,v)$的径向对称Copula.

再给出六个Copula函数, 它们在后面精确界的研究中起着重要作用.

$$C_{1U}=\min\Big\{u,v,\frac{1}{2}+\Big(u-\frac{3}{4}\Big)^+ +\Big(v-\frac{3}{4}\Big)^+\Big\},\tag{6}$$

$$C_{1L}=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{4}-u\Big)^+ -\Big(\frac{1}{4}-v\Big)^+\Big\};\tag{7}$$

$$C_{2U}=\min\Big\{u,v,\frac{1}{4}+\Big(u-\frac{3}{4}\Big)^+ +\Big(v-\frac{1}{2}\Big)^+\Big\},\tag{8}$$

$$C_{2L}=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{4}-u\Big)^+ -\Big(\frac{1}{2}-v\Big)^+\Big\};\tag{9}$$

$$C_{3U}=\min\Big\{u,v,\Big(u-\frac{3}{4}\Big)^+ +\Big(v-\frac{1}{4}\Big)^+\Big\},\tag{10}$$

$$C_{3L}=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{4}-\Big(\frac{1}{4}-u\Big)^+ -\Big(\frac{3}{4}-v\Big)^+\Big\},\tag{11}$$

其中$x^+=\max\{x,0\}$, 它们的支撑如图1所示.

最后定义一些Copula集:

$$\boldsymbol{C}_1=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_2=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\Big)=\frac{1}{2}\Big\},$$

$$\boldsymbol{C}_3=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\Big)=0\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_4=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\Big)=\frac{3}{4}\Big\},$$

$$\boldsymbol{C}_5=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_6=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4}\Big\},$$

$$\boldsymbol{C}_7=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big)=0\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_8=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big\},$$

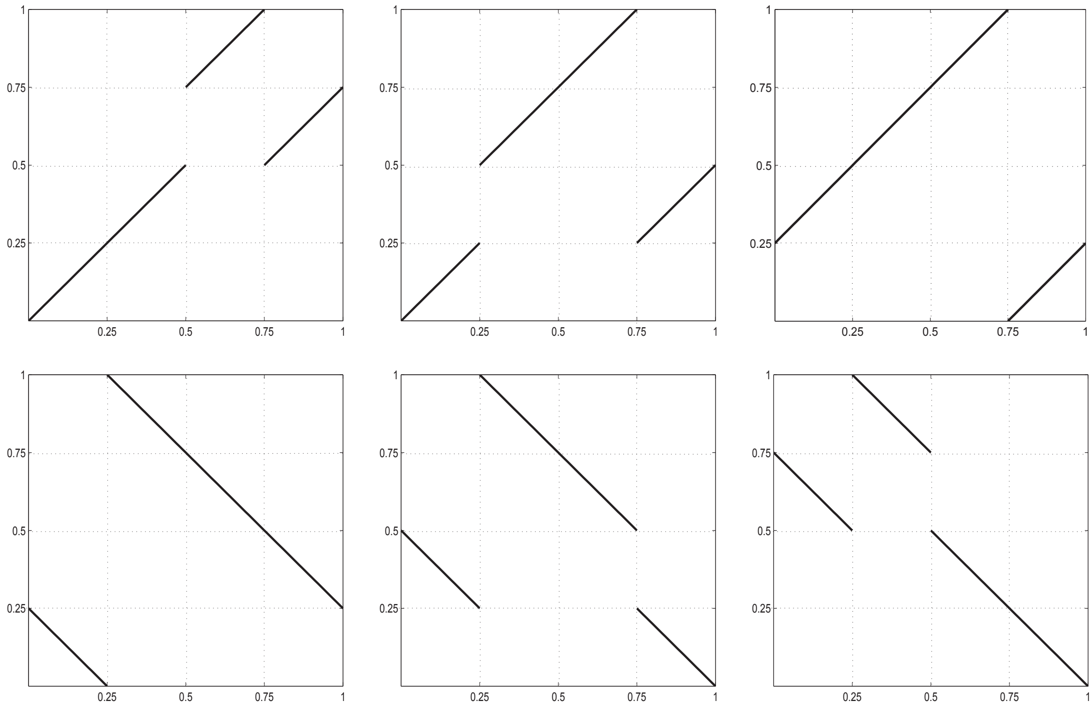

图1　左上至右下分别为Copula C_{1U}, C_{2U}, C_{3U}, C_{1L}, C_{2L}, C_{3L}的支撑

$$\boldsymbol{C}_9=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac14,\frac34\Big)=\frac14\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{10}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac34,\frac14\Big)=0\Big\},$$
$$\boldsymbol{C}_{11}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac12,\frac14\Big)=\frac14\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{12}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac12,\frac34\Big)=\frac14\Big\},$$
$$\boldsymbol{C}_{13}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac12,\frac14\Big)=0\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{14}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac12,\frac34\Big)=\frac12\Big\},$$
$$\boldsymbol{C}_{15}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac34,\frac14\Big)=\frac14\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{16}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac14,\frac34\Big)=0\Big\}.$$

上面集合中, $\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_3=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_2\cap\boldsymbol{C}_4=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_5\cap\boldsymbol{C}_7=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_6\cap\boldsymbol{C}_8=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_9\cap\boldsymbol{C}_{16}=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_{10}\cap\boldsymbol{C}_{15}=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_{11}\cap\boldsymbol{C}_{13}=\emptyset$, $\boldsymbol{C}_{12}\cap\boldsymbol{C}_{14}=\emptyset$. 一个Copula $C\in\boldsymbol{C}_5\,(\boldsymbol{C}_6)$当且仅当它的转置Copula $C^T\in\boldsymbol{C}_{11}\,(\boldsymbol{C}_{12})$, $C\in\boldsymbol{C}_7\,(\boldsymbol{C}_8)$当且仅当它的转置Copula $C^T\in\boldsymbol{C}_{13}\,(\boldsymbol{C}_{14})$, $C\in\boldsymbol{C}_9\,(\boldsymbol{C}_{10})$当且仅当它的转置Copula $C^T\in\boldsymbol{C}_{15}\,(\boldsymbol{C}_{16})$. 一个Copula $C\in\boldsymbol{C}_1\,(\boldsymbol{C}_2)$当且仅当它的径向对称Copula $\widehat{C}\in\boldsymbol{C}_4\,(\boldsymbol{C}_3)$, $C\in\boldsymbol{C}_5\,(\boldsymbol{C}_6)$当且仅当它的径向对称Copula $\widehat{C}\in\boldsymbol{C}_8\,(\boldsymbol{C}_7)$.

可见C_{1U}, C_{1L}都是$(\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2)$的元素, C_{2U}, C_{2L}都是$(\boldsymbol{C}_5\cap\boldsymbol{C}_6)$的元素, C_{3U}, C_{3L}都是$(\boldsymbol{C}_9\cap\boldsymbol{C}_{10})$的元素. 下面的定理给出了Copula非径向对称性度量等于3/4的必要条件, 以及非径向对称性度量等于3/4的Copula最佳界.

定理 5　设连续随机向量(X,Y)的Copula为C, 生存Copula为$\widehat{C}$, 若C的非径向对称性度量$\delta(C)=3/4$, 则

(a)

$$C\in \boldsymbol{C}=\bigcup_{k=1}^{8}(\boldsymbol{C}_{2k-1}\cap \boldsymbol{C}_{2k}). \tag{12}$$

(b) 对任意$C\in \boldsymbol{C}$,

$C\in \boldsymbol{C}_{1\,(\text{or }5\text{ or }9)}\cap \boldsymbol{C}_{2\,(\text{or }6\text{ or }10)}$ 当且仅当 $C_{1L\,(\text{or }2L\text{ or }3L)}\prec C\prec C_{1U\,(\text{or }2U\text{ or }3U)}$;

$C\in \boldsymbol{C}_{3\,(7)}\cap \boldsymbol{C}_{4\,(8)}$ 当且仅当 $\widehat{C}_{1L\,(2L)}\prec C\prec \widehat{C}_{1U\,(2U)}$;

$C\in \boldsymbol{C}_{11\,(15)}\cap \boldsymbol{C}_{12\,(16)}$ 当且仅当 $C^T_{2L\,(3L)}\prec C\prec C^T_{2U\,(3U)}$;

$C\in \boldsymbol{C}_{13}\cap \boldsymbol{C}_{14}$ 当且仅当 $\widehat{C}^T_{2L}\prec C\prec \widehat{C}^T_{2U}$,

其中C_{1U}, C_{1L}, C_{2U}, C_{2L}, C_{3U}, C_{3L}由式(6)–(11)给出.

(c) $C_{1U}\,(C_{1L})$, $\widehat{C}_{1U}\,(\widehat{C}_{1L})$, $C_{2U}\,(C_{2L})$, $\widehat{C}_{2U}\,(\widehat{C}_{2L})$, $C_{3U}\,(C_{3L})$, $C^T_{2U}\,(C^T_{2L})$, $\widehat{C}^T_{2U}\,(\widehat{C}^T_{2L})$, $C^T_{3U}\,(C^T_{3L})$为非径向对称性度量为3/4的(b)中8种情况下的最佳上(下)界.

证明:

(a) 若$\delta(C)=3/4$, 则存在一个点$(u_0,v_0)\in I^2$, 使得(i) $C(u_0,v_0)-C(v_0,u_0)=1/4$或(ii) $C(v_0,u_0)-C(u_0,v_0)=1/4$. 下面我们证明在(i)的情况下$C\in\boldsymbol{C}$, (ii)的情况类似略. 首先$(u,v)$中必须存在使得(i)成立的点, 由式(5)解得$(u_0,v_0)$可为(1/4, 1/4), (1/4, 1/2), (1/4, 3/4), (1/2, 1/4), (1/2, 3/4), (3/4, 1/4), (3/4, 1/2)或(3/4, 3/4).

当$(u_0,v_0)=(1/4,1/4)$时, $\widehat{C}(1/4,1/4)=1/4+1/4-1+C(3/4,3/4)=C(3/4,3/4)-1/2$. 由$C(1/4,1/4)-\widehat{C}(1/4,1/4)=1/4$得$C(1/4,1/4)-C(3/4,3/4)=-1/4$. 因为$0\leqslant C(1/4,1/4)\leqslant 1/4$, $1/2\leqslant C(3/4,3/4)\leqslant 3/4$, 所以, $C(1/4,1/4)=1/4$, $C(3/4,3/4)=1/2$, 即$C\in(\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2)$. 类似可证, 当$(u_0,v_0)=(3/4,3/4)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_3\cap\boldsymbol{C}_4)$; 当$(u_0,v_0)=(1/4,1/2)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_5\cap\boldsymbol{C}_6)$; 当$(u_0,v_0)=(3/4,1/2)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_7\cap\boldsymbol{C}_8)$; 当$(u_0,v_0)=(1/4,3/4)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_9\cap\boldsymbol{C}_{10})$; 当$(u_0,v_0)=(1/2,1/4)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_{11}\cap\boldsymbol{C}_{12})$; 当$(u_0,v_0)=(1/2,3/4)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_{13}\cap\boldsymbol{C}_{14})$; 当$(u_0,v_0)=(3/4,1/4)$时, $C\in(\boldsymbol{C}_{15}\cap\boldsymbol{C}_{16})$.

若$C\in(\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2)\cup(\boldsymbol{C}_3\cap\boldsymbol{C}_4)\cup(\boldsymbol{C}_5\cap\boldsymbol{C}_6)\cup(\boldsymbol{C}_7\cap\boldsymbol{C}_8)\cup(\boldsymbol{C}_9\cap\boldsymbol{C}_{10})\cup(\boldsymbol{C}_{11}\cap\boldsymbol{C}_{12})\cup(\boldsymbol{C}_{13}\cap\boldsymbol{C}_{14})\cup(\boldsymbol{C}_{15}\cap\boldsymbol{C}_{16})$, 那么一定存在点$(u_0,v_0)\in I^2$, 使得$3|C(u_0,v_0)-C(v_0,u_0)|=3/4$, 又因为$\delta(C)=3\sup\limits_{u,v\in I}|C(u,v)-\widehat{C}(u,v)|$, 故$\delta(C)\geqslant 3/4$, 不能得到$\delta(C)\geqslant 3/4$. 所以(a)只是$\delta(C)\geqslant 3/4$的必要条件.

(b) 设$C\in\boldsymbol{C}$, 假设$C_{1L}\prec C\prec C_{1U}$, 那么$C(1/4,1/4)=1/4$, $C(3/4,3/4)=1/2$, 所以$C\in\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$. 反之设$C\in\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$, 那么由定理1, C_{1U}是$\boldsymbol{C}_2$中任意Copula的上界[1], 又因为$C_{1U}\in\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$, 故$C_{1U}$是$\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$的最小上界. C_{1L}是$\boldsymbol{C}_1$中任意Copula的下界, 又因为$C_{1L}\in\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$, 故$C_{1L}$是$\boldsymbol{C}_1\cap\boldsymbol{C}_2$的最大下界. 其他几种情况类似略.

(c) 显然$\delta(C) > 3/4$的情况不满足此定理, 只讨论$\delta(C) \leqslant 3/4$的情况即可. 首先, 对于$\forall C \in \boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2$且非径向对称性度量为3/4的Copula C, 都有$C_{1L} \prec C \prec C_{1U}$, 故$C_{1L}$, C_{1U}是C的上下界. 其次, $\delta(C_{1U}) = 3 \sup\limits_{u,v \in I} |C_{1U}(u,v) - \widehat{C}_{1U}(u,v)| = 3/4$. 且$\delta(C_{1L}(u,v)) = 3 \sup\limits_{u,v \in I} |C_{1L}(u,v) - \widehat{C}_{1L}(u,v)| = 3/4$, 故$C_{1L}$, C_{1U}是C的上下确界, 其中$\widehat{C}_{1U}(u,v)$, $\widehat{C}_{1L}(u,v)$由式(3)得. 所以C_{1U}和C_{1L}为集合$\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2$中非径向对称性度量为3/4的Copula的最佳上下界. 其它七种情况类似略. 这样就完成了定理的证明. □

在定理5 (a)中, 满足(12)式的Copula中存在使得$|C(u,v) - \widehat{C}(u,v)| = 1/4$的点, 但是不能排除$|C(u,v) - \widehat{C}(u,v)| > 1/4$的点, 即满足式(12)的Copula有$|C(u,v) - \widehat{C}(u,v)| \geqslant 1/4$. 然而在(b)中, 根据(a)计算出的上界却不会存在不可交换性度量大于3/4的情况. 因为一类Copula的最佳上(下)界是这类Copula中最接近Fréchet-Hoeffding界$M(W)$的那一个, 不可交换性度量越小的Copula上(下)界距离$M(W)$的距离越近, 所以上界的不可交换性度量一定为3/4. 当不可交换性度量的值趋于0时, Copula的最佳界趋于$M(W)$.

可以看出, $C_{3U} \prec C_{2U} \prec C_{1U}$, $C_{3L} \prec C_{2L} \prec C_{1L}$, 所以$C_{1U}$为$C_{2U}$, C_{3U}的共同上界; C_{3L}为C_{1L}, C_{2L}的共同下界; $\widehat{C}_{1U}$为$\widehat{C}_{2U}$, $\widehat{C}_{3U}$的共同上界; $\widehat{C}_{3L}$为$\widehat{C}_{1L}$, $\widehat{C}_{2L}$的共同下界; $C_{1U} = C_{1U}^T$为C_{2U}^T, C_{3U}^T的共同上界; $C_{3L} = C_{3L}^T$为C_{1L}^T, C_{2L}^T的共同下界. 为使界精确, 在定理5中, 非径向对称性度量为3/4的Copula界被分成了8种类型. 然而这8种情况会有交集的存在, 如$C_{2U} \in (\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2) \cup (\boldsymbol{C}_5 \cap \boldsymbol{C}_6)$. 在下面对非径向对称性度量为$3/n$的讨论中, 我们将界进行了合并, 得到一个宽泛的上下界.

§3. 非径向对称性度量为$3/n\,(n \geqslant 3)$的Copula结构及其界

本节将上述结论推广到一般情况, 讨论非径向对称性度量为$3/n\,(n \geqslant 3)$的随机变量的Copula结构及其界.

引理 6 非径向对称性度量为$3/n$的Copula $C(u,v)$满足: $\exists i, j \in N$ (自然数), $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, 使得

$$C\Big(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\Big) - C\Big(\frac{n-i}{n}, \frac{n-j}{n}\Big) = \frac{l+1}{n}, \tag{13}$$

其中$l = i + j - n$.

证明: 由(4)式及$C(u,v)$的非径向对称性度量为$3/n$, 得

$$\sup |C(u,v) - \widehat{C}(u,v)| = \frac{1}{n}. \tag{14}$$

再由(5)式得

$$\min\{u, v, 1-u, 1-v, \max\{|u-v|, |u+v-1|\}\} = \frac{1}{n}. \tag{15}$$

从上式可解得

$$(U,V)=\Big\{(u,v)\,\Big|\,u\in\Big\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\Big\},v\in\Big\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\Big\},(u,v)\neq\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big\}.$$

可以看出, n为奇数时, 解的个数为$(n-1)^2$; n为偶数时, 解的个数$(n-1)^2-1$. 在I^2上剔除了边界点(即u, v有一个为0或1的点)和中心点(即点$(1/2,1/2)$). 因为边界点如$(u_0,0)$: $\widehat{C}(u_0,0)=u_0-1+C(1-u_0,1)=0=C(u_0,0)$, 不满足(15)式. 其它边界点如$(u_0,1)$: $\widehat{C}(u_0,1)=C(u_0,1)=u_0$; 中心点$(1/2,1/2)$: $\widehat{C}(1/2,1/2)=C(1/2,1/2)$也不满足(15)式.

令$u=i/n$, $v=j/n$, 则$\exists\, i,j\in N$, 且$1\leqslant i,j\leqslant n-1$, 使得$|C(i/n,j/n)-\widehat{C}(i/n,j/n)|=1/n$, 由(3)式得

$$\Big|C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)-\widehat{C}\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)\Big|=\Big|C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)-C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)-\frac{i+j-n}{n}\Big|=\frac{1}{n}.$$

根据上式可得两个等式

$$C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)-C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)=\frac{i+j-n+1}{n}=\frac{l+1}{n},$$

即(13), 和

$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)-C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{1+n-i-j}{n}=\frac{1-l}{n}. \tag{16}$$

事实上(16)式和(13)式等价. 因为若(13)式成立, 将(16)式的左端代入(13)式得

$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)-C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{n-i+n-j-n+1}{n}=\frac{n-i-j+1}{n}=\frac{1-l}{n}.$$

同理, 由(16)式也可推出(13)式. □

下面分四种情况: $i+j\leqslant n$且$i>j$; $i+j\leqslant n-1$且$i\leqslant j$; $i+j\geqslant n$且$i>j$以及$i+j\geqslant n$且$i\leqslant j$讨论满足(13)式的Copula结构.

记

$$\boldsymbol{D}_1=\bigcup_{i+j\leqslant n,i>j}\Big(\bigcup_{a=1,2,\dots,j}(\boldsymbol{C}_{a,1}\cap\boldsymbol{C}_{a,2})\Big),$$

其中, $a=1,2,\dots,j$, $i,j\in N$, $1\leqslant i,j\leqslant n-1$,

$$\boldsymbol{C}_{a,1}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)=\frac{a-1-l}{n}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{a,2}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{a}{n}\Big\}.$$

$$\boldsymbol{D}_2=\bigcup_{i+j\leqslant n-1,i\leqslant j}\Big(\bigcup_{b=1,2,\dots,j}(\boldsymbol{C}_{b,1}\cap\boldsymbol{C}_{b,2})\Big),$$

其中, $b=1,2,\dots,i$, $i,j\in N$, $1\leqslant i,j\leqslant n-1$, 这种情况下$i,j$不同时为1/2,

$$\boldsymbol{C}_{b,1}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)=\frac{b-1-l}{n}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{b,2}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{b}{n}\Big\}.$$

$$\boldsymbol{D}_3=\bigcup_{i+j\geqslant n,i>j}\Big(\bigcup_{c=1,2,\dots,j}(\boldsymbol{C}_{c,1}\cap\boldsymbol{C}_{c,2})\Big),$$

其中, $c=1,2,\ldots,n-i$, $i,j\in N$, $1\leqslant i,j\leqslant n-1$,

$$\boldsymbol{C}_{c,1}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)=\frac{c-1}{n}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{c,2}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{l+c}{n}\Big\}.$$

$$\boldsymbol{D}_4=\bigcup_{i+j\geqslant n,i\leqslant j}\Big(\bigcup_{d=1,2,\ldots,j}(\boldsymbol{C}_{d,1}\cap\boldsymbol{C}_{d,2})\Big),$$

其中, $d=1,2,\ldots,n-j$, $i,j\in N$, $1\leqslant i,j\leqslant n-1$,

$$\boldsymbol{C}_{d,1}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)=\frac{d-1}{n}\Big\},\qquad \boldsymbol{C}_{d,2}=\Big\{C\,\Big|\,C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{l+d}{n}\Big\}.$$

定理 7 设连续随机变量(X,Y)的Copula为$C(u,v)$, 生存Copula为$\widehat{C}$. 若C的非径向对称性度量$\delta(C)=3/n$, 则

$$C\in\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_2\cup\boldsymbol{D}_3\cup\boldsymbol{D}_4. \tag{17}$$

证明: 若$C\in\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_2\cup\boldsymbol{D}_3\cup\boldsymbol{D}_4$, 那么一定存在点$(u_0,v_0)\in I^2$, 使得$3|C(u_0,v_0)-C(v_0,u_0)|=3/n$而$\delta(C)=3\sup\limits_{u,v\in I}|C(u,v)-\widehat{C}(u,v)|$, 我们可以得到$\delta(C)\geqslant 3/n$.

设$i+j\leqslant n$且$i>j$, 由(1)式, $C((n-i)/n,(n-j)/n)$, $C(i/n,j/n)$需分别满足$-l/n\leqslant C((n-i)/n,(n-j)/n)\leqslant(n-i)/n$和$0\leqslant C(i/n,j/n)\leqslant j/n$, 再由(13)式, 可得

$$\frac{-l}{n}\leqslant C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-j}{n}\Big)\leqslant\frac{n-i-1}{n}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{n}\leqslant C\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big)\leqslant\frac{j}{n}. \tag{19}$$

令$\boldsymbol{C}_{a,1}$, $\boldsymbol{C}_{a,2}$中的$a=1$, 则$C((n-i)/n,(n-j)/n)=-l/n$, $C(i/n,j/n)=1/n$; 令$a=j$, 则$C((n-i)/n,(n-j)/n)=(n-i-1)/n$, $C(i/n,j/n)=j/n$. 所以

$$C\in\boldsymbol{D}_1=\bigcup_{i+j\leqslant n,i>j}\Big(\bigcup_{a=1,2,\ldots,j}(\boldsymbol{C}_{a,1}\cap\boldsymbol{C}_{a,2})\Big). \tag{20}$$

类似可证其它三种情况下的$C\in\boldsymbol{D}_2$, $C\in\boldsymbol{D}_3$或$C\in\boldsymbol{D}_4$, 即

$$C\in\boldsymbol{D}_1\cup\boldsymbol{D}_2\cup\boldsymbol{D}_3\cup\boldsymbol{D}_4.\qquad\square$$

下面求解非径向对称性度量为$3/n$的Copula的最佳界. 由于n不确定, 无法像上节那样将所有可能情况下的精确界表示出来, 这里我们将Copula分成了$n-1$个大类, 分别求出它们的最佳界. 首先给出如下引理:

引理 8 对于$\forall i,j\in N$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, $\theta\in[0,1]$, 如果Copula $C(u,v)$满足

(a) $C(i/n,j/n)=\theta$或$C(j/n,i/n)=\theta$, 则$C(i/n,i/n)$也可以取到θ, 即有$C(i/n,i/n)=\theta$.

(b) $C((n-j)/n,i/n)=\theta$, 则$C((n-i)/n,i/n)$也可以取到θ, 即有$C((n-i)/n,i/n)=\theta$.

证明:

(a) 由Fréchet-Hoeffding上下界不等式, 可得$\max\{i/n+i/n-1,0\}\leqslant C(i/n,i/n)\leqslant \min\{i/n,i/n\}$, 即$C(i/n,i/n)$的值域为$\Omega_1=[\min\{(2i-n)/n,0\},i/n]$. 同理$C(i/n,j/n)$或$C(j/n,i/n)$的值域为$\Omega_2=[\min\{(i+j-n)/n,0\},i/n]$, 因为$(2i-n)/n\leqslant(i+j-n)/n$, 故$\min\{(2i-n)/n,0\}\leqslant\min\{(i+j-n)/n,0\}$, 那么我们有$\Omega_2\subseteq\Omega_1$, 故若$\theta\in\Omega_2$, 那么$\theta\in\Omega_1$, 得证.

(b) $C((n-i)/n,i/n)$的值域为$\Omega_3=[0,\min\{(n-i)/n,i/n\}]$, $C((n-j)/n,i/n)$的值域为$\Omega_4=[0,\min\{(n-j)/n,i/n\}]$, 由$i\leqslant j$可知, $\Omega_4\subseteq\Omega_3$. 故若$\theta\in\Omega_4$, 那么$\theta\in\Omega_3$, 得证. □

上述引理中, 点$(i/n,i/n)$为主对角线上的点, 当i从1取到$n-1$时, 点$(j/n,i/n)$, $(i/n,j/n)$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$取遍了除边界点外的所有点, 即(15)式的所有解和点$(1/2,1/2)$. 点$((n-i)/n,i/n)$为次对角线上的点, $((n-j)/n,i/n)$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$分别为点$((n-i)/n,i/n)$及其左方的点, 那么当$i$从1取到$n-1$时, 则$((n-j)/n,i/n)$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$取遍了除边界点以外, 次对角线及其下方的点. 在下面定理9最佳上下界的研究中对这两种情况用相似的方法给予了证明. 但是次对角线上方的非边界点不满足引理8, 需用其它方法证明, 见下面的定理9.

定理 9　(a) 非径向对称性度量为$3/n$的Copula的最佳上界有$n-1$个, 它们是给定单点值

$$C\Big(\frac{i}{n},\frac{i}{n}\Big)=\frac{i-1}{n},\qquad 1\leqslant i\leqslant n-1 \tag{21}$$

的Copula最优上界, 为

$$C_{i,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\frac{i-1}{n}+\Big(u-\frac{i}{n}\Big)^+ +\Big(v-\frac{i}{n}\Big)^+\Big\}. \tag{22}$$

(b) 非径向对称性度量为$3/n$的Copula的最佳下界有$n-1$个, 它们是给定单点值

$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{i}{n}\Big)=\frac{1}{n},\qquad 1\leqslant i\leqslant n-1 \tag{23}$$

的Copula最优下界, 为

$$C_{i,L}(u,v)=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{n}-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^+ -\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^+\Big\}. \tag{24}$$

证明:

(a) 对任意$1\leqslant i\leqslant n-1$, (21)式满足Fréchet-Hoeffding上下界不等式, 即$\max\{i/n+i/n-1,0\}\leqslant(i-1)/n\leqslant i/n$. 由引理6, 满足式(14)的点有

$$(U,V)=\Big\{(u,v)\,\Big|\,u\in\Big\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\Big\},v\in\Big\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\Big\},(u,v)\neq\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\Big\}.$$

下证(22)式是最佳上界.

对于$\forall\, i,j\in N$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, $\theta\in\Omega_1$, 由引理8, 如果有$C(i/n,j/n)=\theta$或$C(j/n,i/n)=\theta$式成立, 则$C(i/n,i/n)$也可以取到θ. 由定理1,

$$C_{\theta,i,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\theta+\Big(u-\frac{i}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{i}{n}\Big)^{+}\Big\} \tag{25}$$

是由$C(i/n,i/n)=\theta$确定的最优上界, 它大于由$C(i/n,j/n)=\theta$确定的最优上界

$$C_{\theta,i,j,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\theta+\Big(u-\frac{i}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{j}{n}\Big)^{+}\Big\},$$

且大于由$C(j/n,i/n)=\theta$确定的最优上界

$$C_{\theta,i,j,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\theta+\Big(u-\frac{j}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{i}{n}\Big)^{+}\Big\}.$$

所以由$C(i/n,i/n)=\theta$确定的最优上界就是由$C(i/n,j/n)=\theta$或$C(j/n,i/n)=\theta$式确定的最优上界中最大的那一个. 将满足$C(i/n,j/n)=\theta$, $C(j/n,i/n)=\theta$或$C(i/n,i/n)=\theta$式的Copula划为一类, (25)式就是这类Copula的最佳上界. 这个最佳上界一定是给定单点值$C(i/n,i/n)=\theta$所确定的Copula的最优上界, 其中$\theta\in[0,i/n]$且为$1/n$的整数倍. 下面我们来排除给定单点$(i/n,i/n)$的值θ属于下面两种情况来证明使得式(25)取上确界的$\theta=(i-1)/n$.

(i) 若$\theta=(i-k)/n$. 满足$C(i/n,i/n)=(i-k)/n<(i-1)/n$, $1<k\leqslant i$的Copula的最优上界为

$$C_{i,k,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\frac{i-k}{n}+\Big(u-\frac{i}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{i}{n}\Big)^{+}\Big\}. \tag{26}$$

上式小于(22)式

$$C_{i,U}(u,v)=\min\Big\{u,v,\frac{i-1}{n}+\Big(u-\frac{i}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{i}{n}\Big)^{+}\Big\}.$$

也就是由(21)式确定的Copula最优上界大于由给定单点值$C(i/n,i/n)=(i-k)/n$确定的Copula最优上界. 这样就排除了使得$C(i/n,i/n)\leqslant(i-1)/n$的$\theta$.

(ii) 若$\theta=i/n$. 由

$$C\Big(\frac{i}{n},\frac{i}{n}\Big)=\frac{i}{n} \tag{27}$$

确定的Copula的最优上界为M, 大于Copula (22)式. 但是对于满足式(27)的非径向对称性度量为$3/n$的Copula, 若点$(i/n,i/n)$为满足(14)式的点, 则有$\widehat{C}(i/n,i/n)=(2i-n)/n+C((n-i)/n,(n-i)/n)=i/n\pm1/n$, 得$C((n-i)/n,(n-i)/n)=(n-i\pm1)/n$. 因为$(n-i+1)/n\geqslant(n-i)/n$, 不满足Fréchet-Hoeffding上界范围, 所以

$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{n-i}{n}\Big)=\frac{n-i-1}{n} \tag{28}$$

满足(27)和(28)式的Copula的最优上界为

$$C(u,v)=\min\Big\{u,v,\frac{n-i-1}{n}+\Big(u-\frac{n-i}{n}\Big)^{+}+\Big(v-\frac{n-i}{n}\Big)^{+}\Big\},$$

它是由给定单点值$C((n-i)/n,(n-i)/n)=(n-i-1)/n$所确定的Copula最佳上界, 和定理中的(21), (22)式一致.

这就证明了(22)式为满足$C(i/n,j/n)=\theta$, $C(j/n,i/n)=\theta$或$C(i/n,i/n)=\theta$的Copula的最佳上界. 在这$n-1$个最佳上界中, 除了n为偶数且$i=n/2$时$C(1/2,1/2)=(n/2-1)/n$所确定的最佳上界为径向对称Copula外, 其它均为非径向对称性度量为$3/n$的Copula, 说明这种最佳上界是较精确的.

(b) 分给定次对角线上方或下方点的Copula值两种情况证明(24)式是最佳下界.

1. 对于$\forall\, i,j\in N$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, $\theta\in\Omega_3$, 只要$C((n-j)/n,i/n)=\theta$成立, 那么$C((n-i)/n,i/n)$也可以取到θ. 可以计算出由$C((n-i)/n,i/n)=\theta$确定的最优下界

$$C_{\theta,i,L}=\min\Big\{0,u+v-1,\theta-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^{+}-\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^{+}\Big\},\tag{29}$$

小于由$C((n-j)/n,i/n)=\theta$确定的最优下界

$$C_{\theta,i,j,L}=\min\Big\{0,u+v-1,\theta-\Big(\frac{n-j}{n}-u\Big)^{+}-\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^{+}\Big\}.$$

将满足$C((n-j)/n,i/n)=\theta$或$C((n-i)/n,i/n)=\theta$的Copula划为一类, 那么(29)式为此类Copula的下确界.

与最佳上界类似, 我们排除以下两种情况, 证明当$\theta=1/n$时, (29)式取得最小值.

(i) 若$\theta=k/n>1/n$, 其中$1<k\leqslant\min\{(n-i)/n,i/n\}$且$k\in N$, 由$C((n-i)/n,i/n)=1/n$所确定的最优下界

$$C_{i,L}(u,v)=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{n}-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^{+}-\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^{+}\Big\},$$

即(24)式, 小于由$C((n-i)/n,i/n)=k/n$确定的最优下界

$$C_{i,k,L}(u,v)=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{k}{n}-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^{+}-\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^{+}\Big\}.\tag{30}$$

故式(24)是这类Copula的下确界.

(ii) 若$\theta=0$, 由单点值$C((n-i)/n,i/n)=0$所确定的Copula的最佳下界为W, 然而满足这个单点值且非径向对称性度量为$1/n$的Copula的最佳下界为

$$C(u,v)=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{n}-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^{+}-\Big(\frac{i}{n}-v\Big)^{+}\Big\},$$

它就是由给定单点值$C((n-i)/n,i/n)=1/n$所确定的Copula的最优下界.

2. 对于$\forall i,j\in N$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, $\theta\in\Omega_4$, 点$((n-i)/n,j/n)$在点$((n-i)/n,i/n)$的上方, 当i从1取到$n-1$时, $((n-i)/n,j/n)$取遍了除边界点以外, 次对角线及其上方的点. 根据Fréchet-Hoeffding不等式, 可得$C((n-i)/n,j/n)$的值域为$\Omega_5=[(j-i)/n,\min\{(n-i)/n,j/n\}]$. 由于$\min\{(n-i)/n,j/n\}\geqslant(j-i)/n+1/n$, 因此
$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\frac{j-i+1}{n} \tag{31}$$
在任意$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$下皆可成立. 由给定单点值
$$C\Big(\frac{n-i}{n},\frac{j}{n}\Big)=\beta\in\Omega_5 \tag{32}$$
所确定的, 且非径向对称性度量为$1/n$的Copula的最优下界大于由式(31)中给定的单点值确定的Copula的最优下界. 即
$$C(u,v)=\min\Big\{0,u+v-1,\frac{j-i+1}{n}-\Big(\frac{n-i}{n}-u\Big)^+-\Big(\frac{j}{n}-v\Big)^+\Big\} \tag{33}$$
为点$((n-i)/n,j/n)$处非径向对称性度量为$1/n$的给定所有可能单点值的Copula最优下界的下确界. 然而, 上式(33)大于由(23)式确定的Copula的最优下界(24)式, 故(24)式为此类Copula的下确界, 也是最佳下界.

综上(24)式为满足$C((n-j)/n,i/n)=\theta$, $C((n-i)/n,i/n)=\theta$和式(32)的Copula的最佳下界. 在这$n-1$个最佳下界中, 除n为偶数且$i=n/2$时$C(1/2,1/2)=1/n$所确定的最佳上界为径向对称Copula外, 其它Copula均为非径向对称性度量为$3/n$的Copula, 和最佳上界一样, 最佳下界也是较精确的. 定理9证毕. □

下面作出其中的两组最佳上下界$C_{n-1,U}$, $C_{n-1,L}$和$C_{1,U}$, $C_{1,L}$的支撑, 如图2所示, 表达式如下($C_{1,U}=\widehat{C}_{n-1,U}$, $C_{1,L}=\widehat{C}_{n-1,L}$).
$$\begin{aligned}
C_{n-1,U}&=\min\Big\{u,v,\frac{n-2}{n}+\Big(u-\frac{n-1}{n}\Big)^+ +\Big(v-\frac{n-1}{n}\Big)^+\Big\},\\
C_{n-1,L}&=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{n}-\Big(\frac{1}{n}-u\Big)^+ -\Big(\frac{n-1}{n}-v\Big)^+\Big\},\\
C_{1,U}=\widehat{C}_{n-1,U}&=\min\Big\{u,v,\Big(u-\frac{1}{n}\Big)^+ +\Big(v-\frac{1}{n}\Big)^+\Big\},\\
C_{1,L}=\widehat{C}_{n-1,L}&=\max\Big\{0,u+v-1,\frac{1}{n}-\Big(\frac{n-1}{n}-u\Big)^+ -\Big(\frac{1}{n}-v\Big)^+\Big\}.
\end{aligned}$$

$C_{n-1,U}$的支撑由连接点$(0,0)$和$((n-2)/n,(n-2)/n)$, 连接点$((n-2)/n,(n-1)/n)$和$((n-1)/n,1)$, 以及连接点$((n-1)/n,(n-2)/n)$和$(1,(n-1)/n)$的三条线段组成; $C_{n-1,L}$的支撑由连接点$(0,(n-1)/n)$和$(1/n,(n-2)/n)$, 连接点$(1/n,1)$和$(2/n,(n-1)/n)$, 以及连接点$(2/n,(n-2)/n)$和$(1,0)$的三条线段组成; $\widehat{C}_{n-1,U}$的支撑由连接点$(0,1/n)$和$(1/n,2/n)$,

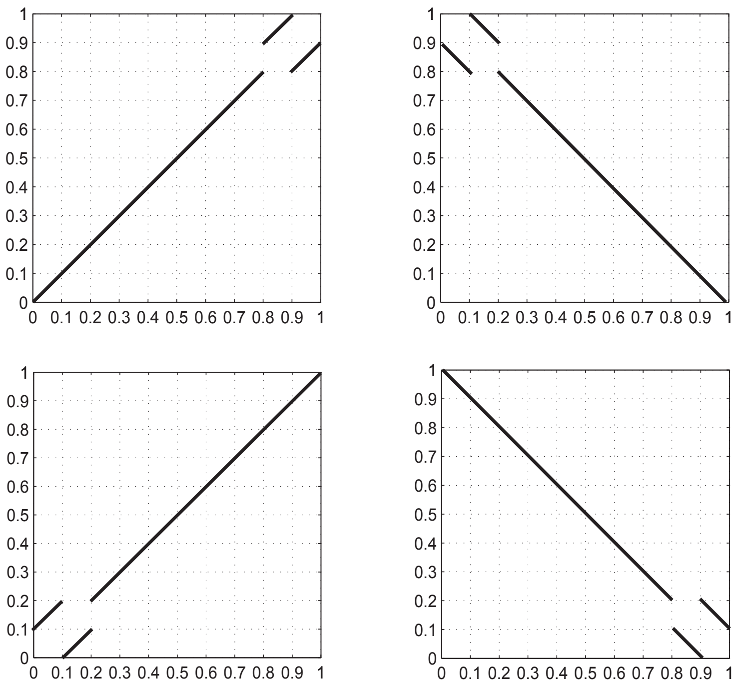

图2　左上至右下分别为$C_{n-1,U}$, $C_{n-1,L}$, $\widehat{C}_{n-1,U}$和$\widehat{C}_{n-1,L}$的支撑

连接点$(1/n,0)$和$(2/n,1/n)$, 以及连接点$(2/n,2/n)$和$(1,1)$的三条线段组成; $\widehat{C}_{n-1,L}$的支撑由连接点$(0,1)$和$((n-2)/n,2/n)$, 连接点$((n-2)/n,1/n)$和$((n-1)/n,0)$, 以及连接点$((n-1)/n,2/n)$和$(1,1/n)$的三条线段组成.

在这$n-1$组上下界中, 点$(i/n,i/n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$均位于主对角线上; 点$((n-i)/n,$ $i/n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$均位于次对角线上. 若用$d = \sup\limits_{u,v \in I} |C_1(u,v) - C_2(u,v)|$表示Copula C_1与C_2之间的距离, 那么非径向对称性度量为$3/n$的最佳上(下)界是非径向对称性度量为$3/n$的Copula中距离$M(W)$最近的. 定理9中的最佳上界到M的距离, 最佳下界到W的距离均为$1/n$, n越大, 距离越小, n趋于无穷时, 距离趋于0, 最佳上下界趋于M和W.

在第2节$n=4$的情况中, 我们得到了8种不同情况下的最精确的界, 这些最佳界满足$C_{3U} \prec C_{2U} \prec C_{1U}$, $C_{3L} \prec C_{2L} \prec C_{1L}$, 即最佳界可以合并, C_{1U}和C_{3L}是它们的宽泛最佳上下界, 这与定理9的结论是一致的. 若$n=3$, 就得到两组最佳界, 与文献[2]的最大非径向对称Copula的最优界相同.

参 考 文 献

[1] Nelsen R B. *An Introduction to Copulas* [M]. 2nd ed. New York: Springer, 2006.

[2] Nelsen R B. Extremes of nonexchangeability [J]. *Statist. Papers*, 2007, **48(2)**: 329–336.

[3] 董永权, 苏红顺, 徐付霞. 某个单点值给定的Copula最优界的不可交换性度量[J]. 系统科学与数学, 2008, **28(7)**: 886–896.

[4] 徐付霞, 董永权, 汪忠志. 基于Copula理论的随机变量的相关性[J]. 系统科学与数学, 2012, **32(4)**: 485–495.

[5] Xu F X, Dong Y Q, Wang Z Z. Group structure and narrowing effectiveness of best-possible bounds for copulas specified at a single interior point[J]. *Chinese J. Appl. Probab. Statist.*, 2014, **30(1)**: 12–22.

[6] Beliakov G, De Baets B, De Meyer H, et al. Best-possible bounds on the set of copulas with given degree of non-exchangeability[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **417(1)**: 451–468.

[7] Nelsen R B, Úbeda-Flores M. How close are pairwise and mutual independence?[J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2012, **82(10)**: 1823–1828.

[8] Dehgani A, Dolati A, Úbeda-Flores M. Measures of radial asymmetry for bivariate random vectors[J]. *Statist. Papers*, 2013, **54(2)**: 271–286.

The Structure and Best-Possible Bounds of Random Variables which Degree of Radial Asymmetry is $3/n$ $(n \geqslant 3)$

ZHANG Xiaoyu XU Fuxia

(*School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin, 300387, China*)

Abstract: We study the random variables of radial asymmetry based on copulas. We research on the structure of random variables which radial asymmetry degree is $3/4$ and get the exact best-possible bounds of random variables which radial asymmetry degree is equal to $3/4$. Then we expand to general case. We propose an essential condition of radial asymmetry degree is $3/n$ and study the structure of copula. We provide a broad bounds of copula that the radial asymmetry degree is $3/n$.

Keywords: Copula; best-possible bounds; radial asymmetry; Fréchet-Hoeffding inequality

2010 Mathematics Subject Classification: 60E15; 62E10