应用概率统计　第 33 卷
第 2 期　2017 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2017, Vol. 33, No. 2, pp. 111-124
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2017.02.001

考虑交易费用的二阶随机占优投资组合风险控制模型 *

杨　柳　　申飞飞

(湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭, 411105)

摘　要: 本文通过引入交易费用函数, 建立了一个更符合实际的带有二阶随机占优约束的投资组合风险控制模型. 该模型不需要对投资者的效用函数和风险资产收益的分布作任何假设, 就可以确保风险厌恶投资者所做的选择都会随机占优于一个基准值, 从而可以规避高风险投资.针对优化模型的求解, 设计了一种光滑化样本平均值近似罚函数方法, 理论上证明了光滑化罚问题与原问题的等价性. 数值结果验证了模型和算法的有效性.

关键词: 二阶随机占优; 交易费用; 光滑化方法; 组合优化; 样本平均值近似

中图分类号: O221.5; O211.6

英文引用格式: Yang L, Shen F F. Portfolio model of risk management with second order stochastic dominant constraints and transaction costs [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(2): 111–124. (in Chinese)

§1. 引　　言

投资组合选择问题是现代经济金融学领域的核心问题之一, 自1952年Markowitz提出均值–方差投资组合模型以来, 投资组合优化模型及其求解方法就得到了各国经济学家的关注和研究 [1]. 在Markowitz的均值–方差资产组合选择模型中, 方差描述了金融资产的收益率偏离其均值的程度, 但并没有定量的反映金融资产可能的损失. 因此, 学者们又相继提出一些其他的组合投资模型及其方法, 并且研究了在不同投资环境中的投资组合优化模型, 比如负债情形、股票误价、极端事件、通货膨胀等等 [2,3]. 基于Markowitz的均值–方差模型是在完全信息条件下建立的投资组合决策模型, 假定效用函数是二次函数的形式且组合的收益呈正态分布的前提下, 简单地使用均值和方差来对金融资产组合进行偏好排序, 然而在实际中, 资产的收益率并不服从具体的分布 [4], 因此, Fishburn提出用随机占优(Stochastic Dominance, SD)理论来改进Markowitz理论上的缺点, 对离散状态的随机变量的风险偏好给出了一套公理化体系, 后来被应用到随机变量的分布更一般的场合 [5]. 在实际的经济管理工作中, 随机占优理论可应用于保险策略比较分析、企业投资项目评估、经营机构的业绩评价、基金评级分析等微观经济主体的投资决策和风险管理的工作中 [6,7].

*国家自然科学基金青年项目(批准号: 11301445)、湖南省科技厅人才计划项目(批准号: 2015RS4029)和湖南省普通高校教改项目(批准号: 0929/2904044)资助.

本文2014年4月15日收到, 2016年8月22日收到修改稿.

利用随机占优方法对已有投资进行两两比较, 排除掉被占优的投资, 为投资组合选择和风险管理提供了有效的工具.

2006年, 美国优化专家Dentcheva和Ruszczyński在文献[8]中提出了带有二阶随机占优约束的组合优化模型, 推导并证明了这类新的数学模型的最优性条件和对偶理论, 并通过引入松弛变量得到一个维数依赖于样本数的线性规划模型. Drapkin和Schultz提出了一种求解带有二阶随机占优约束的投资组合优化模型的割平面方法, 并给出相应的数值算例[9]. Meskarian等在文献[10]中提出了二阶随机占优约束的优化模型的随机近似方法和水平函数方法, 并将其运用到二阶随机占优的组合投资问题中. 孙海琳系统地阐述了带有二阶随机占优约束的组合优化模型及其在经济领域的广泛应用, 并且提出了求解模型的精确罚函数法, 并与水平函数法及割平面法进行了对比, 通过数值分析验证的精确罚函数法的有效性[11]. 最近Gollmer等提出了带有随机占优约束的二阶段随机规划模型[12]. Dentcheva和Martinez给出了求解带有二阶随机占优约束的两阶段问题的分解算法, 并将该模型应用于一个供应链问题[13]. 对于多阶段的投资问题, Haskell和Jain研究了基于马尔科夫过程的动态随机占优优化问题[14]. Dentcheva和Ruszczyński提出的二阶随机占优的组合优化模型不需要对投资者的效用函数以及风险资产收益的分布做任何假设, 就可以确保风险厌恶投资者所做的选择都会随机占优于一个基准值, 从而可以规避高风险投资. 由于二阶随机占优条件迎合了风险厌恶决策者的需求, 所以许多与风险管理相关的实际问题都可以建立起一个二阶随机占优约束的优化模型[15,16]. 在本文中我们将考虑一种带交易费用的二阶随机占优约束的投资组合模型, 并考虑其数值算法. 在现实的金融市场中, 印花税、佣金、交易费等各种费用的存在, 将影响着投资者对投资机会和投资组合的选择. 如果投资组合模型忽视这些因素, 那么得到的投资组合效率前沿将会与实际的投资组合效率前沿存在很大的差异, 不利于投资者进行合理有效的投资[17]. 本文建立的模型和算法具有四个优点: (a) 用二阶随机占优来度量风险, 可以在期望收益分布未知的情况下确保投资者的收益会高于任何一个基准值; (b) 在投资组合中考虑交易费用更符合实际情况; (c) 用样本平均值方法计算期望收益, 可以从实际数据中选择样本, 并且当预期价格服从连续分布时, 可以避免出现无穷多个不等式约束; (d) 用光滑化罚函数算法来求模型的近似解, 不会增加变量的个数, 模型的维数不会依赖于样本点的个数, 并且所得模型是一个凸优化问题, 从而可以获得一个全局最优解.

本文结构如下: 第二节给出带有交易费用的二阶随机占优投资组合模型及样本平均近似模型. 第三节提出求解带有交易费用的二阶随机占优的光滑化罚函数算法. 第四节给出投资组合问题的数值试验及结果分析. 第五节给出了本文的结论.

§2. 带有交易费用的二阶随机占优投资组合模型

2.1 模型的构建

假设投资者期初将资金投资于n个不同的资产, 不允许卖空, 总投资为1个单位, 第k个

资产的投资比例为x_k, 且满足

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1, \qquad x_k \geqslant 0. \tag{1}$$

为了研究的方便, 我们先引入二阶随机占优的定义[3].

定义 1　假定$g(x,\xi)$是一个凹连续函数, 其中x是决策向量, ξ是随机变量, 如果

$$F(g(x,\xi);\eta) \leqslant F(g(y,\xi);\eta), \qquad \forall \eta \in \mathbb{R},$$

其中$F(g(x,\xi);\eta)$和$F(g(y,\xi);\eta)$分别是$g(x,\xi)$和$g(y,\xi)$的累积分布函数, 则称$g(x,\xi)$一阶随机占优$g(y,\xi)$, 记作$g(x,\xi) \succeq_{(1)} g(y,\xi)$. 同理, 若

$$\int_{-\infty}^{\eta} F(g(x,\xi);\theta)\mathrm{d}\theta \leqslant \int_{-\infty}^{\eta} F(g(y,\xi);\theta)\mathrm{d}\theta, \qquad \forall \eta \in \mathbb{R},$$

则称$g(x,\xi)$二阶随机占优$g(y,\xi)$, 记作$g(x,\xi) \succeq_{(2)} g(y,\xi)$.

Dentcheva和Ruszczyński在文献[8]中提出的二阶随机占优约束的投资组合优化模型为

$$\begin{aligned} &\max \quad \mathsf{E}[g(x,p)] \\ &\text{s.t.} \quad g(x,p) \succeq_{(2)} g(y,p), \quad x \in X, \end{aligned} \tag{2}$$

其中$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是连续函数, $\mathsf{E}[g(x,p)]$是期望收益, X表示投资决策向量x组成的集合, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in X$为一预先确定的量, p为收益率向量, 是一个随机向量.

由文献[8]可知, 模型(2)中的二阶随机占优约束可变形为

$$\mathsf{E}[(\eta - g(x,p))_+] \leqslant \mathsf{E}[(\eta - g(y,p))_+], \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

式中

$$(\eta - g(x,p))_+ = \max(\eta - g(x,p), 0).$$

由于模型(2)不满足Slater约束品性, 不能得到其最优解的必要条件, 因此, 一般考虑如下松弛模型:

$$\begin{aligned} &\min \quad -\mathsf{E}[g(x,p)] \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} G(x,\eta) \leqslant 0, \quad \forall \eta \in [a,b], \\ x \in X. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

模型(4)是半无限的随机规划模型, 式中$[a,b]$是$\mathbb{R}$上的一个闭区间. 由参考文献[3]可知, 如果X服从一致有界分布, 那么在区间$[a,b]$上, 模型(3)和(4)是等价的.

引理 2 [8] 若参考收益$g(y,p)$服从离散有限分布, 其可能值为$z_j\,(j=1,2,\ldots,m)$, 则二阶占优约束

$$\mathsf{E}[(\eta-g(x,p))_+]\leqslant\mathsf{E}[(\eta-g(y,p))_+]$$

等价于

$$\mathsf{E}[(z_j-g(x,p))_+]\leqslant\mathsf{E}[(z_j-g(y,p))_+],\qquad j=1,2,\ldots,m.$$

因此, 模型(4)可以转化为

$$\begin{aligned}&\min\ \ -\mathsf{E}[g(x,p)]\\&\text{s.t.}\ \ \begin{cases}G(x,z_j)=\mathsf{E}[(z_j-g(x,p))_+]-\mathsf{E}[(z_j-g(y,p))_+]\leqslant 0,\\ z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\ldots,m,\quad x\in X.\end{cases}\end{aligned}\tag{5}$$

在本文中, 我们根据实际情况考虑带有交易费用的二阶随机占优投资组合模型, 交易费用函数为

$$c(x)=\sum_{k=1}^n c_k(x_k)=\sum_{k=1}^n r_k|x_k-x_k^0|,$$

其中$c_k(x_k)$表示资产k所需交纳的费用, r_k为第k种风险资产的单位交易费用, $x_k^0\,(k=1,2,\ldots,n)$是投资者在期初所拥有的第k种资产的份额.

我们假定投资组合的收益函数是线性的, 加入交易费用后投资收益与原来相比要减去所支付的交易费用, 因此收益函数可表示为

$$g(x,p)=x^{\mathsf{T}}p-c(x),$$

其中x表示投资权重向量, p表示资产收益率向量.

由于交易费用内生于资本, 总投资额的约束也发生一定的变化, 新的约束为

$$\sum_{k=1}^n x_k+c(x)=1.$$

因此考虑交易费用的二阶随机占优组合优化模型如下:

$$\begin{aligned}&\min\ \ -\mathsf{E}\Big[x^{\mathsf{T}}p-\sum_{k=1}^n r_k|x_k-x_k^0|\Big]\\&\text{s.t.}\ \ \begin{cases}G(x,z_j)=\mathsf{E}\Big[\Big(z_j-\Big(x^{\mathsf{T}}p-\sum\limits_{k=1}^n r_k|x_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big]\\ \qquad\qquad -\mathsf{E}\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\mathsf{T}}p-\sum\limits_{k=1}^n r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big]\leqslant 0,\\ \sum\limits_{k=1}^n x_k+\sum\limits_{k=1}^n r_k|x_k-x_k^0|=1,\quad x_k\geqslant 0,\\ z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\ldots,m,\quad k=1,2,\ldots,n.\end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

2.2 样本平均近似模型

考虑到模型(6)中含有随机变量p, 假定随机变量p服从离散有限分布, 当p的分布不确定时, 模型(6)很难求解. 文献[10,11]考虑了用样本平均值方法处理模型中的随机变量, 构建了带有二阶随机占优约束的样本平均近似模型, 并证明了模型具有全局最优解. 因此, 我们用类似的方法来构建含有交易费用的带有二阶随机占优约束的样本平均近似模型.

设$p^1, p^2, \ldots, p^m$是p的独立同分布样本, 则模型(6)的样本平均近似模型表示为

$$\begin{aligned}&\min\ \ -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|x_k-x_k^0|\right]\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}G_m(x,z_j)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\left\{\left[\left(z_j-\left(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|x_k-x_k^0|\right)\right)_+\right]\right.\\ \qquad\qquad\left.-\left[\left(z_j-\left(y^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\right)\right)_+\right]\right\}\leqslant 0,\\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_k+\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|x_k-x_k^0|=1,\quad x_k\geqslant 0,\\ z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\ldots,m,\quad k=1,2,\ldots,n,\quad i=1,2,\ldots,m.\end{cases}\end{aligned}\tag{7}$$

由于模型(7)中含有非光滑的加函数和绝对值函数, 用一般的优化算法很难求解这类问题, 所以针对绝对值函数, 我们作下面的变换, 令

$$u_k=|x_k-x_k^0|,\qquad k=1,2,\ldots,n,\tag{8}$$

那么u_k满足$u_k\geqslant x_k-x_k^0$, $u_k\geqslant x_k^0-x_k$, $k=1,2,\ldots,n$.

对于非光滑的加函数, 我们可引入一个辅助变量$s_{ji}=S(z_j,p^i)$代表z_j与交易费用函数的差额, 模型(7)转化为

$$\begin{aligned}&\min\ \ -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\right]\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}\left(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\right)+s_{ji}\geqslant z_j,\\ \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}s_{ji}\leqslant\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}\left[\left(z_j-\left(y^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\right)\right)_+\right],\\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_k+\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k=1,\quad u_k\geqslant x_k-x_k^0,\quad u_k\geqslant x_k^0-x_k,\quad x_k\geqslant 0,\\ s_{ji}\geqslant 0,\quad z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\ldots,m,\quad k=1,2,\ldots,n,\quad i=1,2,\ldots,m.\end{cases}\end{aligned}\tag{9}$$

其中$x=(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)$, $p^i=(p_1^i,\ldots,p_k^i,\ldots,p_n^i)$, s_{ji}表示z_j与$\big(x^{\mathsf T}p-\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|x_k-x_k^0|\big)$的差额. 当样本数$m$确定时, 模型(9)为一个确定性的线性规划模型(LP), 其维数是$2n+m^2$ (m为样本数).

§3. 光滑化罚函数算法

3.1 光滑化方法

通过传统的线性规划方法得到的模型(9)的维数严重依赖于样本数. 因此, 我们考虑用一种光滑化技术处理二阶随机占优约束中的非光滑函数. 对于非光滑问题, Peng和Lin提出了一种光滑逼近函数[18], 该光滑函数是可微的, 并且能够保持原模型全局收敛性. Tong等用光滑化函数来逼近CVaR优化模型中的非光滑函数[19], 将非光滑的基于CVaR的投资组合优化模型转化为易于求解的光滑化模型. 在本文中, 我们将构造一种光滑化方法, 其基本思想来源于文献[18].

记二阶随机占优约束

$$\begin{aligned} G_m(x,z_j)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big\{&\Big[\Big(z_j-\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)\Big)_+\Big]\\ &-\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

令$t>0$为光滑参数, 定义

$$\begin{cases} f_1(x,z_j)=z_j-\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\Big),\\ f_2(x,z_j)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,z_j)=\max\{f_1(x,z_j),f_2(x,z_j)\},\\ f_s(t,x,z_j)=t\ln(1+\exp(f_1(x,z_j)/t)). \end{cases}$$

$$\overline{G}_m(t,x,z_j)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[f_s(t,x,z_j)]-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big],$$

其中$f_s(t,x,z_j)$, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$分别为$f(x,z_j)$, $\overline{G}_m(x,z_j)$的光滑函数. 通过文献[9]中的引理7我们可得到下面的结论.

定理 3 对于$\forall\, t>0$, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$有下面的性质:

(i) $\overline{G}_m(t,x,z_j)$为关于t的递增函数, 即对$\forall\, t_1>t_2>0$, 有

$$\overline{G}_m(t_1,x,z_j)\geqslant\overline{G}_m(t_2,x,z_j),$$

且

$$0\leqslant\overline{G}_m(t,x,z_j)-G_m(x,z_j)\leqslant t\ln 2.$$

(ii) 假定收益函数$g(\cdot,p)$是一个凹的连续函数, 则$G_m(x,z_j)$是凸函数, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$保持$G_m(x,z_j)$的凸性.

(iii) 对$\forall\, t>0$, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$是连续可微的, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$的一阶微分为

$$\nabla_x\overline{G}_m(t,x,z_j)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{\left(z_j-\left(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\right)\right)/t}}{1+\mathrm{e}^{\left(z_j-\left(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\right)\right)/t}}\cdot\Big(p^i-\sum_{k=1}^{n}|r_k|\Big).$$

(iv) 对任意确定的$x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\|\nabla_{(x)}\overline{G}_m(t,x,z_j)-\partial G_m(x,z_j)\|=o(t).$$

证明: 由文献[9]中的引理7可知性质(i)、(iii)和(iv)显然成立. 下面给出性质(ii)的证明. 由函数$\overline{G}_m(t,x,z_j)$为$f_s(t,x,z_j)$的和函数. 若$f_s(t,x,z_j)$为凸函数, 则由凸函数的可加性得$\overline{G}_m(t,x,z_j)$也为凸函数. 因此只需证明$f_s(t,x,z_j)$为凸函数. 由交易费用函数$\sum\limits_{k=1}^{n}r_k|x_k-x_k^0|$为凸函数, 则收益函数$g(x,p^i)$是凹函数, 有$f_1(x,z_j)=z_j-\big(x^{\mathsf T}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\big)$为凸函数. 又由$f_2(x,z_j)=0$和文献[9]中的引理7的性质(2), 得到

$$\begin{aligned}\nabla^2f_s(t,x,z_j)=&\,a_1(t,x,z_j)\nabla^2f_1(x,z_j)+\frac{1}{t}a_1(t,x,z_j)\nabla f_1(x,z_j)f_1(x,z_j)^{\mathsf T}\\&-\frac{1}{t}(a_1(t,x,z_j)\nabla f_1(x,z_j))\cdot(a_1(t,x,z_j)\nabla f_1(x,z_j))^{\mathsf T},\end{aligned}$$

其中

$$a_1(t,x,z_j)=\mathrm{e}^{f_1(x,z_j)/t}\Big/\sum_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{f_1(x,z_j)/t}.$$

对$\forall\, d\in\mathbb{R}^n$, 由$f_1(x,z_j)$的凸性及$a_1(t,x,z_j)\in[0,1]$, 得

$$\begin{aligned}d^{\mathsf T}\nabla^2f_s(t,x,z_j)d=&\,a_1(t,x,z_j)d^{\mathsf T}\nabla^2f_1(x,z_j)d\\&+\frac{1}{t}a_1(t,x,z_j)(1-a_1(t,x,z_j))\cdot(d^{\mathsf T}\nabla f_1(x,z_j))^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

因此$f_s(t,x,z_j)$为凸函数. 因此, 定理3中的(ii)成立. □

由定理3可知, 光滑函数$f_s(t,x,z_j)$, $\overline{G}_m(t,x,z_j)$都是凸函数, 并且当光滑因子$t\to 0^+$时, 光滑函数具有很好的近似效果, 因此我们可以构造以下光滑模型来求模型(7)的解:

$$\begin{aligned}&\min\quad -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big]\\&\text{s.t.}\quad\begin{cases}\overline{G}_m(t,x,z_j)\leqslant 0,\\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_k+\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k=1,\quad z_j\in[a,b],\\ u_k\geqslant x_k-x_k^0,\quad u_k\geqslant x_k^0-x_k,\quad x_k\geqslant 0,\\ j=1,2,\dots,m,\quad k=1,2,\dots,n,\quad i=1,2,\dots,m,\end{cases}\end{aligned}\tag{10}$$

其中

$$\overline{G}_m(t,x,z_j)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[t\ln\Big(1+\exp\Big(\Big(z_j-\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)\Big)/t\Big)\Big)\Big]\\ -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big].$$

模型(10)是光滑的非线性凸规划模型, 模型的维数是$2n$ (n为资产数).

3.2 罚函数方法

对于一个确定的样本, 模型(10)是一个带有有限约束的非线性规划模型. 然而, 模型的约束数依赖于样本数, 当样本数增大时, 模型的约束数会大幅度增加. 因此, 我们在本节中考虑用一种精确罚函数方法将模型(8)中的约束条件添加到目标函数中, 模型可变为

$$\begin{aligned}&\min\ \varphi(x,\lambda^m)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)+\lambda^m\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\max(G_m(x,z_j),0),\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}u_k\geqslant x_k-x_k^0,\quad u_k\geqslant x_k^0-x_k,\\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_k+\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k=1,\quad x_k\geqslant 0,\\ z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\dots,m,\quad k=1,2,\dots,n,\quad i=1,2,\dots,m,\end{cases}\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$G_m(x,z_j)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big\{\Big[\Big(z_j-\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)\Big)_+\Big]\\ -\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big]\Big\},$$

$\lambda^m>0$是与m有关的罚参数.

模型(11)是在收益函数为线性函数的条件下得到的带有交易费用的二阶随机占优投资组合罚函数模型. 当交易函数为凸函数时, 由文献[5]得, 模型(11)与模型(7)是等价的.

下面结合光滑化方法和罚函数, 给出带交易费用的基于二阶随机占优的光滑化样本平均近似罚函数模型:

$$\begin{aligned}&\min\ \varphi(t,x,\lambda^m)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(x^{\mathsf T}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)+\lambda^m\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}t\ln(1+\exp(\overline{G}_m(t,x,z_j)/t)),\\&\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k+\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k=1,\\ u_k\geqslant x_k-x_k^0,\quad u_k\geqslant x_k^0-x_k,\quad x_k\geqslant 0,\\ z_j\in[a,b],\quad j=1,2,\dots,m,\quad k=1,2,\dots,n,\quad i=1,2,\dots,m.\end{cases}\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{G}_m(t,x,z_j)=&\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[t\ln\Big(1+\exp\Big(\Big(z_j-\Big(x^{\top}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_ku_k\Big)\Big)/t\Big)\Big)\Big]\\&-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\Big(z_j-\Big(y^{\top}p^i-\sum_{k=1}^{n}r_k|y_k-x_k^0|\Big)\Big)_+\Big].\end{aligned}$$

$\lambda^m>0$是与样本数m有关的罚参数, t是光滑参数. 类似于文献[11]中关于光滑化罚函数性质的证明, 我们可以得到光滑函数$\varphi(t,x,\lambda^m)$具有以下性质.

定理 4　对于$\forall\, t>0$, $\varphi(t,x,\lambda^m)$有下面的性质:

(i) $\varphi(t,x,\lambda^m)$为关于t的递增函数, 即对$\forall\, t_1>t_2>0$, 有

$$\varphi(t_1,x,\lambda^m)\geqslant\varphi(t_2,x,\lambda^m).$$

(ii) 由收益函数$\big(x^{\top}p^i-\sum\limits_{k=1}^{n}r_ku_k\big)$的凸性, 得$\overline{G}_m(t,x,z_j)$是凸函数, $\varphi(t,x,\lambda^m)$保持$\overline{G}_m(t,x,z_j)$的凸性.

(iii) 对$\forall\, t>0$, $\varphi(t,x,\lambda^m)$是连续可微的, $\varphi(t,x,\lambda^m)$的一阶微分为

$$\nabla_x\varphi(t,x,\lambda^m)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(p^i-|r_k|)+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\exp(\overline{G}_m(t,x,z_j)/t)}{1+\exp(\overline{G}_m(t,x,z_j)/t)}\cdot\nabla_x\overline{G}_m(t,x,z_j).$$

(iv) 对任意确定的$x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\|\nabla_{(x)}\varphi(t,x,\lambda^m)-\partial\varphi(x,\lambda^m)\|=o(t),$$

其中$\|\cdot\|$表示欧式范数.

由定理4可得, 模型(12)是光滑的非线性凸规划模型, 其维数是$2n$ (n为资产数).

因此, 对于模型(6)的求解, 我们先用样本平均近似方法将模型(6)转化为一个离散的近似模型(7), 然后分别给出传统的线性规划方法和一种光滑化罚函数方法. 线性规划方法是借助辅助变量将带交易费用的二阶随机占优的非光滑近似模型(7)转化为光滑的线性规划模型(9), 该模型是一个变量维数为$2n+m^2$ (m是样本数)的线性规划问题. 对于大规模的线性规划问题, 目前有很多商业软件可以用来求解. 在本文中我们将调用Matlab中的linprog求解器来进行求解. 光滑化罚函数方法先用精确罚函数法将模型(7)中的二阶随机占优约束加到目标函数中, 再通过一种光滑化技术来处理模型(7)中的非光滑的加函数和罚函数, 将模型(7)转化为一个一般的非线性规划模型(12), 模型(12)的维数为$2n$, 并且模型(12)是一个凸规划模型, 其所得解为原问题的全局最优解. 对于该问题的求解, 我们调用Matlab中的fmincon求解器来进行求解.

§4. 数值试验

在本节中, 为了验证模型和算法的有效性, 我们用光滑化罚函数算法求解了带交易费用和不带交易费用的二阶随机占优投资组合模型, 通过对比两种模型来测试带交易费用的投资组合模型的有效性和光滑化罚函数方法的计算性能.

4.1 选取数据

在本小节中, 选取十只股票进行组合投资, 分别为青岛海尔(600690)、丰乐种业(000713)、东方航空(600115)、包钢稀土(600111)、浦发银行(600000)、中恒集团(600252)、华能国际(600011)、江西铜业(600362)、冀东水泥(000401)、海正药业(600267), 在国泰安数据库收集自2003年1月1日至2012年12月31日内十只股票的周收益率, 共得到5 000个观测值, 利用EXCEL软件处理数据, 分别得到十只股票周收益率的期望和方差, 如表1所示.

表1 收益率的期望和方差

股票	600690	000713	600115	600111	600000	600252	600011	600362	000401	600267
期望	0.0051	0.0040	0.0030	0.0100	0.0049	0.0072	0.0028	0.0073	0.0052	0.0050
方差	0.0031	0.0042	0.0050	0.0060	0.0036	0.0061	0.0027	0.0065	0.0046	0.0030

记线性规划模型为LP模型, 光滑化罚函数模型为SPP模型. 假定股票收益率服从正态分布. 利用蒙特卡罗模拟法[20], 选取不同的样本容量, 产生每只股票的收益率样本, 我们选择参考收益率$g(y,p^i)$中的投资权重$y^*=[1/n,1/n,\ldots,1/n]$, 则参考收益可表示为

$$z_i := g(y^*,p^i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ki}, \qquad i=1,2,\ldots,m,$$

其中$n=10$, m为样本数, r_{ki}表示第k个资产在i时期的收益率.

4.2 数值结果

1. 给定样本数500, 光滑参数$t=0.001$, 罚参数$\lambda^m=1\,000$, 交易费用比例全部取为0.01, 分别求解带交易费用的模型(9)和(12)与相应的不考虑交易费用的模型, 计算结果如表2所示. 由表2可得到, 带交易费用模型比不带交易费用模型的期望收益小, 表2中的前三种模型将大部分资产配置到期望收益较大的包钢稀土和中恒集团, 而带交易费用的SPP模型将资产配置到更多的股票中,从而降低了风险, 得到了较低的期望收益, 符合高风险高收益的投资规律, 说明了基于二阶随机占优的光滑罚函数模型的有效性.

2. 考虑带交易费用的LP模型(9)和SPP模型(12), 给定样本数500, 罚参数$\lambda^m=1\,000$, 光滑参数$t=10^{-5}$时, 通过设定不同的交易费用比例, 求解的模型结果如图1所示. 从图1可知, 随着交易费用的增大, 带有交易费用的LP模型和SPP模型的期望收益都有不同程度的降低, 表明不同的交易费用会对投资决策产生影响.

表2　LP与SPP模型的计算结果

模型	x	期望收益
不带交易费用的LP模型	$(0,0,0,0.7744,0,0.2165,0,0.0091,0,0)$	0.0095
不带交易费用的SPP模型	$(0,0,0,0.9592,0,0.0348,0,0.006,0,0)$	0.0089
带交易费用的LP模型	$(0,0,0,0.6620,0,0.2554,0,0.0642,0,0)$	0.0075
带交易费用的SPP模型	$(0,0.0586,0.0809,0.1435,0,0,0.4344,0,0,0.2608)$	0.0067

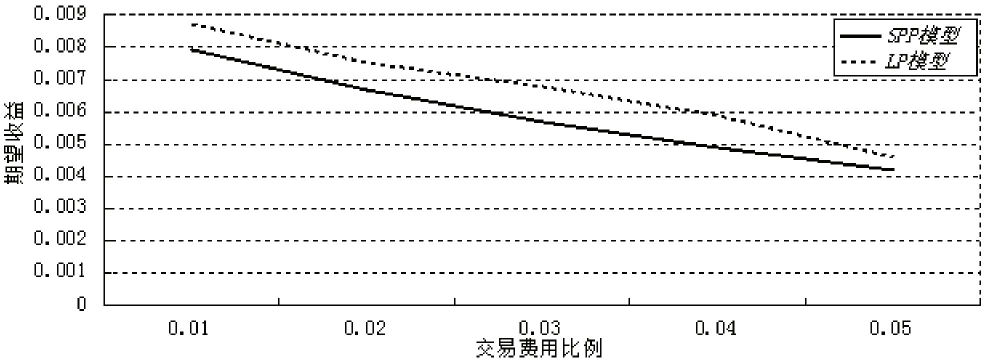

图1　不同交易费用的LP模型和SPP模型的期望收益

3. 考虑带交易费用的SPP模型(12)和不带交易费用的SPP模型, 给定样本数500, 罚参数$\lambda^m = 1\,000$, 交易费用比例设定为0.01, 选取不同的光滑化参数t时, 求解两种SPP模型的结果如图2所示. 由图2可知两种模型的最优目标值基本不发生变化, 表明光滑化罚函数模型对参数t是不灵敏的. 进一步表明, 当t趋于0^+时, 基于二阶随机占优的原模型与SPP模型等价.

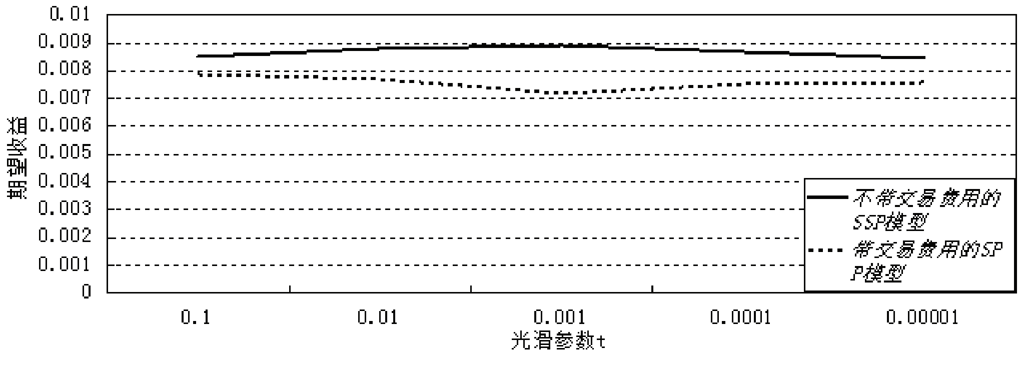

图2　不同光滑参数下的SPP模型的期望收益

4. 给定光滑参数$t = 0.001$, 罚参数$\lambda^m = 1\,000$, 交易费用比例全部设定为0.01, 通过选取不同的样本数, 分别求解LP和SPP模型, 统计模型所需要的CPU时间, 如表3和图3所示.

从表3和图3可知, 随着样本数的增大, LP模型所用时间越来越大; 而SPP模型几乎没有变化. 表3和图3说明基于二阶随机占优的光滑罚函数模型比线性规划模型有更好的数值计算性能.

表3　不同模型的计算时间

样本数	不带交易费用的LP模型(CPU/s)	不带交易费用的SPP模型(CPU/s)	带交易费用的LP模型(CPU/s)	带交易费用的SPP模型(CPU/s)
50	11.8117	13.7213	14.1773	15.8880
100	12.8998	19.3855	20.7081	21.5449
500	83.7159	30.6964	110.0999	49.7771
1 000	165.4725	41.9712	370.8060	65.3784
1 500	380.8060	46.1642	523.1650	82.6439
3 000	649.6488	88.8847	1 148.7403	171.0107

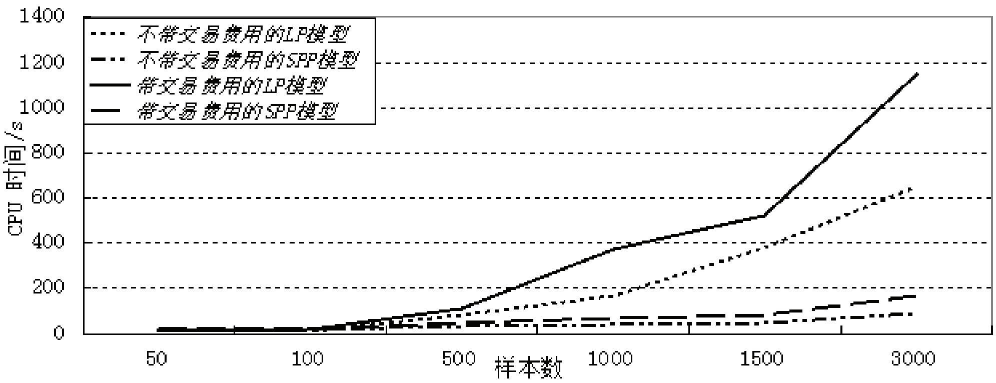

图3　LP模型与SPP模型的CPU时间

§5.　结　　论

本文构建了带有交易费用的二阶随机占优投资组合优化模型. 该模型不需要对投资者的效用函数和风险资产收益的分布作任何假设, 就可以确保风险厌恶投资者所做的选择都会随机占优于一个基准值, 从而可以规避高风险投资, 并且模型将交易费用也考虑进来, 更加符合投资组合风险控制的实际情况. 针对优化模型的求解, 我们先用样本平均值近似方法将带有随机变量的期望收益函数离散化, 使原问题转化为一般的带有有限约束的非线性规划问题, 然后设计一个精确罚函数来处理有限约束条件, 用一种光滑化技术处理模型中非光滑的加函数和罚函数. 数值结果表明: 基于线性规划方法得到的模型的维数严重依赖于样本数, 当样本数很大时, 模型的求解有一定的困难. 而用光滑化罚函数方法得到模型的

维数不依赖于样本, 并且该模型能得到优化问题的全局最优解. 通过比较光滑罚函数方法和线性规划方法的数值结果, 我们发现光滑罚函数方法具有更好的计算性能, 并且两种方法都能有效求解投资组合优化模型, 能为投资者更好地规避风险提供参考和决策依据. 通过对比带有交易费用和不带交易费用的二阶随机占优模型的数值结果, 我们发现股票的交易费用对模型的最优解有一定的影响, 带有交易费用的风险控制模型能更好的为投资者提供决策参考.

参 考 文 献

[1] Markowitz H. Portfolio selection [J]. *J. Finance*, 1952, **7(1)**: 77–91.

[2] 伊博, 李仲飞, 曾燕. 随机波动率市场存在股票误价时的最优投资策略 [J]. *应用概率统计*, 2013, **29(3)**: 261–274.

[3] 常浩, 荣喜民. 负债情形下效用投资组合选择的最优控制 [J]. *应用概率统计*, 2012, **28(5)**: 457–470.

[4] Bawa V S, Lindenberg E B. Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework [J]. *J. Financ. Econ.*, 1977, **5(2)**: 189–200.

[5] Fishburn P C. Mean-risk analysis with risk associated with below target returns [J]. *Amer. Econ. Rev.*, 1977, **67(2)**: 116–126.

[6] 张赟, 周圣, 史本山. 基于随机占优准则的投资组合保险策略比较分析 [J]. *统计与决策*, 2014, **2014(24)**: 55–57.

[7] 李昊. 基于概率权重函数和随机占优准则的开放式基金评级 [J]. *中国管理科学*, 2013, **21(1)**: 23–30.

[8] Dentcheva D, Ruszczyński A. Portfolio optimization with stochastic dominance constraints [J]. *J. Bank. Financ.*, 2006, **30(2)**: 433–451.

[9] Drapkin D, Schultz R. An algorithm for stochastic programs with first-order dominance constraints induced by linear recourse [J]. *Discrete Appl. Math.*, 2010, **158(4)**: 291–297.

[10] Meskarian R, Xu H F, Fliege J. Numerical methods for stochastic programs with second order dominance constraints with applications to portfolio optimization [J]. *European J. Oper. Res.*, 2012, **216(2)**: 376–385.

[11] 孙海琳. 随机优化中基于样本风险测度及分布鲁棒的不确定性研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.

[12] Gollmer R, Neise F, Schultz R. Stochastic programs with first-order dominance constraints induced by mixed-integer linear recourse [J]. *SIAM J. Optim.*, 2008, **19(2)**: 552–571.

[13] Dentcheva D, Martinez G. Two-stage stochastic optimization problems with stochastic ordering constraints on the recourse [J]. *European J. Oper. Res.*, 2012, **219(1)**: 1–8.

[14] Haskell W B, Jain R. Stochastic dominance-constrained Markov decision processes [J]. *SIAM J. Control Optim.*, 2013, **51(1)**: 273–303.

[15] Liu Y C, Xu H F. Stability and sensitivity analysis of stochastic programs with second order dominance constraints [J]. *Stochastic Programming E-Print Series*, 2010, **2010(No. 3)**: 1–24.

[16] Liu Y C, Xu H F. Stability analysis of stochastic programs with second order dominance constraints [J]. *Math. Program.*, 2013, **142(1-2)**: 435–460.

[17] 埃尔顿, 格鲁伯, 布朗, 等. *现代投资组合理论和投资分析* [M]. 6版. 北京: 中国人民大学出版社, 2006.

[18] Peng J M, Lin Z H. A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problems [J]. *Math. Program.*, 1999, **86(3)**: 533–563.

[19] Tong X J, Qi L Q, Wu F, et al. A smoothing method for solving portfolio optimization with CVaR and applications in allocation of generation asset [J]. *Appl. Math. Comput.*, 2010, **216(6)**: 1723–1740.

[20] Shapiro A. Monte Carlo sampling methods [J]. *Handbooks in Operations Research and Management Science: Stochastic Programming*, 2003, **10**: 353–425.

Portfolio Model of Risk Management with Second Order Stochastic Dominant Constraints and Transaction Costs

YANG Liu SHEN FeiFei

(*School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, 411105, China*)

Abstract: In this paper, we introduced a transaction costs function and established a portfolio model of risk management with second stochastic dominance constraints. This model does not need to make any assumptions about the utility function of the investors and the distribution of the risk assets income, and it can ensure that the choices of the risk-averse investor can be randomly better than a reference value, so it can avoid the high risk investment. We provide a smoothing penalty sample average approximation method for solving this optimization problem. We prove that the smoothing penalty problem is equivalent to the original problem. Numerical results prove that the model and the method are efficient.

Keywords: second order stochastic dominance; transaction costs; smoothing method; portfolio optimization; sample average approximation

2010 Mathematics Subject Classification: 93E20