应用概率统计　第 33 卷
第 5 期　2017 年 10 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Oct., 2017, Vol. 33, No. 5, pp. 467-474
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2017.05.003

行为 NA 随机变量阵列加权和完全收敛性的等价条件 *

张立君　　郭明乐⋆

(安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖, 241003)

摘　要: 本文利用 Chen 等[14] 所获得的随机变量阵列加权和完全收敛的充分条件, 建立了随机变量阵列加权和完全收敛的等价条件, 推广了 Liang[11] 的结果. 同时我们采用和 Liang 不同的证明方法, 极大地简化了证明过程, 并在此基础上拓展了 Gut[13] 关于独立随机变量 Cesàro 和的完全收敛性结论.

关键词: 完全收敛性; NA 随机变量; 加权和; Cesàro 和

中图分类号: O211.4

英文引用格式: Zhang L J, Guo M L. Equivalent conditions of complete convergence for weighted sums for arrays of row-wise negatively associated random variables [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(5): 467–474. (in Chinese)

§1. 引　　言

完全收敛的概念是 Hsu 和 Robbins[1] 引入的. 称概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$ 上的随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 完全收敛于常数 C, 如果对任意的 $\epsilon>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n-C|>\epsilon)<\infty$. 在完全收敛的定义下, 根据 B-C 引理可知 $X_n\to C$ a.s., 且当 X_n 相互独立时, 几乎处处收敛等价于完全收敛, 因此完全收敛的应用更加广泛. Hsu 和 Robbins[1] 证明了独立同分布随机变量方差和有限的条件下, 样本均值完全收敛于总体均值. Erdös[2] 证明了逆定理. Baum 和 Katz[3] 证明了对任意的 $\epsilon>0$, 零均值的随机变量序列 $\{X, X_n, n\geqslant 1\}$ 在独立同分布条件下, $\mathsf{E}|X|^{p/r}<\infty$ $(p>1,\ 1/2<r<1)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{p-2}\mathsf{P}\big(\big|\sum\limits_{i=1}^{\infty}X_i\big|>\epsilon n^r\big)<\infty$ 相互等价. 大量的定理和证明完善了完全收敛性质, 完全收敛性被运用到各种相依型随机变量的研究中.

本文主要研究行为 NA 随机变量的完全收敛性, 首先我们来介绍相关概念及有关定理.

定义 1　称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 尾概率有界于随机变量 X (记为 $\{X_n\}\prec X$), 如果存在正常数 C, 使得对充分大的 $x\geqslant 0$, 有 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\mathsf{P}(|X_n|\geqslant x)\leqslant C\mathsf{P}(|X|\geqslant x)$.

定义 2　称随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n\geqslant 2)$ 是负相协 (negatively associated, 以下简称 NA) 的, 如果对 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的任意两个非空不相交子集 $A=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ 与 $B=$

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11271020、11201004)、安徽省自然科学基金项目 (批准号: 1508085MA11) 和安徽省教育厅自然科学研究基金重点项目 (批准号: KJ2014A083) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: mlguo@ahnu.edu.cn.

本文 2015 年 5 月 21 日收到, 2015 年 12 月 27 日收到修改稿.

$\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$, $k+m<n$, 都有 $\mathsf{Cov}\,(f_1(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}), f_2(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_m})) \leqslant 0$, 其中 f_1, f_2 是任意两个对每个变元均非降的函数, 且协方差存在.

称随机变量序列 $\{X_n,\, n\geqslant 1\}$ 是 NA 的, 如果对任意 $n\geqslant 2$, 随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是 NA 的. 称随机变量阵列 $\{X_{ni},\, i\geqslant 1,\, n\geqslant 1\}$ 是行为 NA 的, 如果对任意 $n\geqslant 1$, 随机变量序列 $\{X_{ni},\, i\geqslant 1\}$ 是 NA 的.

NA 概念由 Alam 和 Saxena[4] 首次提出, Joag-Dev 和 Proschan[5], Block 等[6] 系统地研究了 NA 性质. 由于大量的多元分布是 NA 的, NA 随机变量在概率论和随机过程以及统计学中的作用日益突出, 对它的研究也显得尤为重要. 至今, 已经有一系列相对完善的理论成果可供读者进一步学习, 如 Joag-Dev 和 Proschan[5] 获得了 NA 基本性质, Matula[7] 证明了三级数定理, Shao 和 Su[8] 研究了关于 NA 随机变量的重对数定律, Shao[9] 得出了 NA 随机变量的 R- 不等式和 Kolmogorov 型不等式. 此外, Liang 和 Su[10], Liang[11], 以及 Baek 等[12] 都研究了 NA 随机变量的完全收敛性. 下面是 Liang[11] 得出的定理:

定理 A $\beta\geqslant -1$, $\{X_n,\, n\geqslant 1\}$ 是 NA 随机变量序列且 $\{X_n\}\prec X$. $\{a_{ni}=c_{ni}(i/n)^{\beta}\cdot(1/n),\, 1\leqslant i\leqslant n,\, n\geqslant 1\}$ 是三角实阵列, 对任意的 $n\geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}=1$, 且对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 存在常数 C_1 和 C_2 使得 $0<C_1\leqslant c_{ni}\leqslant C_2<\infty$. $r>1$, 若

$$\begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(r-1)/(1+\beta)}<\infty, & -1<\beta<-1/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r}\ln(1+|X|)<\infty, & \beta=-1/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r}<\infty, & \beta>-1/r; \\ \mathsf{E}X_n=0, \end{cases} \tag{1}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i\Big|>\epsilon\Big)<\infty, \qquad \forall\,\epsilon>0. \tag{2}$$

反之, $\{X, X_n,\, n\geqslant 1\}$ 是同分布的 NA 随机变量序列, 若满足 (2), 则 (1) 成立.

Cesàro 和是常用的随机变量的加权和, 权系数为 A_n^{α}. 定义

$$A_n^{\alpha}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}, \qquad n=1,2,\ldots \text{ 且 } A_0^{\alpha}=1,$$

这里 $\alpha>-1$. 注意到 $A_n^{\alpha}\sim n^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$, 即当 $n\to\infty$ 时, 符号两边比值的极限为 1.

Gut[13] 证明了独立同分布随机变量序列 Cesàro 和的完全收敛性.

定理 B $\{X, X_n,\, n\geqslant 1\}$ 是独立同分布随机变量序列, 设 $r>1$ 且 $\mathsf{E}X=0$, 若

$$\begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(r-1)/\alpha}<\infty, & 0<\alpha<1-1/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r}\ln(1+|X|)<\infty, & \alpha=1-1/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r}<\infty, & 1-1/r<\alpha\leqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

则
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1}X_i\Big| > \epsilon A_n^{\alpha}\Big) < \infty, \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{4}$$
反之, 若 (4) 成立, 则 (3) 成立且 $\mathsf{E}X = 0$.

本文的主要目的是把上述定理推广到行为 NA 随机变量阵列并扩大 β 的取值范围. 此外, 就证明方法而言, 本文所采用的证明方法与 Liang[11] 的截尾方法不同, 证明过程大大简化. 在叙述本文的主要结论之前, 我们先对常用符号进行说明. 文中 C 代表正常数, 在不同位置取值不同. 定义 $\ln x = \ln\max(x, \mathrm{e})$. $I(A)$ 是指集合 A 上的示性函数. $a_n \ll b_n$ 表示存在正常数 C 使得 $a_n \leqslant Cb_n$, $a_n \approx b_n$代表存在正常数 C_1 和 C_2 使得 $C_1b_n \leqslant a_n \leqslant C_2b_n$.

下面给出本文证明所需引理.

引理 3[14]　$\{X_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是行为 NA 随机变量阵列, $\{b_n, n \geqslant 1\}$ 是正实数序列. 若

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{|X_{ni}| > \epsilon\} < \infty, \forall \epsilon > 0,$

(ii) 对某个 $\delta > 0$, 存在 $q \geqslant 1$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\big(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{Var}\, X_{ni}I\{|X_{ni}| \leqslant \delta\}\big)^q < \infty,$

则
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mathsf{P}\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(X_{ni} - \mathsf{E}X_{ni}I\{|X_{ni}| \leqslant \delta\})\Big| > \epsilon\Big\} < \infty, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

引理 4[10]　$\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 NA 随机变量序列, $\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是实阵列, 若对充分大的 n 和任意小的 $\delta > 0$ 满足
$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{ni}X_i| \geqslant \epsilon\Big) < \delta, \qquad \forall \epsilon > 0,$$
则对充分大的 n 有
$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(|a_{ni}X_i| \geqslant \epsilon) \ll \mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{ni}X_i| \geqslant \epsilon\Big).$$

§2.　主要定理及证明

定理 5　设 $\{X, X_{ni}, i \geqslant 1, n \geqslant 1\}$ 是同分布的行为 NA 随机变量阵列. $r > 1$, $p > 1/2$, $p+\beta > 0$, 当 $1/2 < p \leqslant 1$ 时假定 $\mathsf{E}X = 0$. $\{a_{ni} \approx (i/n)^{\beta}(1/n)^p, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是三角实阵列. 则下列式子等价:

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(r-1)/(p+\beta)} < \infty, & -p < \beta < -p/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r/p}\ln(1+|X|) < \infty, & \beta = -p/r; \\ \mathsf{E}|X|^{r/p} < \infty, & \beta > -p/r, \end{cases} \tag{5}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_{ni}\Big| > \epsilon\Big) < \infty, \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{6}$$

证明: 先证 (5) $\Rightarrow$ (6). 对任意的 $\epsilon>0$ 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(|a_{ni}X_{ni}|>\epsilon)\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}i^{-\beta}n^{p+\beta}\Big)\\
\approx&\int_1^{\infty}x^{r-2}\int_1^{x}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}x^{p+\beta}y^{-\beta}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\qquad(\text{令 } u=x^{p+\beta}y^{-\beta},v=y)\\
=&\frac{1}{p+\beta}\int_1^{\infty}\mathrm{d}u\int_1^{u^{1/p}}u^{(r-1)/(p+\beta)-1}v^{\beta(r-1)/(p+\beta)}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}v\\
\approx&\begin{cases}\displaystyle\int_1^{\infty}u^{(r-1)/(p+\beta)-1}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u\ll\mathsf{E}|X|^{(r-1)/(p+\beta)}, & -p<\beta<-p/r;\\ \displaystyle\int_1^{\infty}u^{r/p-1}\ln u\,\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u\ll\mathsf{E}|X|^{r/p}\ln(1+|X|), & \beta=-p/r;\\ \displaystyle\int_1^{\infty}u^{r/p-1}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u\ll\mathsf{E}|X|^{r/p}, & \beta>-p/r\end{cases}\\
<&\infty.
\end{aligned}\tag{7}
$$

(5) 蕴含了 $\mathsf{E}|X|^{r/p}<\infty$. 当 $r/p\geqslant 2$ 时, 显然有 $\mathsf{E}|X|^2<\infty$. 注意到 $p+\beta>0$, $p>1/2$, 则对充分大的 $q>1$ 有 $r-2-q(p+\beta)<-1$, $r-2-q(p-1/2)<-1$. 于是对某个 $\delta>0$, 存在 $q>1$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(a_{ni}X_{ni})^2I\{|a_{ni}X_{ni}|\leqslant\delta\}\Big)^q\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\mathsf{E}X^2\Big)^q\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\Big)^q\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}i^{2\beta}n^{-2(p+\beta)}\Big)^q\\
\approx&\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-2q(p+\beta)}, & -p<\beta<-1/2;\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-2q(p-1/2)}(\ln n), & \beta=-1/2;\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2-2q(p-1/2)}, & \beta>-1/2\end{cases}\\
<&\infty.
\end{aligned}\tag{8}
$$

当 $r/p<2$ 时, 注意到 $p+\beta>0$, $r>1$, $r/p>0$, 同理, 对充分大的 q 有 $r-2-q(p+\beta)r/p<-1$, $r-2-q(r-1)<-1$. 于是有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(a_{ni}X_{ni})^2I\{|a_{ni}X_{ni}|\leqslant\delta\}\Big)^q\\
\leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\delta^{2-r/p}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}(a_{ni}X)^{r/p}I\{|a_{ni}X|\leqslant\delta\}\Big)^q\\
\ll&\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{r/p}\mathsf{E}X^{r/p}\Big)^q\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{r/p}\Big)^q\ll\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\Big(\sum_{i=1}^{n}i^{\beta r/p}n^{-(p+\beta)r/p}\Big)^q
\end{aligned}
$$

$$\approx \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q(p+\beta)r/p}, & -p<\beta<-p/r; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q(r-1)}(\ln n), & \beta=-p/r; \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-q(r-1)}, & \beta>-p/r \end{cases}$$
$$<\infty. \tag{9}$$

根据 (7), (8), (9), 注意到 $\mathsf{Var}\,X_{ni}\leqslant \mathsf{E}X_{ni}^2$, 由引理 3, 易见

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(a_{ni}X_{ni}-\mathsf{E}a_{ni}X_{ni}I\{|a_{ni}X_{ni}|\leqslant\delta\})\Big|>\epsilon\Big)<\infty, \qquad \forall\,\epsilon>0,$$

下面只需证明对某个 $\delta>0$,

$$I=:\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}a_{ni}X_{ni}I\{|a_{ni}X_{ni}|\leqslant\delta\}\Big|\to 0, \qquad n\to\infty.$$

由 (5) 可知 $\mathsf{E}|X|^{r/p}<\infty$. 当 $p>1$ 时, 存在 $r'>1$ 使得 $1/p<r'/p<\min\{1,r/p\}$, 且 $\mathsf{E}|X|^{r'/p}<\infty$, 则

$$\begin{aligned} I &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|a_{ni}X_{ni}|I\{|a_{ni}X_{ni}|\leqslant\delta\}\leqslant \delta^{1-r'/p}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|a_{ni}X|^{r'/p}I\{|a_{ni}X|\leqslant\delta\} \\ &\ll \sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{r'/p}\mathsf{E}|X|^{r'/p}\ll\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{r'/p}\approx \begin{cases} n^{-(p+\beta)r'/p}, & -p<\beta<-p/r'; \\ n^{-(r'-1)}(\ln n), & \beta=-p/r'; \\ n^{-(r'-1)}, & \beta>-p/r' \end{cases} \\ &\to 0, \qquad n\to\infty. \end{aligned}$$

当 $1/2<p\leqslant 1$ 时, 注意到 $\mathsf{E}X=0$ 且 $r/p>1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}\mathsf{E}a_{ni}X_{ni}I\{|a_{ni}X_{ni}|>\delta\}\Big|\ll\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|a_{ni}X|I\{|a_{ni}X|>\delta\} \\ &\ll \sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|a_{ni}X|^{r/p}I\{|a_{ni}X|>\delta\}\ll\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^{r/p}\approx \begin{cases} n^{-(p+\beta)r/p}, & -p<\beta<-p/r; \\ n^{-(r-1)}(\ln n), & \beta=-p/r; \\ n^{-(r-1)}, & \beta>-p/r \end{cases} \\ &\to 0, \qquad n\to\infty. \end{aligned}$$

接下来我们证明 (6) $\Rightarrow$ (5). 易知 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}X_{ni}|\leqslant 2\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum\limits_{i=1}^{k}a_{ni}X_{ni}\Big|$, 于是由 (6) 立得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_{ni}X_{ni}|>\epsilon\Big)<\infty, \qquad \forall\,\epsilon>0. \tag{10}$$

且 $r>1$ 时, (10) 蕴含了

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}X_{nk}|>\epsilon\Big)\to 0,\qquad n\to\infty. \tag{11}$$

事实上, 当 $r\geqslant 2$ 时, (11) 显然成立. 当 $1<r<2$ 时, 由于 $a_{ni}\approx(i/n)^{\beta}(1/n)^{p}$, 注意到 $\big\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|k^{\beta}X_{nk}|,n\geqslant 1\big\}$ 关于 n 是非降的, 则

$$\begin{aligned}\infty&>\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|k^{\beta}X_{nk}|>\epsilon n^{p+\beta}\Big)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=2^{i}}^{2^{i+1}-1}n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|k^{\beta}X_{nk}|>\epsilon n^{p+\beta}\Big)\\&\geqslant\sum_{i=0}^{\infty}2^{i}2^{(i+1)(r-2)}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{i}}|k^{\beta}X_{nk}|>\epsilon 2^{(i+1)(p+\beta)}\Big)\\&=2^{r-2}\sum_{i=0}^{\infty}2^{i(r-1)}\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{i}}|k^{\beta}X_{nk}|>(\epsilon 2^{p+\beta})2^{i(p+\beta)}\Big).\end{aligned} \tag{12}$$

注意到 $r-1>0$, 由 (12) 可得

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{i}}|k^{\beta}X_{nk}|>\epsilon_1 2^{j(p+\beta)}\Big)\to 0,\qquad\forall\,\epsilon_1>0.$$

则对任意的 n, 存在整数 i 使得 $2^{i}\leqslant n\leqslant 2^{i+1}-1$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{nk}X_{nk}|>\epsilon\Big)\leqslant\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|k^{\beta}X_{nk}|>\frac{\epsilon}{C}n^{p+\beta}\Big)\\\leqslant\,&\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{i+1}}|k^{\beta}X_{nk}|>\frac{\epsilon}{C}2^{i(p+\beta)}\Big)=\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{i+1}}|k^{\beta}X_{nk}|>\frac{\epsilon}{C}2^{-(p+\beta)}2^{(i+1)(p+\beta)}\Big)\to 0.\end{aligned}$$

应用引理 4, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(|a_{ni}X_{ni}|>\epsilon)<\infty,\qquad\forall\,\epsilon>0.$$

类似 (7) 的证明过程, 易知

$$\begin{aligned}\infty&>C+\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(|a_{ni}X_{ni}|>\epsilon)\geqslant C+C\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}i^{-\beta}n^{p+\beta}\Big)\\&\approx\begin{cases}C+C\displaystyle\int_{1}^{\infty}u^{(r-1)/(p+\beta)-1}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u, & -p<\beta<-p/r;\\ C+C\displaystyle\int_{1}^{\infty}u^{r/p-1}\ln u\,\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u, & \beta=-p/r;\\ C+C\displaystyle\int_{1}^{\infty}u^{r/p-1}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}u\Big)\mathrm{d}u, & \beta>-p/r\end{cases}\\&\approx\begin{cases}C+C\mathsf{E}|X|^{(r-1)/(p+\beta)}, & -p<\beta<-p/r;\\ C+C\mathsf{E}|X|^{r/p}\ln(1+|X|), & \beta=-p/r;\\ C+C\mathsf{E}|X|^{r/p}, & \beta>-p/r.\end{cases}\end{aligned}$$

(5) 和 (6) 是等价的. □

注记 6 令 $p=1$, 则定理 5 是 Liang[11] 的结论, 故文中定理是其推广形式, 且无附加限制条件. 定理的证明过程和 Liang 所采用的截尾思想完全不同, 使得证明过程极大地简化. 定理 5 完善了 NA 随机变量的完全收敛性, 使其应用更加广泛.

推论 7 $\{X, X_{ni}, i\geqslant 0, n\geqslant 1\}$ 是同分布的行为 NA 随机变量阵列. $r>1$, $p>1/2$, $0<\alpha\leqslant 1$ 且 $\mathsf{E}X=0$. 则下列式子等价:

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} \mathsf{E}|X|^{(r-1)/(\alpha p)}<\infty, & 0<\alpha<1-1/r;\\ \mathsf{E}|X|^{r/p}\ln(1+|X|)<\infty, & \alpha=1-1/r;\\ \mathsf{E}|X|^{r/p}<\infty, & 1-1/r<\alpha\leqslant 1, \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=0}^{k}(A_{n-i}^{\alpha-1})^p X_{ni}\Big|>\epsilon (A_n^{\alpha})^p\Big)<\infty, \qquad \forall\epsilon>0. \tag{14}$$

证明: 令定理 5 中的 $a_{ni}=(A_{n-i}^{\alpha-1}/A_n^{\alpha})^p$ 及 $\beta=p(\alpha-1)$, 注意到 $A_0^{\alpha-1}=1$ 且 $A_n^{\alpha}\approx n^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)$, 于是有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n}\mathsf{P}\big(|(A_{n-i}^{\alpha-1})^p X_{ni}|>\epsilon(A_n^{\alpha})^p\big)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=0}^{n}\mathsf{P}\big(|(A_{i}^{\alpha-1})^p X|>\epsilon(A_n^{\alpha})^p\big)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\big(|X|>\epsilon(A_n^{\alpha})^p\big)+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\big(|(A_{i}^{\alpha-1})^p X|>\epsilon(A_n^{\alpha})^p\big)\\ \leqslant&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathsf{P}\Big(|X|>\frac{\epsilon}{C}n^{\alpha p}\Big)+\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big(i^{p(\alpha-1)}|X|>\frac{\epsilon}{C}n^{\alpha p}\Big)\\ <&\infty. \end{aligned}$$

上式和的第一项收敛当且仅当 $\mathsf{E}|X|^{(r-1)/(\alpha p)}<\infty$, 第二项收敛的证明参考 (7).

由 $\sum_{i=0}^{n}A_{n-i}^{\alpha-1}=1+\sum_{i=1}^{n}A_i^{\alpha-1}$ 可得

$$\sum_{i=0}^{n}a_{ni}=\sum_{i=0}^{n}(A_{n-i}^{\alpha-1}/A_n^{\alpha})^p=\Big[1+\sum_{i=1}^{n}(A_i^{\alpha-1})^p\Big]\Big/(A_n^{\alpha})^p\approx\frac{1}{n^{\alpha p}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{p(\alpha-1)}}{n^{\alpha p}}.$$

其余证明与定理 5 类似, 故省略. □

参 考 文 献

[1] Hsu P L, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers [J]. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1947, **33(2)**: 25–31.

[2] Erdös P. On a theorem of Hsu and Robbins [J]. *Ann. Math. Statist.*, 1949, **20(2)**: 286–291.

[3] Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers [J]. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, **120(1)**: 108–123.

[4] Alam K, Saxena K M L. Positive dependence in multivariate distributions [J]. *Comm. Statist. - Theory Methods*, 1981, **10(12)**: 1183–1196.

[5] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications [J]. *Ann. Statist.*, 1983, **11(1)**: 286–295.

[6] Block H W, Savits T H, Shaked M. Some concepts of negative dependence [J]. *Ann. Probab.*, 1982, **10(3)**: 765–772.

[7] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 1992, **15(3)**: 209–213.

[8] Shao Q M, Su C. The law of the iterated logarithm for negatively associated random variables [J]. *Stochastic Process. Appl.*, 1999, **83(1)**: 139–148.

[9] Shao Q M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables [J]. *J. Theoret. Probab.*, 2000, **13(2)**: 343–356.

[10] Liang H Y, Su C. Complete convergence for weighted sums of NA sequences [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 1999, **45(1)**: 85–95.

[11] Liang H Y. Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables [J]. *Statist. Probab. Lett.*, 2000, **48(4)**: 317–325.

[12] Baek J I, Kim T S, Liang H Y. On the convergence of moving average processes under dependent conditions [J]. *Aust. N. Z. J. Stat.*, 2003, **45(3)**: 331–342.

[13] Gut A. Complete convergence and Cesàro summation for i.i.d. random variables [J]. *Probab. Theory Related Fields*, 1993, **97(1-2)**: 169–178.

[14] Chen P Y, Hu T C, Liu X J, et al. On complete convergence for arrays of row-wise negatively associated random variables [J]. *Theory Probab. Appl.*, 2008, **52(2)**: 323–328.

Equivalent Conditions of Complete Convergence for Weighted Sums for Arrays of Row-Wise Negatively Associated Random Variables

ZHANG LiJun GUO MingLe

(*School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu, 241003, China*)

Abstract: In this article, applying the result of complete convergence for negatively associated (NA) random variables which is obtained by Chen et al. [14], the equivalent conditions of complete convergence for weighted sums of arrays of row-wise negatively associated random variables is investigated. As a result, the corresponding results of Liang [11] is generalized, moreover, the proof procedure is simplified greatly which is different from truncation method of Liang's. Thus, Gut's [13] result on Cesàro summation of i.i.d. random variables is extended.

Keywords: complete convergence; NA random variables; weighted sums; Cesàro summation

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15