应用概率统计 第 33 卷
第 5 期 2017 年 10 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Oct., 2017, Vol. 33, No. 5, pp. 508-516
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2017.05.007

一类 Cox 模型参数的经验 Bayes 的双侧检验 *

黄金超
(滁州职业技术学院基础部, 滁州, 239000)

凌能祥
(合肥工业大学数学学院, 合肥, 230009)

摘 要: 本文在 “平方损失” 下, 研究了一类 Cox 模型参数的经验 Bayes (EB) 双侧检验问题, 首先利用概率密度函数的递归核估计, 构造了参数的经验 Bayes 检验函数, 在适当的条件下证明了它的渐近最优 (a.o.) 性, 并获得了其收敛速度, 最后给出满足定理条件的例子.

关键词: Cox 模型; 经验 Bayes 检验; 递归核估计; 渐近最优性; 收敛速度; 双侧检验

中图分类号: O212.1

英文引用格式: Huang J C, Ling N X. Empirical Bayes two-sided test for the parameter of Cox models [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 2017, 33(5): 508–516. (in Chinese)

§1. 引 言

经验 Bayes (EB) 检验问题在文献中已有许多研究, 如文献 [1–6] 等对其做了不同程度的工作, 彭家龙等 [7] 在 “线性损失” 下研究了 Cox 模型参数的经验 Bayes 单侧检验, 在适当的条件下获得的收敛速度的阶可任意接近 $O(n^{-1/2})$. 韦来生 [8,9] 分别研究了一类连续型和离散型单参数指数族参数的双侧的经验 Bayes 检验问题, 并最先把单侧 EB 检验构造方法推广到双侧 EB 检验问题. 张倩和韦来生 [10] 在 “加权损失函数” 下研究了刻度指数族参数的经验 Bayes 双边检验问题. 但是, 目前几乎所有这些研究 EB 检验问题的文献, 都是利用密度函数的普通核估计来构造参数的 EB 检验. 基于上述文献研究结果, 本文将在 “平方损失” 下利用密度函数的递归核估计来讨论一类广义指数族 Cox 模型参数的经验 Bayes 双侧检验问题. 本文采用 “平方损失” 和递归核估计, 研究参数的双侧检验, 这是与文献 [7] 的主要不同之处.

考虑 Cox 模型 (见文献 [7]): 设随机变量 X 条件概率密度为

$$f(x\,|\,\theta)=\theta q(x)\mathrm{e}^{-\theta Q(x)}, \tag{1}$$

其中 $q(x)$ 和 $Q(x)$ 为连续函数且 $q(x)=Q'(x)>0$, $Q(x)$ 非负, $\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\infty$, θ 为模型参数, 样本空间为 $\chi=\{x\,|\,x>0\}$, 参数空间为 $\Omega=\{\theta>0\,|\,\int_0^{\infty}f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}x=1\}$.

*安徽省高校自然科学基金重点项目 (批准号: KJ2015A345)、安徽省高校优秀青年骨干人才国内访学研修项目 (批准号: gxfx2017225)、滁州职业技术学院院级规划重点项目 (批准号: YJZ-2016-01) 和滁州职业技术学院质量工程教学研究项目 (批准号: zlgc2015044) 联合资助.

本文 2016 年 3 月 3 日收到, 2017 年 2 月 17 日收到修改稿.

本文讨论模型 (1) 式中参数 θ 的如下 EB 双侧检验:

$$H_0: \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \longleftrightarrow H_1: \theta < \theta_1 \ \text{ or } \ \theta > \theta_2, \tag{2}$$

其中 $\theta_1 > 0$ 和 $\theta_2 > 0$ 为给定的正常数. 如果取 $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2)/2$ 和 $\gamma_0 = (\theta_2 - \theta_1)/2$, 则双侧检验问题 (2) 等价于:

$$H_0^*: |\theta_0 - \theta| \leqslant \gamma_0 \longleftrightarrow |\theta_0 - \theta| > \gamma_0. \tag{3}$$

对检验函数 (3), 取下列的 “平方损失” 函数:

$$L(\theta, d_j) = (1-j)a[(\theta-\theta_0)^2 - \gamma_0^2]I_{[|\theta-\theta_0|>\gamma_0]} + ja[\gamma_0^2 - (\theta_0-\theta)^2]I_{|\theta-\theta_0|\leqslant\gamma_0]}, \tag{4}$$

其中 $a > 0$ 且为常数, $D = \{d_0, d_1\}$ 为行动空间, d_0 表示接受 H_0^*, d_1 表示否定 H_0^*, $I_{[A]}$ 表示事件 A 的示性函数.

以上双侧检验构造方法最早由文献 [8] 对连续型单参数指数族提出来的.

设

$$\delta(x) = \mathsf{P}(\text{接受 } H_0^* \,|\, X = x) \tag{5}$$

为随机化判别函数, 令参数 θ 的先验分布为 $G(\theta)$, 则 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$\begin{aligned} R(\delta, G) &= \int_\Omega \int_\chi [L(\theta, d_0) f(x\,|\,\theta)\delta(x) + L(\theta, d_1) f(x\,|\,\theta)(1-\delta(x))]\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) \\ &= \int_\Omega \int_\chi [L(\theta, d_0) - L(\theta, d_1) f(x\,|\,\theta)\delta(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) + \int_\Omega \int_\chi L(\theta, d_1) f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) \\ &= a\int_\chi \alpha(x)\delta(x)\mathrm{d}x + C_G, \end{aligned} \tag{6}$$

这里

$$C_G = \int_\Omega \int_\chi L(\theta, d_1) f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) = \int_\Omega L(\theta, d_1)\mathrm{d}G(\theta), \tag{7}$$

$$\alpha(x) = \int_\Omega [(\theta-\theta_0)^2 - \gamma_0^2] f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta), \tag{8}$$

此处

$$f(x) = \int_\Omega f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta) = \int_\Omega \theta q(x)\mathrm{e}^{-\theta Q(x)}\mathrm{d}G(\theta) \tag{9}$$

为 r.v. X 的边缘分布, 故由 (8) 式经计算可得

$$\alpha(x) = p_1(x) f^{(2)}(x) + p_2(x) f^{(1)}(x) + p_3(x) f(x). \tag{10}$$

其中 $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x)$ 分别表示 $f(x)$ 的一阶、二阶导数, 且

$$p_1(x) = \frac{1}{q^2(x)}, \qquad p_2(x) = -\frac{2\theta_0}{q(x)} - \frac{3q'(x)}{q^3(x)},$$

$$p_3(x)=\frac{3(q'(x))^2}{q^4(x)}-\frac{q''(x)}{q^3(x)}-\frac{2\theta_0 q'(x)}{q^2(x)}+\theta_0^2-\gamma_0^2.$$

由 (6) 式得 Bayes 判决函数为

$$\delta_G(x)=\begin{cases}1, & \alpha(x)\leqslant 0;\\ 0, & \alpha(x)>0.\end{cases}\tag{11}$$

其 Bayes 风险为

$$R(G)=\inf_{\delta}R(\delta,G)=R(\delta_G,G)=a\int_{\mathcal{X}}\alpha(x)\delta_G(x)\mathrm{d}x+C_G.\tag{12}$$

在 (12) 式中, 当 $G(\theta)$ 已知, 且 $\delta(x)=\delta_G(x)$ 是可以达到的, 但 $G(\theta)$ 未知, 所以 $\delta_G(x)$ 没有使用价值, 因此引入 EB 方法.

§2. EB检验函数的构造

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 和 X 是 (i.i.d.) 样本, X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 和 X 具有共同的边缘密度如 (9) 式所示, 通常称 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为历史样本, X 为当前样本.

令 $f(x)$ 为 X_1 的概率密度函数, 独立同分布样本 (i.i.d.) 作如下假定:

(A) $f(x)\in C_{s,\alpha}$, $x\in(0,+\infty)$.

其中 $C_{s,\alpha}$ 为实数集 R^1 上概率密度函数类, 连续且 s 阶导数存在, 其绝对值不超过 α, $s\geqslant 5$, $s\in N$.

令 $K_r(x)$ $(r=0,1,2)$ 是有界的 Borel 可测函数, 在区间 $(0,1)$ 之外为 0, 且满足条件 (B):

(B$_1$) $(t!)^{-1}\int_0^1 y^tK_r(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}1, & t=0;\\ 0, & t=1,2,\ldots,s-1,\ s\geqslant 5,\ s\in N.\end{cases}$

(B$_2$) $K_r(x)$ 在 R^1 上是可微的 (有限点集 E_0 除外), 且

$$\sup_{x\in R^1-E_0}|K_r'(x)|\leqslant C<\infty.$$

类似文献 [11] 定义 $f(x)$ 的递归核估计如下:

$$f_n^{(r)}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^{1+r}}K_r\Big(\frac{X_i-x}{h_i}\Big),\tag{13}$$

其中 $\{h_n\}$ 递减且 $h_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, $K_r(x)$ 是满足条件 (B) 的核函数.

注记 1 如果将公式 (13) 中的 h_i 换成 h_n, 则 $f(x)$ 的递归核估计 $f_n^{(r)}(x)$ 变成普通的核估计.

由 (10) 式和 (13) 式定义 $\alpha(x)$ 的估计量:

$$\alpha_n(x) = p_1(x) f_n^{(2)}(x) + p_2(x) f_n^{(1)}(x) + p_3(x) f_n(x), \tag{14}$$

故 EB 检验函数定义为

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1, & \alpha_n(x) \leqslant 0; \\ 0, & \alpha_n(x) > 0. \end{cases} \tag{15}$$

令 E_n 表示对随机序列 (r.v.) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的联合分布求均值, 则 $\delta_n(x)$ 的全面 Bayes 风险为

$$R_n = R_n(\delta_n, G) = a \int_x \alpha(x) \mathsf{E}_n[\delta_n(x)] \mathrm{d}x + C_G. \tag{16}$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R(G)$, 则称 $\delta_n(x)$ 为 a.o. 的 EB 检验函数, 如果 $R_n - R(G) = O(n^{-q})$, $q > 0$, 称 EB 检验 $\delta_n(x)$ 的收敛速度阶为 $O(n^{-q})$, 为证明 $\delta_n(x)$ 的收敛速度, 给出以下引理.

文中 $c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ 表示不依赖 n 正常数, 即使在同一式子中亦可能取不同的数值.

引理 2　设 $f_n^{(r)}(x)$ 由 (13) 式定义, $s \geqslant 5$, $s \in N$, 其中 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 i.i.d. 样本序列, 如果条件 (A) 和 (B) 成立且 $f_n^{(r)}(x)$ 连续, $r = 0, 1, 2$. 对 $\forall x \in \chi$

(i) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{i=1}^n h_i^{s-r} = 0$ 且 $n h_n^{2r+1} \to \infty$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 = 0.$$

(ii) 当取 $h_n = n^{-1/[2(s-2)]}$ 时, 对 $0 < \lambda \leqslant 1$, 则有

$$\mathsf{E}_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} \leqslant c n^{-\lambda(s-r-2.5)/(s-2)}.$$

证明:　先证结论 (i). 由 $\mathrm{C_r}$ 不等式可知, 对 $r = 0, 1, 2$ 有

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 &\leqslant c_1 |\mathsf{E}_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 + c_2 [\mathsf{Var}\,(f_n^{(r)}(x)] \\ &\triangleq c_1 I_1^2 + c_2 I_2. \end{aligned} \tag{17}$$

由 (13) 式和条件 (B), 可知

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} \mathsf{E}_n \Big(K_r \Big(\frac{X_i - x}{h_i} \Big) \Big) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} \int_x^{x+h_i} K_r \Big(\frac{y - x}{h_i} \Big) f(y) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^r} \int_0^1 K_r(t) f(x + t h_i) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{18}$$

由 Taylor 展开得

$$f(x + t h_n) = f(x) + \sum_{l=1}^{s-1} f^{(l)}(x) \frac{(t h_n)^l}{l!} + f^{(s)}(x^*) \frac{(t h_n)^s}{s!} \qquad (x \leqslant x^* \leqslant x + t h_n), \tag{19}$$

将 (19) 式代入 (18) 式, 得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^r}\Big[f^{(r)}(x)h_i^r + \int_0^1 K_r(t)f^{(s)}(x^*)\frac{(th_i)^s}{s!}\mathrm{d}t\Big]\\ &= f^{(r)}(x) + \frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n} h_i^{s-r}\int_0^1 K_r(t)f^{(s)}(x^*)\frac{t^s}{s!}\mathrm{d}t\Big]. \qquad (20)\end{aligned}$$

由 $f(x)\in C_{s,\alpha}$ 和 $|K(t)|\leqslant C$, 知

$$I_1 = |\mathsf{E}_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \leqslant c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^{s-r}, \qquad (21)$$

$$\begin{aligned}I_2 = \mathsf{Var}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_n^{1+r}}K_r\Big(\frac{X_i-x}{h_i}\Big)\Big] &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2h_i^{2+2r}}\mathsf{E}_n\Big[K_r\Big(\frac{X_i-x}{h_i}\Big)\Big]^2\\ = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2h_i^{2+2r}}\int_x^{x+h_i}K_r^2\Big(\frac{y-x}{h_i}\Big)f(y)\mathrm{d}y &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^{1+2r}}\int_0^1 K_r^2(t)f(x+th_i)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再由 $f(x)\in C_{s,\alpha}$ 及 $|K(t)|\leqslant C$, h_n 递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$, 知

$$I_2 \leqslant c(nh_n^{1+2r})^{-1}. \qquad (22)$$

由 (21) 式知, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}h_i^{s-r}=0$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} I_1^2 = 0. \qquad (23)$$

由 (22) 式知, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}nh_n^{1+2r}=\infty$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = 0. \qquad (24)$$

将 (23) 式和 (24) 式代入 (17) 式, 结论 (i) 成立.

下面证明结论 (ii). 由 $\mathrm{C_r}$ 不等式可知,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_n|f_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^{2\lambda} &\leqslant c_1|\mathsf{E}_nf_n^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|^{2\lambda} + c_2[\mathsf{Var}\,(f_n^{(r)}(x)]^{\lambda}\\ &\triangleq c_1I_1^{2\lambda}+c_2I_2^{\lambda}, \qquad (25)\end{aligned}$$

取 $h_i=i^{-1/[2(s-2)]}$ 时, 可知 $h_i=i^{-1/[2(s-2)]}\leqslant i^{-1/[2(s-r)]}$ $(r=0,1,2)$, 由 (21) 式可得

$$I_1 \leqslant c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_i^{s-r} \leqslant c\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i^{-1/2} \leqslant c\frac{1}{n}\int_0^n x^{-1/2}\mathrm{d}x \leqslant cn^{-1/2}.$$

故有

$$I_1^{2\lambda} \leqslant cn^{-\lambda}. \qquad (26)$$

由 (22) 式取 $h_i=i^{-1/[2(s-2)]}$ 时, 有

$$I_2^{\lambda} \leqslant c(nh_n^{1+2r})^{-\lambda} \leqslant cn^{-\lambda(s-r-2.5)/(s-2)}. \qquad (27)$$

将 (26) 式和 (27) 式代入 (25) 式, 结论 (ii) 成立. □

注记 3　当 $\lambda \to 1$, $s \to \infty$ 时, $O(n^{-\lambda(s-r-2.5)/(s-2)})$ 可无限接近 $O(n^{-1})$.

引理 4　令 $R(G)$ 和 R_n 分别由 (12) 和 (16) 式给出, 则

$$0 < R_n - R(G) \leqslant a \int_\chi |\alpha(x)| \mathsf{P}(|\alpha_n(x) - \alpha(x)| \geqslant |\alpha(x)|) \mathrm{d}x.$$

证明:　见文献 [1] 的引理 1.　□

§3.　EB检验函数的渐近性和收敛速度

定理 5　设 $\delta_n(x)$ 由 (15) 式定义, 其中 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 i.i.d. 样本, 假定 (A) 和 (B) 成立, $s \geqslant 5$, $s \in N$, $r = 0, 1, 2$, 若

(i)　$\{h_n\}$ 正数递减序列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{s-r} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n h_n^{1+2r} = \infty$;

(ii)　$\int_\Omega \theta^2 \mathrm{d}G(\theta) < \infty$;

(iii)　$f_n^{(r)}(x)$ 为 x 的连续函数.

则有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\delta_n, G) = \lim_{n\to\infty} R_n = R(G).$$

证明:　由引理 4, 可知

$$0 \leqslant R_n - R(G) \leqslant a \int_\chi |\alpha(x)| \mathsf{P}(|\alpha_n(x) - \alpha(x)| \geqslant |\alpha(x)|) \mathrm{d}x. \tag{28}$$

记 $B_n(x) = |\alpha(x)| \mathsf{P}(|\alpha_n(x) - \alpha(x)| \geqslant |\alpha(x)|)$, 显见 $B_n(x) \leqslant |\alpha(x)|$. 由 (8) 式和 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}
\int_\chi |\alpha(x)| \mathrm{d}x &\leqslant |\theta_0^2 - \gamma_0^2| \int_\chi f(x) \mathrm{d}x + \int_\chi \int_\Omega (\theta^2 + 2|\theta_0|\theta) f(x\,|\,\theta) \mathrm{d}G(\theta) \mathrm{d}x \\
&= |\theta_0^2 - \gamma_0^2| + \int_\Omega (\theta^2 + 2|\theta_0|\theta) \mathrm{d}G(\theta) \int_\chi f(x\,|\,\theta) \mathrm{d}x \\
&= |\theta_0^2 - \gamma_0^2| + \int_\Omega \theta^2 \mathrm{d}G(\theta) + 2|\theta_0| \int_\Omega \theta \mathrm{d}G(\theta) < \infty.
\end{aligned}$$

由控制收敛定理, 可知

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} (R_n - R(G)) \leqslant a \int_\chi \Big(\lim_{n\to\infty} B_n(x)\Big) \mathrm{d}x, \tag{29}$$

故要使定理成立, 只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x) = 0$ 对 a.s. x 成立即可, 由 Markov 和 Jensen 不等式知

$$B_n(x) \leqslant \mathsf{E}_n |\alpha_n(x) - \alpha(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant p_1(x)\mathsf{E}_n|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)|+|p_2(x)|\mathsf{E}_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|\\
&\quad+|p_3(x)|\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|\\
&\leqslant p_1(x)[\mathsf{E}_n|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)|^2]^{1/2}+|p_2(x)|[\mathsf{E}_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^2]^{1/2}\\
&\quad+|p_3(x)|[\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^2]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

再由引理 2 (i) 可知, 对 $x\in\chi$, 当 $r=0,1,2$ 时有

$$
\begin{aligned}
0\leqslant \lim_{n\to\infty}B_n(x)\leqslant p_1(x)&\Big[\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_n|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)|^2\Big]^{1/2}\\
&+|p_2(x)|\Big[\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^2\Big]^{1/2}\\
&+|p_3(x)|\Big[\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^2\Big]^{1/2}=0.
\end{aligned}\tag{30}
$$

将 (30) 式代入 (29) 式定理得证. □

定理 6 设 $\delta_n(x)$ 由 (15) 式定义, 其中 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为 i.i.d. 样本序列, 假定 (A) 和 (B) 成立, 若 $0<\lambda<1$, 有

$$
\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_i^\lambda(x)\mathrm{d}x<\infty,\qquad i=1,2,3.
$$

则当取 $h_n=n^{-1/[2(s-2)]}$, $s\geqslant5$, $s\in N$ 时, 有

$$
R_n-R(G)=O(n^{-\lambda(s-4.5)/[2(s-2)]}).
$$

证明: 由引理 4 和 Markov 不等式, 可知

$$
\begin{aligned}
0\leqslant(R_n-R(G))&\leqslant a\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}\mathsf{E}_n|\alpha_n(x)-\alpha(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\
&\leqslant c_1\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_1^\lambda(x)\mathsf{E}_n|f_n^{(2)}(x)-f^{(2)}(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\
&\quad+c_2\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_2^\lambda(x)\mathsf{E}_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\
&\quad+c_3\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_3^\lambda(x)\mathsf{E}_n|f_n(x)-f(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\
&\triangleq T_1+T_2+T_3.
\end{aligned}\tag{31}
$$

由引理 2 (ii) 和条件可知

$$
T_1\leqslant c_1n^{-\lambda(s-4.5)/[2(s-2)]}\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_1^\lambda(x)\mathrm{d}x\leqslant c_4n^{-\lambda(s-4.5)/[2(s-2)]},\tag{32}
$$

$$
T_2\leqslant c_2n^{-\lambda(s-3.5)/[2(s-2)]}\int_\chi|\alpha(x)|^{1-\lambda}p_2^\lambda(x)\mathrm{d}x\leqslant c_5n^{-\lambda(s-3.5)/[2(s-2)]},\tag{33}
$$

$$T_3 \leqslant c_3 n^{-\lambda(s-2.5)/[2(s-2)]} \int_{\chi} |\alpha(x)|^{1-\lambda} p_3^{\lambda}(x)\mathrm{d}x \leqslant c_6 n^{-\lambda(s-2.5)/[2(s-2)]}. \tag{34}$$

将 (32) 式、(33) 式和 (34) 式代入 (31) 式定理得证. □

注记 7　当 $\lambda \to 1$, $s \to \infty$ 时, $O(n^{-\lambda(s-4.5)/[2(s-2)]})$ 可无限接近 $O(n^{-1/2})$.

§4. 例　　子

本节举例验证满足定理 5 和定理 6 假设 (A) 和 (B) 条件的分布族和先验分布是存在的, 在模型 (1) 式中, 令 $q(x) = 1$, $Q(x) = x$, 则随机变量 X 分布族为 $f(x\,|\,\theta) = \theta \mathrm{e}^{-\theta x} I_{(x>0)}$, 取 θ 的先验分布为 Gamma 分布族

$$g(\theta) = \frac{\beta^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} \mathrm{e}^{-\beta\theta} I_{[\theta>0]}, \tag{35}$$

β 和 r 为已知常数 $\beta > 0$, $r > 0$. 所以有

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}G(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\beta^r}{\Gamma(r)} \theta^r \mathrm{e}^{-(x+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{r\beta^r}{(x+\beta)^{r+1}}. \tag{36}$$

当 $q(x) = 1$ 时, 由 (10) 式知 $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 2\theta_0$, $p_3(x) = \theta_0^2 - \gamma_0^2$, 则

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= f^{(2)}(x) + 2\theta_0 f^{(1)}(x) + (\theta_0^2 - \gamma_0^2) f(x) \\ &= \frac{r\beta^r}{(x+\beta)^{r+1}} \Big(\frac{(r+1)(r+2)}{(x+\beta)^2} - 2\theta_0 \frac{r+1}{x+\beta} + (\theta_0^2 - \gamma_0^2) \Big).\end{aligned}$$

因此

$$|\alpha(x)| \leqslant \frac{r\beta^r}{(x+\beta)^{r+1}} \Big(\frac{(r+1)(r+2)}{\beta^2} + 2|\theta_0| \frac{r+1}{\beta} + |\theta_0^2 - \gamma_0^2| \Big) \leqslant \frac{c}{(x+\beta)^{r+1}}.$$

(i) 由 (36) 式知, $f(x)$ 为 x 任意阶可导函数且连续、一致有界, 即 $f(x) \in C_{s,\alpha}$, 所以条件 (A) 成立, 在假定 i.i.d. 样本下所加条件 (B) 成立.

(ii) $\mathsf{E}(\theta^2) = \int_{\Omega} [\beta^r/\Gamma(r)] \theta^{r+1} \mathrm{e}^{-\beta\theta}\mathrm{d}\theta = r(r+1)/\beta^2 < \infty$.

(iii) $\int_{\chi} |\alpha(x)|^{1-\lambda} p_i^{\lambda}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} [c/(x+\beta)^{(r+1)(1-\lambda)}]\mathrm{d}x$.

由于 $\beta > 0$, $r > 0$, 这一积分为第 1 类广义积分, 当 $(r+1)(1-\lambda) > 1$ 时即, $0 < \lambda < r/(r+1)$, 上述积分收敛.

由 (i) – (iii) 可知, 定理 5 和定理 6 条件均成立.

参 考 文 献

[1] Johns M V, Van Ryzin J. Convergence rates for empirical Bayes two-action problems II: continuous case [J]. *Ann. Math. Statist.*, 1972, **43(3)**: 934–947.

[2] Van Houwelingen J C. Monotone empirical bayes tests for the continuous one-parameter exponential family [J]. *Ann. Statist.*, 1976, **4(5)**: 981–989.

[3] Liang T C. On empirical Bayes tests in a positive exponential family [J]. *J. Statist. Plann. Inference*, 2000, **83(3)**: 169–181.

[4] 黄金超, 凌能祥. Lomax 分布族形状参数的经验 Bayes 检验函数的收敛速度 [J]. 数学进展, 2016, **45(2)**: 280–288.

[5] 黄金超, 凌能祥. 一类改进的 Cox 模型参数的经验 Bayes 检验 [J]. 应用数学学报, 2016, **39(4)**: 562–573.

[6] 魏莉, 孔胜春, 韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 检验的收敛速度 [J]. 中国科学院研究生院学报, 2007, **24(1)**: 9–17.

[7] 彭家龙, 赵彦晖, 袁莹. 舍入数据下 Cox 模型参数的经验 Bayes 检验问题 [J]. 应用数学学报, 2014, **37(2)**: 321–331.

[8] Wei L S. An empirical Bayes two-sided test problem for continuous one-parameter exponential families [J]. *Systems Sci. Math. Sci.*, 1989, **2(4)**: 369–384.

[9] 韦来生. 一类离散型单参数指数族参数的双侧的经验 Bayes 检验问题 [J]. 应用概率统计, 1991, **7(3)**: 299–310.

[10] 张倩, 韦来生. 刻度指数族参数的经验 Bayes 双边检验问题 — 加权损失函数情形 [J]. 中国科学技术大学学报, 2013, **43(2)**: 156–161.

[11] 樊家琨. 概率密度函数及其导数递归核估计的强相合性 [J]. 河南大学学报 (自然科学版), 1992, **22(2)**: 67–71.

Empirical Bayes Two-Sided Test for the Parameter of Cox Models

HUANG JinChao

(*Basic Course Department, Chuzhou Vocational and Technical College, Chuzhou, 239000, China*)

LING NengXiang

(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, 230009, China*)

Abstract: In this paper, the empirical Bayes (EB) two-sided test for parameter of Cox models is investigated under square loss functions. At first by using recursive kernel estimation of probability function the empirical Bayes two-sided test rule is constructed. It proves that the proposed empirical Bayes test rule is asymptotic optimal and convergence rates are obtained under suitable conditions. Finally an example of satisfying theorem conditions is given.

Keywords: Cox models; empirical Bayes test; recursive kernel estimation; asymptotic optimality; convergence rates; two-sided test

2010 Mathematics Subject Classification: 62C12; 62F05