应用概率统计　第 34 卷
第 2 期　2018 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2018, Vol. 34, No. 2, pp. 145-155
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2018.02.003

一类随机加权和的渐近性及其应用 *

刘希军
(空军工程大学航空机务士官学校, 信阳, 464000)

于长俊*
(南通大学理学院, 南通, 226019)

摘　要: 本文考虑随机加权和及其最大值尾概率的渐近性, 其中增量 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为一列独立同分布的实值随机变量, 权重 $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 为另一列非负的随机变量, 并且两列随机变量满足某种相依结构. 在增量的共同分布 F 属于控制变换分布族的条件下, 我们得到了随机加权和及其最大值尾概率的弱渐近等价估计. 特别地, 当 F 属于一致变换分布族时, 得到了渐近等价估计. 最后, 我们将该结果应用于破产概率的渐近估计.

关键词: 相依结构; 随机加权和; 渐近性; 破产概率

中图分类号: O211.3

英文引用格式: LIU X J, YU C J. Asymptotics for a type of randomly weighted sums and its appli- cation [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(2): 145–155. (in Chinese)

§1. 引　言

重尾随机变量和的渐近性在风险理论中具有重要的应用, 近期研究可参见文献 [1–3]. 本文将考虑一类重尾随机变量随机加权和的渐近性. 在已有研究, 如文献 [4–7] 中, 均要求增量序列与权重序列相互独立的前提条件. 在本文中, 我们将考虑权重序列与增量序列相依的情形. 通篇, 假设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为一列独立同分布的实值随机变量, 其共同分布为 F; $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 为另一列非负的随机变量, 其分布分别为 G_i, $i \geqslant 1$. 本文考虑随机加权和 $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i X_i$ 及其最大值 $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{j} \theta_i X_i$, $n \geqslant 1$ 的渐近性.

为更好地介绍本文的结果, 并与已有结果进行比较, 我们首先引入一些必要的概念、记号和约定. 在本文中, 无特殊申明, 所有极限关系为 $x \to \infty$. 设 $a(x), b(x)$ 为定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的正函数. 若 $\limsup a(x)/b(x) \leqslant 1$, 则记 $a(x) \lesssim b(x)$; 若 $\liminf a(x)/b(x) \geqslant 1$, 则记 $a(x) \gtrsim b(x)$; 若 $a(x) \lesssim b(x)$ 且 $a(x) \gtrsim b(x)$, 则记 $a(x) \sim b(x)$; 若 $\limsup a(x)/b(x) < \infty$, 则记 $a(x) = O(b(x))$; 若 $a(x) = O(b(x))$ 且 $b(x) = O(a(x))$, 则记 $a(x) \asymp b(x)$; 若 $\lim a(x)/b(x) = 0$, 则记 $a(x) = o(b(x))$.

---

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11426139) 资助.

*通讯作者, E-mail: ycj1981@163.com.

本文 2015 年 10 月 14 日收到, 2017 年 1 月 20 日收到修改稿.

以下介绍一些常用的重尾分布族. 对于任意分布 F, 记 $\overline{F}=1-F$ 为分布 F 的尾分布. 称支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布 F 是控制变换分布, 记作 $F\in\mathscr{D}$, 若对任意的 $y\in(0,1)$, $\overline{F}(xy)=O(\overline{F}(x))$; 称支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布 F 是一致变换分布, 记作 $F\in\mathscr{C}$, 若 $L_F:=\lim\limits_{y\downarrow 1}\liminf\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)=1$. 容易证明 $\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$, 并且这种包含关系是适正的, 参见文献 [8]. 关于重尾分布族的详细讨论, 可参见文献 [9] 和文献 [10]. 记

$$J_F^+=-\lim_{y\to\infty}\frac{\ln\overline{F}_*(y)}{\ln y},$$

其中 $\overline{F}_*(y):=\liminf\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)$, $y>1$. 根据文献 [10] 的命题 2.2.1, 若 $F\in\mathscr{D}$, 则对任意的 $\beta>J_F^+$, 存在正常数 M 和 N 使得, 对任意 $x\geqslant y\geqslant N$,

$$\frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)}\leqslant M\Big(\frac{x}{y}\Big)^{\beta}. \tag{1}$$

在对随机加权和的研究中, 已有结果往往基于 $\{X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 与 $\{\theta_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 相互独立的假设条件, 而本文将考虑二者相依的情况. 假设对于任意 $1\leqslant i\leqslant n$, 存在可测函数 $h_{ij}(\cdot):[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$, $j=1,2$, 使得

$$\mathsf{P}(X_i>x\,|\,\theta_i=v)\sim\overline{F}(x)h_{i1}(v),\qquad v\geqslant 0, \tag{2}$$

$$\mathsf{P}(X_i\leqslant -x\,|\,\theta_i=v)\sim F(-x)h_{i2}(v),\qquad v\geqslant 0. \tag{3}$$

该相依结构由文献 [11] 引入. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 当随机变量 X_i 和 θ_i 相互独立或 v 不是随机变量 θ_i 的可能取值时, (2) 和 (3) 式左边的条件概率应理解为无条件概率. 进一步地, 我们还需要如下假设条件.

假设 1 对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 存在可测函数 $h_{i1}(\cdot):[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$, 使得 (2) 式对所有 $v\in[0,\infty)$ 一致成立, 且存在一个正数 ν_{i1} 使得 $\sup\limits_{v_{i1}\leqslant v<\infty}h_{i1}(v)<\infty$.

假设 2 对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 存在可测函数 $h_{i2}(\cdot):[0,\infty)\mapsto(0,\infty)$, 使得 (3) 式对所有 $v\in[0,\infty)$ 一致成立, 且存在一个正数 ν_{i2} 使得 $\sup\limits_{v_{i2}\leqslant v<\infty}h_{i2}(v)<\infty$.

本文的主要结果如下.

定理 3 设 $\{X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 满足 $F\in\mathscr{D}$ 及

$$F(-x)=o(1)\overline{F}(x), \tag{4}$$

而 $\{\theta_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 是另一列非负且在 0 点非退化的随机变量. 假设对于任意的 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$, X_i 与 θ_j 相互独立; 而对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 假设 1 和假设 2 成立. 若存在常数 $\beta>J_F^+$ 使得, 对于任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, $\mathsf{E}\theta_i^{\beta}<\infty$, 则

$$L_F\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)\lesssim\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\theta_iX_i>x\Big)\lesssim L_F^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x), \tag{5}$$

$$L_F\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)\lesssim\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{j}\theta_iX_i>x\Big)\lesssim L_F^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).\tag{6}$$

满足定理 3 条件的随机变量 $\{X_i,i\geqslant1\}$ 和 $\{\theta_i,i\geqslant1\}$ 是很多的, 以下给出一个具体的例子.

例 4　设增量 $\{X_i,i\geqslant1\}$ 是一列独立实值的连续型随机变量, 其共同分布 F 满足 (4); 权重 $\{\theta_i,i\geqslant1\}$ 是另一列非负且在 0 点非退化的连续型随机变量, 其分布分别为 G_i, $i\geqslant1$. 假设对于任意的 $i\neq j$, X_i 与 θ_j 是相互独立的; 而对于任意的 $i\geqslant1$, 二维随机变量 (X_i,θ_i) 满足二维 Farlie-Gumbel-Morgenstern copula, 即对某一 $\gamma\in[-1,1]$,

$$C_\gamma(u,\omega)=u\omega(1+\gamma(1-u)(1-\omega)),\qquad u,\omega\in[0,1].$$

由文献 [12] 的例 3.1 或文献 [13] 的 (5.2) 式知, 对每一个 $i\geqslant1$ 和 $\gamma\in(-1,1)$,

$$\mathsf{P}(X_i>x\,|\,\theta_i=v)\sim\overline{F}(x)h_{i1}(v)$$

对所有的 $v\in[0,\infty)$ 一致成立, 其中 $h_{i1}(v)=1+\gamma(2G_i(v)-1)$. 受上述证明的启发, 可以类似地证明, 对所有 $i\geqslant1$ 和 $\gamma\in(-1,1)$,

$$\mathsf{P}(X_i\leqslant -x\,|\,\theta_i=v)\sim F(-x)h_{i2}(v)$$

对所有的 $v\in[0,\infty)$ 一致成立, 其中 $h_{i2}(v)=1+\gamma(1-2G_i(v))$. 因此, 随机变量 $\{X_i,i\geqslant1\}$ 和 $\{\theta_i,i\geqslant1\}$ 满足假设 1 和假设 2.

推论 5　若 $F\in\mathscr{C}$, 余同定理 3, 则

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{j}\theta_iX_i>x\Big)\sim\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n}\theta_iX_i>x\Big)\sim\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).$$

我们将在第二部分给出该定理的证明, 在第三部分给出它在破产概率中的应用.

§2.　定理 3 的证明

为了证明定理 3, 我们首先给出一些引理.

引理 6　假设对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 二维随机向量 (X_i,θ_i) 满足假设 1, 且 X_i 的共同分布 $F\in\mathscr{D}$. 若 $\{\theta_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 在 0 处是非退化的, 且存在常数 $\beta>J_F^+$ 使得 $\mathsf{E}\theta_i^\beta<\infty$, 则

$$\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)\asymp\overline{F}(x),\qquad 1\leqslant i\leqslant n.\tag{7}$$

证明: 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$, 不妨记 θ_i 的分布为 G_i, $\theta_i X_i$ 的分布为 H_i. 由于 G_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ 在 0 处是非退化的, 因此存在常数 $v_0 > 0$ 使得 $\overline{G}_i(v_0) > 0$. 由 $F \in \mathscr{D}$, 假设 1 及 Fatou 引理得

$$\begin{aligned}\liminf \frac{\overline{H}_i(x)}{\overline{F}(x)} &\geqslant \liminf \frac{\displaystyle\int_{v_0}^{\infty} \mathsf{P}(X_i > v^{-1}x \,|\, \theta_i = v)\mathrm{d}G_i(v)}{\overline{F}(x)} \\ &\geqslant \liminf \frac{\mathsf{P}(X_i > v_0^{-1}x)}{\overline{F}(x)} \int_{v_0}^{\infty} h_{i1}(v)\mathrm{d}G_i(v) \\ &> 0. \end{aligned} \tag{8}$$

以下证明 $\overline{F}(x) = O(\overline{H}_i(x))$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 由 $F \in \mathscr{D}$ 及 $\mathsf{E}\theta_i^{\beta} < \infty$, $\beta > J_F^+$ 知 $\overline{G}_i(x) = o(1)\overline{F}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 由文献 [14] 的命题 3.1 知, 存在函数 $g_i(\cdot) : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$, 使得 $g_i(x) \downarrow 0$, $xg_i(x) \uparrow \infty$ 且 $\overline{G}_i(xg_i(x)) = o(1)\overline{F}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 取 v_{i1} 使得 $\sup\limits_{v_{i1} \leqslant v < \infty} h_{i1}(v) < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 并记 $v_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v_{i1}$. 注意到 $v^{-1}x \to \infty$ 对所有 $v \in (0, xg_i(x))$ 一致成立. 因此, 由假设 1 得

$$\limsup \sup_{0 < v \leqslant xg_i(x)} \left| \frac{\mathsf{P}(X_i > \gamma v^{-1}x \,|\, \theta_i = v)}{\mathsf{P}(X_i > \gamma v^{-1}x) h_{i1}(v)} - 1 \right| = 0, \tag{9}$$

且对于上述 $\beta > J_F^+$ 及任意 $0 < \gamma < \infty$, 存在 $M := M(\beta, \gamma)$ 使得

$$\limsup \sup_{v_1 \leqslant v \leqslant xg_i(x)} \frac{\mathsf{P}(X_i > \gamma v^{-1}x)}{\overline{F}(\gamma x) v^{\beta}} \leqslant M. \tag{10}$$

令 $K_{i1} = \sup\limits_{v_1 \leqslant v < \infty} h_{i1}(v)$, 由 (9) 立得

$$\begin{aligned}\overline{H}_i(x) &\leqslant \mathsf{P}(\theta_i X_i > x, \theta_i \leqslant v_1) + \mathsf{P}(\theta_i X_i > x, v_1 < \theta_i \leqslant xg_i(x)) + \overline{G}_i(xg_i(x)) \\ &\leqslant \mathsf{P}(X_i > v_1^{-1}x) + \int_{v_1}^{xg_i(x)} \mathsf{P}(X_i > v^{-1}x \,|\, \theta_i = v)\mathrm{d}G_i(v) + \overline{G}_i(xg_i(x)) \\ &\leqslant \mathsf{P}(X_i > v_1^{-1}x) + (1+o(1)) \int_{v_1}^{xg_i(x)} \mathsf{P}(X_i > v^{-1}x) h_{i1}(v)\mathrm{d}G_i(v) + \overline{G}_i(xg_i(x)) \\ &= O(1)\overline{F}(x) + K_{i1}(1+o(1))\overline{F}(x) \int_{v_1}^{xg_i(x)} \frac{\mathsf{P}(X_i > v^{-1}x)}{\overline{F}(x)} \mathrm{d}G_i(v) + o(1)\overline{F}(x). \end{aligned}$$

在 (10) 中取 $\gamma = 1$, 结合 (1) 及 $\mathsf{E}\theta_i^{\beta} < \infty$ 得

$$\begin{aligned}\overline{H}_i(x) &\leqslant O(1)\overline{F}(x) + K_{i1}M(1+o(1))\overline{F}(x) \int_{v_1}^{xg_i(x)} v^{\beta}\mathrm{d}G_i(v) + o(1)\overline{F}(x) \\ &= O(\overline{F}(x)). \end{aligned} \tag{11}$$

由 (8) 和 (11) 式, 立得 (7) 式. □

引理 7　设 X_1, X_2 是相互独立的随机变量, 其共同分布 $F \in \mathscr{D}$. 设权重 θ_1, θ_2 是非负随机变量. 若 $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$, 则 X_i 与 θ_j 相互独立; 若 $1 \leqslant i = j \leqslant 2$, 则 (X_i, θ_i) 满足假设 1. 若存在常数 $\beta > J_F^+$ 使得 $\mathsf{E}\theta_i^\beta < \infty$, $i = 1, 2$ 成立, 则

$$\mathsf{P}(\theta_1 X_1 > x, \theta_2 X_2 > x) = o(1)\mathsf{P}(\theta_i X_i > x), \qquad i = 1, 2. \tag{12}$$

证明:　将 (12) 式的左边放大为两部分

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\theta_1 X_1 > x, \theta_2 X_2 > x) &\leqslant \mathsf{P}(\theta_1 X_1 > x, \theta_1 X_2 > x) + \mathsf{P}(\theta_2 X_1 > x, \theta_2 X_2 > x) \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \tag{13}$$

不妨记 θ_i 的分布为 G_i, $i = 1, 2$, 取函数 $g_i(x)$, v_{i1}, K_{i1}, $1 \leqslant i \leqslant n$ 及 v_1 如引理 6 的证明所述, 则 (9) 和 (10) 式成立.

对于 $I_1(x)$, 我们有

$$\begin{aligned} I_1(x) &\leqslant \mathsf{P}(\theta_1 X_1 > x, \theta_1 X_2 > x, \theta_1 \leqslant v_1) \\ &\quad + \mathsf{P}(\theta_1 X_1 > x, \theta_1 X_2 > x, v_1 < \theta_1 \leqslant x g_1(x)) + \overline{G}_1(x g_1(x)) \\ &= I_{11}(x) + I_{12}(x) + I_{13}(x). \end{aligned} \tag{14}$$

由 X_2 与 X_1, θ_1 相互独立, $F \in \mathscr{D}$ 及 (9) 式得,

$$\begin{aligned} I_{11}(x) &= \int_0^{v_1} \mathsf{P}(X_2 > v^{-1}x)\mathsf{P}(X_1 > v^{-1}x \,|\, \theta_1 = v)\mathrm{d}G_1(v) \\ &\leqslant \overline{F}(v_1^{-1}x) \int_0^{v_1} \mathsf{P}(X_1 > v^{-1}x \,|\, \theta_1 = v)\mathrm{d}G_1(v) \\ &\leqslant (1 + o(1))(\overline{F}(v_1^{-1}x))^2 \int_0^{v_1} h_{i1}(v)\mathrm{d}G_1(v) \\ &= o(1)\overline{F}(x). \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $\mathsf{E}\theta_i^\beta < \infty$, 根据 (9) 及 (10) 式,

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &\leqslant \int_{v_1}^{x g_1(x)} \mathsf{P}(X_1 > v^{-1}x, X_2 > v^{-1}x \,|\, \theta_1 = v)\mathrm{d}G_1(v) \\ &\leqslant (1 + o(1)) \int_{v_1}^{x g_1(x)} \mathsf{P}(X_2 > v^{-1}x)\mathsf{P}(X_1 > v^{-1}x) h_{11}(v)\mathrm{d}G_1(v) \\ &\leqslant K_{11}(1 + o(1))\overline{F}(x)\overline{F}(v_1^{-1}x) \int_{v_1}^{x g_1(x)} \frac{\mathsf{P}(X_1 > v^{-1}x)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}G_1(v) \\ &\leqslant K_{11}M(1 + o(1))\overline{F}(x)\overline{F}(v_1^{-1}x) \int_{v_1}^{x g_1(x)} v^\beta \mathrm{d}G_1(v) \\ &= o(1)\overline{F}(x). \end{aligned} \tag{16}$$

由于 $I_{13}(x)=o(\overline{F}(x))$ 是显然的, 根据 (14)–(16) 式及引理 6, 立得

$$I_1(x)=o(1)\overline{F}(x)=o(1)\mathsf{P}(\theta_iX_i>x),\qquad i=1,2. \tag{17}$$

通过类似的讨论, 可得

$$I_2(x)=o(1)\mathsf{P}(\theta_iX_i>x),\qquad i=1,2. \tag{18}$$

将 (17) 和 (18) 式代入 (13) 式, 立得 (12) 式. □

引理 8 在定理 3 的条件下, 若随机变量 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 是非负的, 则

$$\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)\lesssim\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)\lesssim L_F^{-1}\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).$$

证明: 由引理 7 易得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)&\geqslant\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n\{\theta_iX_i>x\}\Big)\\&\geqslant\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)-\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\mathsf{P}(\theta_iX_i>x,\theta_jX_j>x)\\&\sim\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).\end{aligned}\tag{19}$$

任取 $0<\lambda<1/2$, 易得

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)&\leqslant\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n\{\theta_iX_i>(1-\lambda)x\}\Big)+\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x,\bigcap_{j=1}^n\{\theta_jX_j\leqslant(1-\lambda)x\}\Big)\\&=I_3(x)+I_4(x).\end{aligned}\tag{20}$$

取函数 $g_i(x)$ 及 v_{i1}, $1\leqslant i\leqslant n$ 如引理 6 的证明所述, 则 (9) 和 (10) 式成立. 进而, 由 $F_*(y)$, $y\geqslant 1$ 的定义, 我们有

$$\limsup\sup_{0<v\leqslant xg_i(x)}\frac{\mathsf{P}(X_i>(1-\lambda)v^{-1}x)}{\mathsf{P}(X_i>v^{-1}x)}\leqslant(\overline{F}_*((1-\lambda)^{-1}))^{-1}. \tag{21}$$

根据 (9) 式, 我们有

$$\begin{aligned}I_3(x)&\leqslant\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>(1-\lambda)x)\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_0^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i>(1-\lambda)v^{-1}x\,|\,\theta_i=v)\mathrm{d}G_i(v)+\sum_{i=1}^n\overline{G}_i(xg_i(x))\\&\leqslant(1+o(1))\sum_{i=1}^n\int_0^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i>(1-\lambda)v^{-1}x)h_{i1}(v)\mathrm{d}G_i(v)+o(1)\overline{F}(x).\end{aligned}\tag{22}$$

根据 (9)、(21) 与 (22) 式, 立得

$$\begin{aligned}
I_3(x) &\leqslant (1+o(1))(\overline{F}_*((1-\lambda)^{-1}))^{-1}\sum_{i=1}^n\int_0^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i>v^{-1}x)h_{i1}(v)\mathrm{d}G_i(v)+o(1)\overline{F}(x)\\
&\leqslant (1+o(1))(\overline{F}_*((1-\lambda)^{-1}))^{-1}\sum_{i=1}^n\int_0^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i>v^{-1}x\,|\,\theta_i=v)\mathrm{d}G_i(v)+o(1)\overline{F}(x)\\
&\leqslant (1+o(1))(\overline{F}_*((1-\lambda)^{-1}))^{-1}\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)+o(1)\overline{F}(x).
\end{aligned}\tag{23}$$

因此, 由引理 6、(23) 式和 $0<\lambda<1/2$ 的任意性知

$$I_3(x)\lesssim L_F^{-1}\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).\tag{24}$$

以下证明 $I_4(x)$ 是 $\sum\limits_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x)$ 的高阶无穷小量. 由引理 6 和引理 7 得

$$\begin{aligned}
I_4(x) &\leqslant \sum_{k=1}^n\mathsf{P}\Big(n^{-1}x<\theta_kX_k<(1-\lambda)x,\sum_{j\neq k}^n\theta_jX_j>\lambda x\Big)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^n\sum_{j\neq k}^n\mathsf{P}(\theta_kX_k>n^{-1}\lambda x,\theta_jX_j>n^{-1}\lambda x)\\
&= o(1)\sum_{k=1}^n\mathsf{P}(\theta_kX_k>n^{-1}\lambda x)\\
&= o(1)\sum_{k=1}^n\mathsf{P}(\theta_kX_k>x),
\end{aligned}\tag{25}$$

其中, 最后一步用到了 $F\in\mathscr{D}$ 这一条件. 将 (24) 及 (25) 式代入 (20) 式得

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)\lesssim\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x),\tag{26}$$

结合 (19) 及 (26) 式立得结论. $\square$

引理 9　假设对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 二维随机变量 (X_i,θ_i) 满足假设 2, 随机变量 X_i 的共同分布 $F\in\mathscr{D}$ 且满足 (4) 式. 若 $\{\theta_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 在 0 处是非退化的, 且存在常数 $\beta>J_F^+$ 使得 $\mathsf{E}\theta_i^\beta<\infty$, 则对任意给定的 $0<\kappa<\infty$,

$$\mathsf{P}(\theta_iX_i\leqslant-\kappa x)=o(1)\mathsf{P}(\theta_iX_i>x),\qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

证明:　类似于之前的证明, 取函数 $g_i(x)$, $1\leqslant i\leqslant n$ 如引理 6 的证明所述, 则 (9) 和 (10) 式成立. 进一步地, 取 v_{i2} 使得 $\sup\limits_{v_{i2}\leqslant v<\infty}h_{i2}(v)<\infty$, $1\leqslant i\leqslant n$. 由于 $v^{-1}x\to\infty$ 对 $v\in(0,xg(x))$ 一致成立, 根据假设 2, 我们有

$$\limsup\sup_{0<v\leqslant xg_i(x)}\Big|\frac{\mathsf{P}(X_i\leqslant-\gamma v^{-1}x\,|\,\theta_i=v)}{\mathsf{P}(X_i\leqslant-\gamma v^{-1}x)h_{i2}(v)}-1\Big|=0.\tag{27}$$

令 $v_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} v_{i2}$, $v_3=\max\{v_1,v_2\}$ 及 $K_{i2}=\sup\limits_{v_3\leqslant v<\infty} h_{i2}(v)$, 则对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, 根据 (27) 式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\theta_iX_i\leqslant -\kappa x)\\
\leqslant\ &\mathsf{P}(\theta_iX_i\leqslant -\kappa x,\theta_i\leqslant v_3)+\mathsf{P}(\theta_iX_i\leqslant -\kappa x,v_3<\theta_i\leqslant xg(x))+\overline{G}_i(xg_i(x))\\
\leqslant\ &\mathsf{P}(X_i\leqslant -{v_3}^{-1}\kappa x)+\int_{v_3}^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i\leqslant -\kappa v^{-1}x\,|\,\theta_i=v)\mathrm{d}G_i(v)+\overline{G}_i(xg_i(x))\\
\leqslant\ &o(1)\overline{F}(v_3^{-1}\kappa x)+(1+o(1))\int_{v_3}^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i\leqslant -\kappa v^{-1}x)h_{i2}(v)\mathrm{d}G_i(v)+o(1)\overline{F}(x)\\
\leqslant\ &K_{i2}(1+o(1))\int_{v_3}^{xg_i(x)}F(-\kappa v^{-1}x)\mathrm{d}G_i(v)+o(1)\overline{F}(x).
\end{aligned}\tag{28}$$

由于 $F\in\mathscr{D}$, 根据引理 6、(4) 及 (10) 式, 易得

$$\begin{aligned}
\int_{v_3}^{xg_i(x)}F(-\kappa v^{-1}x)\mathrm{d}G_i(v)&=o(1)\int_{v_3}^{xg_i(x)}\mathsf{P}(X_i>\kappa v^{-1}x)\mathrm{d}G_i(v)\\
&=o(1)M\overline{F}(\kappa x)\int_{v_3}^{xg_i(x)}v^{\beta}\mathrm{d}G_i(v)\\
&=o(1)\overline{F}(x)\\
&=o(1)\mathsf{P}(\theta_iX_i>x),
\end{aligned}$$

结合 (28) 式立得结论. $\square$

定理 3 的证明: 我们将按照文献 [5] 中定理 2.1 (a) 的证明思路来证明 (5) 和 (6) 式成立. 由随机变量 $\{\theta_i,i\geqslant 1\}$ 的非负性和引理 8 知,

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)\leqslant\mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^j\theta_iX_i>x\Big)\leqslant\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i^+>x\Big)\lesssim L_F^{-1}\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).$$

因此, 我们只需要证明

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)\gtrsim L_F\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\theta_iX_i>x).\tag{29}$$

事实上, 当 $n=1$ 时, (29) 式显然成立. 因此我们不妨假设 $n\geqslant 2$. 对任意的 $\lambda>1$, 令 $\omega=(\lambda-1)/(n-1)$, 由引理 7 和 引理 9 知,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x\Big)\\
\geqslant\ &\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x,\max_{1\leqslant j\leqslant n}\theta_jX_j>\lambda x\Big)\\
\geqslant\ &\sum_{j=1}^n\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x,\theta_jX_j>\lambda x\Big)-\sum_{1\leqslant k\neq l\leqslant n}\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^n\theta_iX_i>x,\theta_kX_k>\lambda x,\theta_lX_l>\lambda x\Big)
\end{aligned}$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_j X_j > \lambda x) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1, m\neq j}^{n} \mathsf{P}(\theta_m X_m \leqslant -\omega x) - \sum_{1\leqslant k\neq l\leqslant n} \mathsf{P}(\theta_k X_k > \lambda x, \theta_l X_l > \lambda x)$$
$$\sim \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_i X_i > \lambda x). \tag{30}$$

类似于 (24) 式的证明, 由假设 1, $F \in \mathscr{D}$, (30) 式和 λ 的任意性立得 (29) 式. □

§3. 在破产概率中的应用

在本节中, 我们将给出定理 3 在一类离散时间风险模型中的应用. 设随机变量 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 表示在时刻 i 时的净亏损额, 它等于总理赔额减去总收入, 正随机变量 $\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 表示从时间 i 到时间 $i-1$ 时的折扣因子. 记 $\theta_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, $n \geqslant 1$, 那么 θ_n, $n \geqslant 1$ 表示从时间 n 到时间 0 时的折扣因子. 因此, 保险公司在时刻 n 时的折扣净资产可以表示为如下离散时间的随机过程模型

$$S_0 = x, \qquad S_n = x - \sum_{i=1}^{n} \theta_i X_i, \quad n \geqslant 1,$$

其中 x 是保险公司的初始资本. 则此风险模型的有限时破产概率定义为

$$\Psi(x,n) = \mathsf{P}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{j} \theta_i X_i > x \,\Big|\, S_0 = x \Big).$$

对于该模型下有限时破产概率的研究, 可以参见文献 [5, 15–19]. 其中 Tang[15] 对 X_n, $n \geqslant 1$ 和 θ_n, $n \geqslant 1$ 分别独立同分布, 且两个随机变量序列之间也相互独立的情形进行了研究, 而 Gao 和 Wang[5] 则考虑了 X_n, $n \geqslant 1$ 和 θ_n, $n \geqslant 1$ 相依而这两个随机变量序列之间相互独立的情形; 在 (X_n, θ_n), $n \geqslant 1$ 独立同分布的条件下, Chen[16] 和 Chen 等[17] 分别对不同参数范围下, (X_n, Y_n), $n \geqslant 1$ 服从二元 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) 分布的情形进行了研究; Yang 和 Wang[18] 考虑了 (X_n, Y_n), $n \geqslant 1$ 服从 Sarmanov 的情形. 近来, Maulik 和 Podder[19] 对 Yang 和 Wang[18] 的结论进行了推广, 削弱了一些技术条件的限制.

我们注意到, 在上述结论中, 均需要 X_n 与 Y_n, $n \geqslant 1$ 相互独立的前提条件, 本文将在 X_n, $n \geqslant 1$ 独立的条件下, 取消这一限制. 具体结论如下.

定理 10 若随机变量 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 和 $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 满足定理 3 的条件, 则有限时破产概率

$$L_F \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_i X_i > x) \lesssim \Psi(x,n) \lesssim L_F^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_i X_i > x). \tag{31}$$

特别地, 若随机变量 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 的共同分布 $F \in \mathscr{C}$, 则

$$\Psi(x,n) \sim \mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} \theta_i X_i > x \Big) \sim \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\theta_i X_i > x). \tag{32}$$

证明: 由定理 3 立得 (31) 式成立. 由推论 5 立得 (32) 式成立. □

参 考 文 献

[1] 王开永, 王岳宝. 负相协重尾随机变量和的尾概率的渐近性的若干注记 [J]. *应用概率统计*, 2007, **23(4)**: 337–344.

[2] 杨洋, 王岳宝. 带双边分布随机变量的大偏差 [J]. *数学学报*, 2009, **52(2)**: 289–300.

[3] 王开永, 林金官. 带常利率相依风险模型的有限时破产概率 [J]. *东南大学学报 (自然科学版)*, 2012, **42(6)**: 1243-1248.

[4] ZHANG Y, SHEN X M, WENG C G. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums and applications [J]. *Stochastic Process Appl*, 2009, **119(2)**: 655–675.

[5] GAO Q W, WANG Y B. Randomly weighted sums with dominated varying-tailed increments and application to risk theory [J]. *J Korean Statist Soc*, 2010, **39(3)**: 305–314.

[6] WANG Y F, YIN C C, Uniform estimate for the tail probabilities of randomly weighted sums [J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2014, **30(4)**: 1063–1072.

[7] TANG Q H, YUAN Z Y. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to capital allocation [J]. *Extremes*, 2014, **17(3)**: 467–493.

[8] CLINE D B H, SAMORODNITSKY G. Subexponentiality of the product of independent random variables [J]. *Stochastic Process Appl*, 1994, **49(1)**: 75–98.

[9] EMBRECHTS P, KLÜPPELBERG C, MIKOSCH T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[10] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. *Regular Variation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[11] ASIMIT A V, BADESCU A L. Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model [J]. *Scand Actuar J*, 2010, **2010(2)**: 93–104.

[12] LI J Z, TANG Q H, WU R. Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model [J]. *Adv Appl Probab*, 2010, **42(4)**: 1126–1146.

[13] JIANG T, WANG Y B, CHEN Y, et al. Uniform asymptotic estimate for finite-time ruin probabilities of a time-dependent bidimensional renewal model [J]. *Insurance Math Econom*, 2015, **64**: 45–53.

[14] ZHOU M, WANG K Y, WANG Y B. Estimates for the finite-time ruin probability with insurance and financial risks [J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2012, **28(4)**: 795–806.

[15] TANG Q H, TSITSIASHVILI G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks [J]. *Stochastic Process Appl*, 2003, **108(2)**: 299–325.

[16] CHEN Y Q. The finite-time ruin probability with dependent insurance and financial risks [J]. *J Appl Probab*, 2011, **48(4)**: 1035–1048.

[17] CHEN Y Q, LIU, J J, LIU F. Ruin with insurance and financial risks following the least risky FGM dependence structure [J]. *Insurance Math Econom*, 2015, **62**: 98–106.

[18] YANG Y, WANG Y B. Tail behavior of the product of two dependent random variables with applications to risk theory [J]. *Extremes*, 2013, **16(1)**: 55–74.

[19] MAULIK K, PODDER M. Ruin probabilities under Sarmanov dependence structure [J]. *Statist Probab Lett*, 2016, **117**: 173–182.

Asymptotics for a Type of Randomly Weighted Sums and Its Application

LIU XiJun

(*School of Aeronautical Maintenance NCO, Air Force Engineering University, Xinyang, 464000, China*)

YU ChangJun

(*School of Science, Nantong University, Nantong, 226019, China*)

Abstract: This paper considers the asymptotics of randomly weighted sums and their maxima, where the increments $\{X_i, i \geqslant 1\}$ is a sequence of independent, identically distributed and real-valued random variables and the weights $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ form another sequence of non-negative and independent random variables, and the two sequences of random variables follow some dependence structures. When the common distribution F of the increments belongs to dominant variation class, we obtain some weakly asymptotic estimations for the tail probability of randomly weighted sums and their maxima. In particular, when the F belongs to consistent variation class, some asymptotic formulas is presented. Finally, these results are applied to the asymptotic estimation for the ruin probability.

Keywords: dependence structure; randomly weighted sums; asymptotics; ruin probability

2010 Mathematics Subject Classification: 62P05; 62E20; 60E05