

混合序列的 VaR 分布核估计及其应用 *

胡志明¹ 奚 欢^{1*} 王黎明^{1,2} 黄名辉³

(¹上海财经大学浙江学院统计系, 金华, 321013; ²上海财经大学统计与管理学院, 上海, 200433)

(³中国邮政储蓄银行南宁市分行, 南宁, 530022)

摘要: 本文首先在 ρ -混合相依序列情形下, 研究了 VaR 分布核估计 $\hat{\nu}_{p,h}$ 的均方误差和最优窗宽, 得到的最优窗宽使得均方误差 $MSE(\hat{\nu}_{p,h})$ 达到最小. 利用拉普拉斯分布密度函数代替窗宽表达式中的密度函数, 采用插值的方法计算最优窗宽的具体值. 借助所得到最优窗宽进行数值模拟, 结果显示, VaR 分布核估计值与次序统计量估计值相比, 分布核估计的效果更好. 实证结果表明深证 B 股指数的风险明显大于上证 A 股指数.

关键词: 核估计; 混合序列; VaR; 窗宽

中图分类号: O212.7

英文引用格式: HU Z M, XI H, WANG L M, et al. Distribution kernel estimator of VaR and its applications for mixing sequences [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(2): 201–212. (in Chinese)

§1. 引言

早在 20 世纪 90 年代, 国外学者就开始了对风险价值 (Value at Risk, VaR) 的研究. 1994 年 10 月 JPMorgan 银行公布了 Riskmetrics 体系, 较系统地总结了 VaR 模型的原理和计算方法, 这标志着 VaR 研究走向了成熟. Jorion^[1] 认为, 在正常市场条件下, VaR 是给定一定的时间区间和置信度水平下预期的最大损失. Hendricks^[2] 通过实证研究, 比较了 VaR 估计的参数化方法、历史模拟法和蒙特卡罗模拟. Duffie 和 Pan^[3] 与 Jorion^[1] 对 VaR 进行了综述性的讨论. Bouchaud 和 Potters^[4] 讨论了如何利用金融资产波动的非正态特性去简单地计算复杂的非线性组合的 VaR. Dowd^[5] 针对证券市场普遍存在的“尖峰厚尾”分布的特点, 提出了 VaR 计算的极值理论以更好地应用于该资产的风险分析. Shukur 和 Mantalos^[6] 认为 VaR 能够较好用于根据风险调整投资及交易的绩效. Lütkepohl 等^[7] 研究了 VaR 在设置风险限额与配置资本中的应用.

近几年, 国内外很多学者对 VaR 的非参估计方法进行了研究. Gourieroux 等^[8] 引入 VaR 估计的非参数核估计. Dowd^[9] 提出用样本分位数作为 VaR 的非参数估计. Parzen^[10]

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11261009)、浙江省教育厅科研项目 (批准号: Y201534298)、上海财经大学浙江学院课题 (批准号: 20160212) 和上海财经大学浙江学院发展基金 (批准号: 20170002) 资助.

*通讯作者, E-mail: rongzhiqiang006@163.com.

本文 2017 年 4 月 24 日收到, 2017 年 8 月 7 日收到修改稿.

引入基于密度的 VaR 非参数核估计 Q_p . Yang^[11] 讨论了 Q_p 的渐近正态和均方收敛性. Falk^[12] 分析了 Q_p 相对样本分位数的优势, 这些文献都分别比较深入地讨论了核估计 Q_p 的一些性质. 而一些学者在混合相依序列下对 VaR 的非参数估计进行探讨. Yoshihara^[13] 在 α -混合序列下给出 VaR 样本分位数的核估计 Bahadur 表示. Bosq^[14] 在强混合序列下比较全面的讨论了密度函数核估计的强相合性和渐近正态性. Wei 等^[15] 给出了在 α -混合序列 VaR 的线性核估计的 Bahadur 表示. 胡志明等^[16] 讨论非参数估计方面的大样本性质. 肖佳文和杨政^[17] 分析混合分布的 VaR 非参数估计. Chen 和 Tang^[18] 讨论在 α -混合相依序列下 VaR 分布的非参数核估计 $\hat{\nu}_{p,h}$ 的强相合性等, 同时给出 VaR 分布核估计的均方误差和最优窗宽. 针对 Chen 和 Tang^[18] 一文提出的 VaR 分布核估计, 本文运用杨善朝^[19] 给出的矩不等式作为理论工具, 研究 ρ -混合相依序列下分布核估计 $\hat{\nu}_{p,h}$ 的均方误差和均方误差达到最小时的最优窗宽.

§2. 主要问题和结论

在大多数情况下, 金融时间序列并非都满足独立性假设, 它们往往是相依的时间序列. 一般的, 常见的相依时间序列有 α -混合、 ρ -混合、 ϕ -混合等. 而 ρ -混合是经济、金融时间序列中较为常见的混合形式之一. 许多学者对时间序列的 ρ -混合性进行了研究. Kolmogorov 和 Rozanov^[20] 提出 ρ -混合的概念, 并给出时间为 ρ -混合序列的充分条件. Peligrad^[21]、苏淳^[22] 和邵启满^[23] 分别对 ρ -混合序列的完全收敛性问题进行了比较深入的讨论, 同时给出了随机变量和的矩不等式. 杨善朝^[19] 分别给出 ρ -混合、 ϕ -混合序列的矩不等式及其在回归权函数估计上的应用. 由于拉普拉斯分布 (Laplace distribution) 能很好描述金融序列尖峰厚尾性. 因此在计算最优窗宽时, 借助拉普拉斯分布密度函数代替窗宽表达式中的密度函数, 研究 ρ -混合相依序列下分布核估计 $\hat{\nu}_{p,h}$ 的均方误差和均方误差达到最小时的最优窗宽. 因此, 本文计划利用在 ρ -混合相依序列情形下, 研究了 VaR 分布的核估计并计算估计量的均方误差和最优窗宽.

2.1 预备知识

定义 1 设 $\{X_t\}_{t=1}^n$ 为随机变量序列, 记 $\mathcal{F}_n^k := \sigma(X_i : n \leq i \leq k)$, $L_2(\mathcal{F}_n^k)$ 表示所有在 \mathcal{F}_n^k 上平方可积的随机变量组成的集合. 若当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\rho(n) := \sup_{k \in N} \sup_{\substack{X \in L_2(\mathcal{F}_1^k) \\ Y \in L_2(\mathcal{F}_{k+n}^\infty)}} \frac{|\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)|}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}} \longrightarrow 0.$$

则称 $\{X_t\}_{t=1}^n$ 是 ρ -混合的.

定义 2 对严平稳时间序列, 则对给定一个小概率 $p \in (0, 1)$, 随机变量 X 的置信水平

为 $1 - p$ 的 VaR 定义为

$$\nu_p = F^{-1}(p) := \inf\{u : F(u) \geq 1 - p\}, \quad (1)$$

其中 $F(u)$ 为损失变量 X 的分布函数.

设 $G(x) = \int_{-\infty}^x K(u)du$, 其中 $K(x)$ 为核函数, 令 $G_h(x) = G(x|h)$, 并且令

$$\hat{F}_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_h(x - Y_j) \quad (2)$$

作为 $F(x)$ 的估计量, 考虑满足下面方程

$$\hat{F}_{n,h}(x) = p$$

的解 $\hat{\nu}_{p,h}$ 作为 ν_p 核估计量, 其中 ν_p 由 (1) 式定义.

2.2 假设条件

本文在满足以下四个假设条件下, 研究 ρ -混合序列 VaR 分布核密度估计的均方误差、窗宽:

- (i) $\{Y_t : t \geq 1\}$ 是严平稳且是 ρ -混合序列, $\rho(n) = O(n^{-\lambda})$ ($\lambda > 1$), 这里 $t \geq 1$, Y_t 有连续分布函数 $F(x)$ 和连续密度函数 $f(x)$.
- (ii) $f(\nu_p) > 0$, $p \in (0, 1)$, $f(\cdot)$ 在 ν_p 的邻域 $\mathcal{B}(\nu_p)$ 中有连续二阶导数, 对于 $(Y_1, Y_{\kappa+1})$, $\kappa \geq 1$ 的联合分布函数 F_{κ} , 其中二阶偏导数在 $\mathcal{B}(\nu_p)$ 中关于 κ 一致有界.
- (iii) 核函数 K 是一元概率对称密度函数, 且 K 有连续有界二阶导数, 满足以下条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uK(u)du = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2K(u)du < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^3K(u)du < \infty,$$

即 $K(u)$ 的数学期望为 0, 方差有限和三阶矩有限.

- (iv) 当 $n \rightarrow \infty$, 平滑窗宽 h 满足 $h \rightarrow 0$, $nh^4 \ln^2 n \rightarrow 0$, 而且 $\exists \beta > 0$, $nh^{3-\beta} \rightarrow \infty$.

条件 (i) 的平稳性是时间序列的基本要求; 条件 (ii) 是总体分布的基本要求; 条件 (iii) 是保证核光滑性的一般条件; 条件 (iv) 是为了以下定理对窗宽的具体范围做出的假设.

2.3 主要定理

记

$$\sigma_h^2(p; n) = p(1-p) - 2 \sum_{\kappa=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\kappa}{n}\right) \gamma_h(\kappa),$$

其中 $\gamma_h(\kappa) = \text{Cov}\{G_h(\nu_p - Y_1), G_h(\nu_p - Y_{\kappa+1})\}$.

定理 3 如果条件 (i)–(iv) 成立, 那么有

$$\mathbb{E}(\widehat{\nu}_{p,h}) = \nu_p - \frac{1}{2}h^2\sigma_K^2 f'(\nu_p)f^{-1}(\nu_p) + o(h^2), \quad (3)$$

$$\text{Var}(\widehat{\nu}_{p,h}) = n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + o(n^{-1}h + n^{-4/3}). \quad (4)$$

从而 $\widehat{\nu}_{p,h}$ 的均方误差

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\widehat{\nu}_{p,h}) &= \frac{1}{4}h^4\sigma_K^4[f'(\nu_p)f^{-1}(\nu_p)]^2 - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) \\ &\quad + o(n^{-1}h + n^{-4/3} + h^4) \\ &\triangleq g(h) + o(n^{-1}h + n^{-4/3} + h^4), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $b_\kappa = \int uK(u)G(u)\mathrm{d}u$, $\sigma_k^2 = \int u^2K(u)\mathrm{d}u$, $\sigma_k^4 = \int u^4K(u)\mathrm{d}u$.

定理 4 如果条件 (i)–(iv) 成立, 当 h 取值为

$$h = \left[\frac{2b_\kappa f^3(\nu_p)}{\sigma_K^4 f'^2(\nu_p)} \right]^{1/3} n^{-1/3} \quad (6)$$

时, $\text{MSE}(\widehat{\nu}_{p,h})$ 达到最小值, 其中最小值为

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\widehat{\nu}_{p,h}) &= n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) - 3 \times 2^{-2/3}b_\kappa^{4/3}\sigma_K^{-4/3}f^2(\nu_p)f'^{-2/3}(\nu_p)n^{-4/3} \\ &\quad + o(n^{-4/3}). \end{aligned} \quad (7)$$

定理 3 中的 (4) 和 (5) 式都含有 $\sigma_h^2(p; n)$. 对于独立时间序列, $\sum_{\kappa=1}^{n-1}\gamma_h(\kappa) = 0$ 意味着 $\sigma_h^2(p; n) = p(1-p)$. 如果相依时间序列被看是独立时间序列, VaR 分布核型估计的渐近方差主要部分为 $n^{-1}p(1-p)f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p)$.

为获得窗宽 h 的具体值, 采用插值法, 在上式中插入 $f(\nu_p)$ 和 $f'(\nu_p)$ 的估计值. 首先, 用样本次序统计量 VaR 估计值 $\widehat{\nu}_p$ 代替 ν_p . 其次, 选择一个参数分布去估计 f 和 f' . 考虑到大多数金融时间序列的实际分布具有尖峰厚尾特性, 而拉普拉斯分布 (Laplace distribution) 能很好描述金融序列尖峰厚尾性^[24]. 因此在计算最优窗宽时, 用拉普拉斯分布密度函数代替窗宽表达式中的密度函数. 拉普拉斯分布的密度函数^[25] 为

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right), & x \leq \alpha; \\ \frac{1}{2\beta} \exp\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right), & x > \alpha, \end{cases}$$

其中, α 是位置参数, β 是尺度参数. 设 $\widehat{\alpha}$ 、 $\widehat{\beta}$ 是 α 、 β 的参数估计, 则 $f(\nu_p)$ 和 $f'(\nu_p)$ 的估计分别为 $\omega_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(\widehat{\nu}_p)$ 和 $\omega'_{\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(\widehat{\nu}_p)$.

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $\text{LA}(\alpha, \beta)$ 的样本, 欲通过它们来估计 α 和 β . 首先由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 得其次序统计量 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, 若 n 为奇数, 用 $X_{((n+1)/2)}$

作为 α 的估计; 若 n 为偶数, 则可用 $X_{(n/2)}$ 至 $X_{((n+1)/2)}$ 之间的任何一个数作为 α 的估计, 通常用 $\hat{\alpha} = 2^{-1}[X_{(n/2)} + X_{((n+1)/2)}]$ 作为 α 的估计. 若 α 已知, 则 β 的估计是 $\hat{\beta} = n^{-1} \sum_{j=1}^n |X_j - \alpha|$; 若 α 未知, 则 $\hat{\beta} = n^{-1} \sum_{j=1}^n |X_j - \hat{\alpha}|$.

§3. 数值模拟与实证分析

3.1 数值模拟

下面, 通过对混合序列模型进行随机模拟来验证 VaR 分布核估计得到的结果比次序统计量方法更好. 随机模拟的模型如下:

由分数布朗运动的定义知: $B_H(t+1) = B_H(t) + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, 其中 $H = 0.6$.

对于 VaR 理论模型和非参估计量, 考虑估计概率水平为 0.01 到 0.05, 样本容量为 100、200、500、1 000, 计算 VaR 的真实值、次序统计量估计值 $\hat{q}(p)$ 和分布核估计值 $\hat{\nu}_{p,h}$. 在计算 VaR 分布核估计量时, 采用标准正态核函数

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-u^2/2},$$

窗宽 h 的具体值要用前面提到的插值方法计算. 由上面模型产生的样本量从 100 到 1 000, 计算出不同概率水平的 VaR 估计值, 模拟 1 000 次计算平均值作为最终的估计值.

由分数布朗运动模型模拟 1 000 次所得到的数据, 同时计算出 VaR 分布核估计值和次序统计量估计值. 为了更直观、清楚的比较大小, 将所得的数据结果作图. 如图 1, 其中圈连线 tVaR 为 VaR 的真实值, 星号虚线 kVaR 为 VaR 分布核估计值, 三角连线 sVaR 为 VaR 的次序统计量估计值. 由图 1 可以看到:

- 1) 在同一样本和不相同的概率 p 下, VaR 分布核估计线与次序统计量估计线都低于真实值线, 而次序统计量估计线更低于真实值线, 这说明 VaR 分布核估计与次序统计量估计整体上都是低估了真实值, 而次序统计量更低估了真实值.
- 2) 在不同样本和不同的概率 p 下, 随着样本容量逐渐增大, VaR 分布核估计线、次序统计量估计线与真实值线越来越接近. 但 VaR 分布核估计线更接近真实值线, 这直观的说明 VaR 分布核估计更准确.
- 3) 从图可以看到, 当样本为 500 和 1 000 时, VaR 分布核估计线几乎与真实值线重合在一起. 这说明样本容量达到一定程度时, VaR 分布核估计值与真实值非常接近, 估计效果较好.

3.2 实证分析

根据 VaR 分布核估计理论, 选取时间为 2007 年 9 月 7 日–2017 年 3 月 30 日的上证 A 股指数和深证 B 股指数的日收盘价, 由日收盘价可以计算日对数收益率, 通过下面公式计

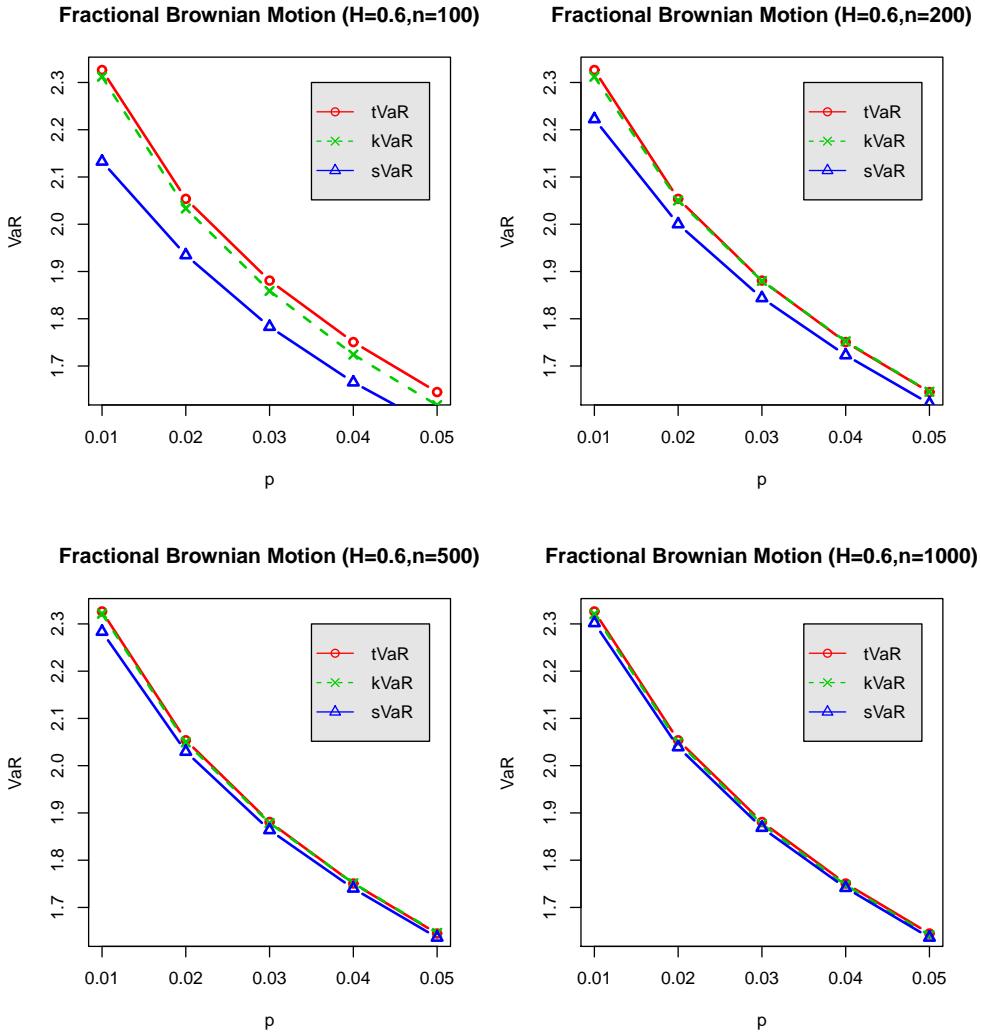


图1 分数布朗运动 VaR 估计值与真值的比较

算得到:

$$R_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}),$$

其中 R_t 表示日对数收益率, P_t 表示第 t 日的收盘价, P_{t-1} 表示第 $t-1$ 日的收盘价.

根据计算得到的日对数收益率序列图可看出, 日对数收益率都在零的上下波动, 且波动比较平稳, 即两种日对数收益率序列具有平稳性. 上证 A 股指数日对数收益率的波动性比深证 B 股指数日对数收益率波动性小. 用 ARMA 模型分别对上证 A 股指数和深证 B 股指数日对数收益率序列进行拟合, 采用极大似然估计的参数检验如表 1.

由表 1 可以看到两个模型的参数检验均显著, 说明拟合模型有效. 此外, 两个模型的系数绝对值都小于 1. 由于其系数绝对值小于 1 的 ARMA(1, 1) 过程产生的序列是 ρ -混合序

表 1 上证 A 股指数和深证 B 股指日对数收益率拟合模型参数检验

指数模型	ϕ_1 的检验		θ_1 的检验	
	t 统计量	p 值	t 统计量	p 值
上证 A 股指日对数收益率拟合模型	-5.65	< 0.0001	-6.10	< 0.0001
深证 B 股指日对数收益率拟合模型	29.45	< 0.0001	23.12	< 0.0001

列. 因此认为上证 A 股指数和深证 B 股指日对数收益率序列是 ρ -混合序列. 对两种指数的日对数收益率进行初步分析, 基本的描述统计量结果如表 2.

表 2 上证 A 指数和深证 B 指数的日对数收益率基本统计特征 ($n = 2323$)

指数	均值	方差	标准差	偏度	峰度	Shapiro-Wilk 检验	p 值
上证 A 指	-0.00021	0.00030	0.0174	-0.5334	4.0211	0.9343	< 2.2e-16
深证 B 指	0.00002	0.00038	0.0195	-0.4804	3.6053	0.9485	< 2.2e-16

由表 2 不难看出, 两种日对数收益率都在零点附近徘徊. 上证 A 指数日对数收益率的方差小于深证 B 指数的日对数收益率的方差, 说明上证 A 指数日对数收益率的值相对于深证 B 指数的日对数收益率而言更集中在均值周围, 即波动性更小, 从而潜在的风险也更小. 从偏度的比较可以看出, 两种指数的偏度值小于且接近零, 这说明它们的日对数收益率分布相对正态分布而言有轻微的左偏. 从峰度值来看, 两种指数的峰度值大于正态分布的峰度值 3, 这说明两种指数的日对数收益率序列分布都具有典型尖峰厚尾的特征, 意味着市场有发生异常波动, 隐含着股市具有较大的风险. 从 Shapiro-Wilk 检验来看, 两种指数的日对数收益率对应的 p 值都远小于零, 这说明两种指数的日对数收益率的分布都不服从正态分布.

此外, 见图 2, 由两序列的密度函数图和 Q-Q 图能直观的看到, 日对数收益率序列都具有尖峰特性. 其对应的序列 Q-Q 图线是曲线而非直线, 上下尾部严重偏离直线, 这说明两序列具有厚尾特性. 由以上分析, 可认为这两序列都不是来自正态分布的总体.

由此, 它们的分布都呈现尖峰厚尾的特征. 因此, 假设上证 A 指数和深证 B 指数的日对数收益率序列都服从拉普拉斯分布, 而不是正态分布. 为了判断假设分布是否合理, 需要利用日对数收益率数据进行皮尔逊 $-\chi^2$ 检验, 可得极大似然估计检验结果见表 3. 从拟合效果来看, 可以接受上证 A 指数和深证 B 指数的日对数收益率序列服从拉普拉斯分布.

从以上分析, 可认为两种指数的日对数收益率序列不服从正态分布, 服从拉普拉斯分布, 考虑用文中给定的方法估计它们的 VaR 值. 根据 (6) 式窗宽的选择, 置信水平为 99%–95%. 表 4 给出了在不同置信水平下的 VaR 和相应的窗宽.

从表 4 中可以看出, 在置信水平为 99%–95% 下, 窗宽随着置信水平降低而变大. 上证

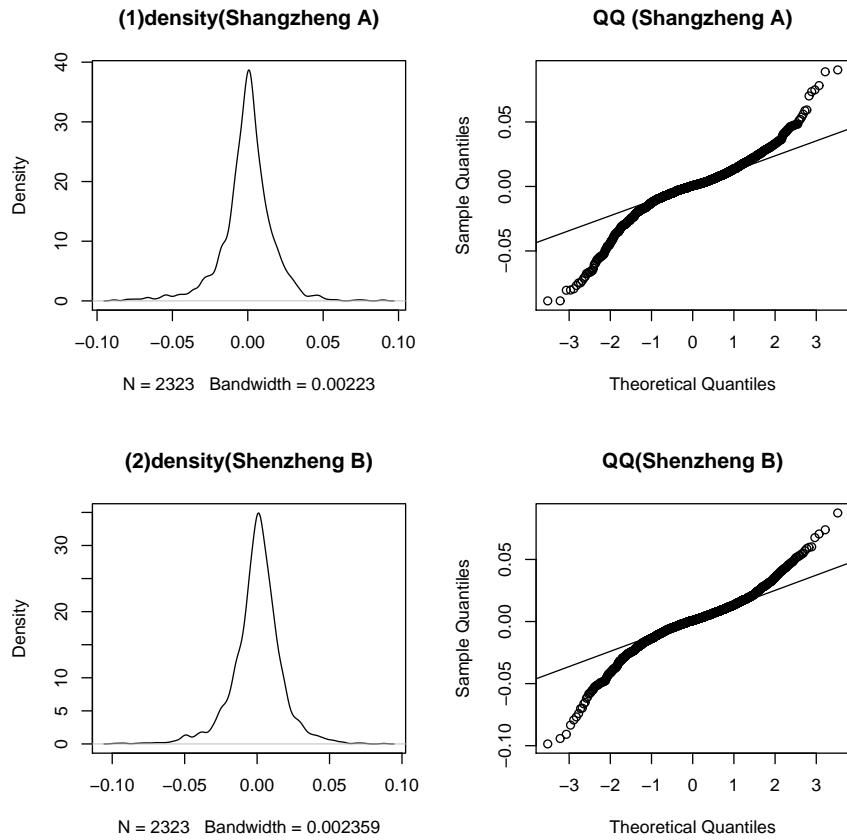


图2 上证 A 指数和深证 B 指数的日对数收益率密度函数图及对应 Q-Q 图

表 3 日对数收益率分布拟合检验和分布参数估计

指数	分布拟合检验		参数估计	
	检验统计量	Laplace 分布	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
上证 A 指	24.45544	接受	0.000319	0.011821
深证 B 指	25.02797	接受	0.000387	0.011996

表 4 上证 A 指数、深证 B 指数在不同置信水平下的 VaR 和相应窗宽

p	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
VaR (A)	0.046142	0.039826	0.035505	0.031901	0.029805
窗宽 (h_A)	0.000717	0.000849	0.000970	0.001081	0.001138
VaR (B)	0.050918	0.048819	0.048583	0.048028	0.047577
窗宽 (h_B)	0.015445	0.017288	0.018892	0.021287	0.022722

A 指数的 VaR 估计值比深证 B 指数 VaR 估计值要小, 这说明投资深证 B 指数的风险比上证 A 指数的风险大.

附录

定理 3 的证明: (i) 根据已知假设可以得到

$$\widehat{\nu}_{p,h} = \nu_p + \frac{p - \widehat{F}_{n,h}(\nu_p)}{f(\nu_p)} + o(n^{-5/6}) \quad \text{a.s..}$$

记 $A_1 = (p - \widehat{F}_{n,h}(\nu_p))/f(\nu_p)$, $A_2 = o(n^{-5/6})$, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\nu}_{p,h}) &= \nu_p + \mathbb{E}(A_1) + \mathbb{E}(A_2) \\ &= \nu_p + f^{-1}(\nu_p)\mathbb{E}[p - \widehat{F}_{n,h}(\nu_p)] + o(n^{-5/6}) \\ &= \nu_p + f^{-1}(\nu_p)\mathbb{E}\left[p - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n G_h(\nu_p - Y_j)\right] + o(n^{-5/6}) \\ &= \nu_p + f^{-1}(\nu_p)\mathbb{E}[p - G_h(\nu_p - Y_1)] + o(n^{-5/6}) \\ &= \nu_p - \frac{1}{2}h^2\sigma_K^2f'(\nu_p)f^{-1}(\nu_p) + o(h^2). \end{aligned}$$

(ii) 由 Schwarz 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A_1, A_2) &= \mathbb{E}(A_1 - \mathbb{E}A_1)(A_2 - \mathbb{E}A_2) \\ &\leq (\mathbb{E}|A_1 - \mathbb{E}A_1|^2)^{1/2}(\mathbb{E}|A_2 - \mathbb{E}A_2|^2)^{1/2} \\ &= \sqrt{\text{Var}(A_1)}\sqrt{\text{Var}(A_2)}. \end{aligned}$$

根据已知条件, 可以得到

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{\nu}_{p,h}) &= \text{Var}(A_1) + \text{Var}(A_2) + 2\text{Cov}(A_1, A_2) \\ &= \text{Var}\left[\frac{p - \widehat{F}_{n,h}(\nu_p)}{f(\nu_p)}\right] + \text{Var}(\varepsilon n^{-5/6}) + 2\text{Cov}(A_1, A_2) \\ &= n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + o(n^{-1}h) \\ &\quad + \varepsilon^2(n^{-5/6})^2 + o(n^{-4/3}) \\ &= n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + o(n^{-1}h + n^{-4/3}). \end{aligned}$$

(iii) 由 (i) 和 (ii) 可以得到 $\widehat{\nu}_{p,h}$ 的均方误差

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\widehat{\nu}_{p,h}) &= \text{Var}(\widehat{\nu}_{p,h}) + [\mathbb{E}(\widehat{\nu}_{p,h} - \nu_p)]^2 \\ &= n^{-1}\sigma_h^2(p; n)f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + o(n^{-1}h + n^{-4/3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{1}{2}h^2\sigma_K^2 f'(\nu_p) f^{-1}(\nu_p) + o(h^2) \right]^2 \\
& = n^{-1}\sigma_h^2(p; n) f^{-2}(\nu_p) - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) + o(n^{-1}h + n^{-4/3}) \\
& \quad + \frac{1}{4}h^4\sigma_K^4 f'^2(\nu_p) f^{-2}(\nu_p) + o(h^4) \\
& = \frac{1}{4}h^4\sigma_K^4 [f'(\nu_p) f^{-1}(\nu_p)]^2 - 2n^{-1}hb_\kappa f(\nu_p) \\
& \quad + n^{-1}\sigma_h^2(p; n) f^{-2}(\nu_p) + o(n^{-1}h + n^{-4/3} + h^4). \quad \square
\end{aligned}$$

定理 4 的证明: 记 $a = 4^{-1}\sigma_K^4[f'(\nu_p)f^{-1}(\nu_p)]^2$, $b = 2n^{-1}b_\kappa f(\nu_p)$, $c = n^{-1}\sigma_h^2(p; n) \cdot f^{-2}(\nu_p)$, 则由 (5) 式可知 $\text{MSE}(\hat{\nu}_{p,h})$ 的主要部分

$$g(h) = ah^4 - bh + c. \quad (8)$$

下面求 $g(h)$ 在 $(0, \infty)$ 中的最小值点, 对 (8) 求导得

$$g'(h) = 4ah^3 - b. \quad (9)$$

令 $g'(h) = 0$, 得 $h = [b/(4a)]^{1/3}$. 又 $g''(h) > 0$, 故 $g(h)$ 在 $h = [b/(4a)]^{1/3}$ 处取到最小值. 进一步, 将 a 、 b 代入 h 得到 (6) 式. 另外, 将 (6) 式代入 (8), 得 $\text{MSE}(\hat{\nu}_{p,h})$ 的主要部分 $g(h)$ 的最小值为

$$\begin{aligned}
g(h) & = \frac{1}{4}\sigma_K^4 [f'(\nu_p) f^{-1}(\nu_p)]^2 \left[\frac{2b_\kappa f^3(\nu_p)}{\sigma_K^4 f'^2(\nu_p)} \right]^{4/3} n^{-4/3} \\
& \quad - 2n^{-1}b_\kappa f(\nu_p) \left[\frac{2b_\kappa f^3(\nu_p)}{\sigma_K^4 f'^2(\nu_p)} \right]^{1/3} n^{-1/3} + n^{-1}\sigma_h^2(p; n) f^{-2}(\nu_p) \\
& = n^{-1}\sigma_h^2(p; n) f^{-2}(\nu_p) - 3 \times 2^{-2/3}b_\kappa^{4/3}\sigma_K^{-4/3}f^2(\nu_p)f'^{-2/3}(\nu_p)n^{-4/3}. \quad (10)
\end{aligned}$$

而当 h 取为 (6) 式时, $h = O(n^{-1/3})$, $n^{-1}h = O(n^{-4/3})$, 故

$$o(n^{-1}h + n^{-4/3} + h^4) = o(n^{-4/3}). \quad (11)$$

综合 (5)、(10) 和 (11) 式可得

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(\hat{\nu}_{p,h}) & = g(h) + o(n^{-1}h + h^4) \\
& = n^{-1}\sigma_h^2(p; n) f^{-2}(\nu_p) - 3 \times 2^{-2/3}b_\kappa^{4/3}\sigma_K^{-4/3}f^2(\nu_p)f'^{-2/3}(\nu_p)n^{-4/3} + o(n^{-4/3}).
\end{aligned}$$

证毕. \square

参 考 文 献

- [1] JORION P. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk* [M]. New York: McGraw-Hill, 1997.
- [2] HENDRICKS D. Evaluation of Value-at-Risk models using historical data [J]. *Econ Policy Rev*, 1996, **2**(1): 39–70.
- [3] DUFFIE D, PAN J. An overview of Value at Risk [J]. *J Deriv*, 1997, **4**(3): 7–49.
- [4] BOUCHAUD J P, POTTERS M. Worse fluctuation method for fast Value-at-Risk estimates [OL]. <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/9909245v1.pdf>, 1999.
- [5] DOWD K. The extreme value approach to VaR: an introduction [J]. *Financial Engineering News*, 1999, **11**: 33–45.
- [6] SHUKUR G, MANTALOS P. A simple investigation of the Granger-causality test in integrated-cointegrated VAR systems [J]. *J Appl Statist*, 2000, **27**(8): 1021–1031.
- [7] LÜTKEPOHL H, SAIKKONEN P, TRENKLER C. Maximum eigenvalue versus trace tests for the cointegrating rank of a VAR process [J]. *Econom J*, 2001, **4**(2): 287–310.
- [8] GOURIEROUX C, LAURENT J P, SCAILLET O. Sensitivity analysis of Values at Risk [J]. *J Empir Financ*, 2000, **7**(3-4): 225–245.
- [9] DOWD K. Estimating VaR with order statistics [J]. *J Deriv*, 2001, **8**(3): 23–30.
- [10] PARZEN E. Nonparametric statistical data modeling [J]. *J Amer Statist Assoc*, 1979, **74**(365): 105–121.
- [11] YANG S S. A smooth nonparametric estimator of a quantile function [J]. *J Amer Statist Assoc*, 1985, **80**(392): 1004–1011.
- [12] FALK M. Relative deficiency of kernel type estimators of quantiles [J]. *Ann Statist*, 1984, **12**(1): 261–268.
- [13] YOSHIHARA K I. The Bahadur representation of sample quantiles for sequences of strongly mixing random variables [J]. *Statist Probab Lett*, 1995, **24**(4): 299–304.
- [14] BOSQ D. *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction* [M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer, 1998.
- [15] WEI X L, YANG S C, YU K M, et al. Bahadur representation of linear kernel quantile estimator of VaR under α -mixing assumptions [J]. *J Statist Plann Inference*, 2010, **140**(7): 1620–1634.
- [16] 胡志明, 晏振, 张军舰. 调整经验欧氏似然及其性质 [J]. 应用数学, 2017, **30**(2): 299–312.
- [17] 肖佳文, 杨政. 混合分布的 VaR 非参数估计: 对期货市场的实证分析 [J]. 系统工程学报, 2016, **31**(4): 471–480.
- [18] CHEN S X, TANG C Y. Nonparametric inference of Value-at-Risk for dependent financial returns [J]. *J Financ Economet*, 2005, **3**(2): 227–255.
- [19] 杨善朝. 混合序列矩不等式和非参数估计 [J]. 数学学报, 1997, **40**(2): 271–279.
- [20] KOLMOGOROV A N, ROZANOV Y A. On strong mixing conditions for stationary Gaussian processes [J]. *Theory Probab Appl*, 1960, **5**(2): 204–208.
- [21] PELIGRAD M. Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences [J]. *Probab Theory Related Fields*, 1985, **70**(2): 307–314.
- [22] 苏淳. 关于一类强平稳 mixing 序列完全收敛条件的探讨 [J]. 应用概率统计, 1988, **4**(2): 148–156.
- [23] 邵启满. 关于 ρ -混合序列的完全收敛性 [J]. 数学学报, 1989, **32**(3): 376–393.

- [24] 杜红军, 刘小茂. 拉普拉斯分布下的 VaR 和 CVaR 风险计算 [J]. 应用数学, 2006, **19**(增): 225–228.
- [25] 方开泰, 许建伦. 统计分布 [M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [26] FAZEKAS I, KLESOV O. A general approach to the strong law of large numbers [J]. *Theory Probab Appl*, 2001, **45**(3): 436–449.
- [27] MANDELBROT B B, VAN NESS J W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications [J]. *SIAM Rev*, 1968, **10**(4): 422–437.
- [28] 彭寿康. 中国证券市场股价指数 VaR 研究 [J]. 统计研究, 2003, **6**: 58–61.

Distribution Kernel Estimator of VaR and Its Applications for Mixing Sequences

HU ZhiMing¹ XI Huan¹ WANG LiMing^{1,2} HUANG MingHui³

⁽¹⁾*Department of Statistics, Shanghai University of Finance and Economics Zhejiang College, Jinhua,
321013, China*

⁽²⁾*School of Statistics and Management, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai,
200433, China*

⁽³⁾*Postal Savings Bank of China Nanning Branch, Nanning, 530022, China*

Abstract: In the situation of ρ -mixing dependent sequences, this paper studied the mean square error and the optimal bandwidth of distribution kernel estimator $\hat{\nu}_{p,h}$ of VaR. And the optimal bandwidth minimized the mean square error. The density function of Laplace distribution is used in the calculation of bandwidth and we adopt the method of interpolation to compute specific value of bandwidth in this paper. According to the numerical simulations, the distribution kernel estimator is more accurate by comparing the performance of VaR distribution kernel estimation with a common order statistic. Finally, Shangzheng A-share index and Shenzheng B-share index are chosen for an empirical research, which concludes that the risk of the latter is significantly higher than that of the former.

Keywords: kernel estimation; mixing sequences; Value at Risk; bandwidth

2010 Mathematics Subject Classification: 62G05; 62G07; 62H12