应用概率统计 第 34 卷
第 5 期 2018 年 10 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Oct., 2018, Vol. 34, No. 5, pp. 441-449
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2018.05.001

随机利率下 DC 型养老金的随机微分博弈 *

杨 鹏

(西京学院理学院, 西安, 710123; 西安交通大学数学与统计学院, 西安, 710049)

摘 要: 本文研究了 Vasicek 随机利率下 DC 型养老金的随机微分博弈. 金融市场是博弈的 "虚拟" 手, 博弈中养老金计划投资者占主导. 研究目标是: 通过养老金计划投资者和金融市场之间的博弈, 寻找最优的策略使得终止时刻财富的期望效用达到最大. 在幂效用函数下, 运用随机控制理论求得了最优策略和值函数的显式解. 最后, 解释了所研究的结果在经济上的意义, 并通过数值计算分析了一些参数对最优策略的影响.

关键词: DC 型养老金; Vasicek 随机利率; 随机微分博弈; 幂效用; 线性–二次控制

中图分类号: O211.63

英文引用格式: YANG P. Stochastic differential game for DC pension under stochastic interest rate [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(5): 441–449. (in Chinese)

§1. 引 言

斯坦福大学教授 Myron Scholes 和 Fischer Black 在 1973 年提出了如下的 B-S 模型来描述金融市场:

$$\mathrm{d}B(t)=rB(t)\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{d}S(t)=S(t)[\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W(t)],$$

其中 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 是无风险资产, $r>0$ 为无风险利率; $S(t)$ 是风险资产, 其中 μ 和 $\sigma>0$ 为常数, 分别是风险资产的平均收益率和波动率, $W(t)$ 是一维标准布朗运动. B-S 模型自问世以来, 有非常多的学者研究基于 B-S 模型的投资策略选择问题. 比如: 文献 [1–4]. 由于 B-S 模型中的各参数都是常数, 而实际中它们不一定是常数, 因此有很多学者对 B-S 模型进行了完善和推广. 比如: Vasicek 模型、Heston 模型、CEV 模型、Ornstein-Uhlenbec 模型等.

由于受到政府政策、通货膨胀等一些不确定性因素的影响, 利率有时是随机的. 因此, 用随机利率模型描述金融市场更符合实际. 与其它模型相比, Vasicek 模型就是一种随机利率模型. 近年, 有许多学者研究 Vasicek 模型. 如: 文献 [5] 研究了 Vasicek 模型下的最优投资问题. 研究目标是: 求得投资策略, 最大化终端财富的期望效用. 在指数效用和幂效用下, 求得了最优投资策略和值函数的显式解. 文献 [6–8] 也研究了 Vasicek 模型.

---

*陕西省教育厅科研计划项目 (批准号: 15JK2183) 资助.

E-mail: yangpeng511@163.com.

本文 2015 年 10 月 21 日收到, 2016 年 1 月 13 日收到修改稿.

本文在养老金投资问题中研究了 Vasicek 模型. 养老保险是社会保险制度的重要组成部分, 是人们关心的一个热点问题. 养老金计划主要有两种方式, 确定缴费计划 (DC, defined contribution plans) 和确定给付计划 (DB, defined benefit plans). 由于资本市场的发展, DC 型养老金在社会保障体系中扮演着越来越重要的角色, 越来越多的国家从 DB 型养老金转向 DC 型养老金. 近年来, 有越来越多的学者研究 DC 型养老金的最优投资问题. 文献 [9] 研究了 CEV 模型下 DC 型养老金的最优投资问题. 研究目标是获得使终值财富的期望效用最大化的最优投资策略. 应用随机控制的工具在指数效用、幂效用下得到了最优投资策略及值函数的显式解. 文献 [10] 研究了 O-U 模型下 DC 型养老金的最优投资, 在幂效用函数下求得了最优策略. 文献 [11] 在均值–方差准则下研究了 DC 型养老金的最优投资问题. 使用随机控制的理论得到了最优投资策略和有效边界. 另外还有许多学者研究类似的问题, 这里不再一一列举.

上述文献在研究养老金最优投资时, 只从投资者的角度出发, 获得最优投资策略, 而完全没有考虑金融市场对投资者的影响. 我们知道, 在实际中, 投资者肯定会受到金融市场不确定性因素的影响, 因此从投资者和金融市场两个角度同时考虑才更符合实际. 这就是随机微分博弈问题. 已有很多学者研究, 基于效用的随机微分博弈. 如文献 [12] 在跳–扩散金融市场中, 利用随机微分博弈论研究了风险最小化的投资组合策略问题. 文献 [13] 利用随机微分博弈论研究了 Markov 调制模型下的期权估值问题. 文献 [14] 研究了两个具有相关但不同投资机会的投资者之间基于随机微分博弈的最优投资问题. 文献 [15] 研究了保险公司和金融市场之间的随机微分博弈. 文献 [16] 在养老金投资问题中, 引入养老金计划投资者和金融市场之间的博弈, 在期望效用和均值–方差问题中都求得了最优策略和值函数的显式解.

基于上述文献的工作, 本文研究了 Vasicek 模型下 DC 型养老金的零和随机微分博弈问题. 博弈的双方是养老金计划投资者和金融市场, 金融市场是博弈的 “虚拟” 对手. 养老金计划投资者选择一个投资策略最大化终止时刻财富的期望效用; 而金融市场选择一个概率测度所代表的经济 “环境” 最小化养老金计划投资者终止时刻财富的期望效用; 他们之间的博弈是零和的. 通过采用线性二次控制的理论, 在幂效用下得到了最优的投资策略、最优市场策略和值函数的显式解. 最后, 通过数值计算解释了一些参数对最优策略的影响.

与已有文献相比, 本文的创新点为:

1. 与养老金投资的已往研究, 比如文献 [9]、[10]、[11] 相比, 进行投资时, 考虑了养老金计划投资者和金融市场之间的相互影响, 而不是只从养老金计划投资者一方考虑.

2. 与最优投资的已往研究, 比如文献 [1]、[2]、[5] 相比, 问题的求解不再是构造值函数满足的 HJB 方程; 而是通过值函数满足的边界条件猜出解的形式, 对其使用 Itô 公式.

3. 与文献 [16] 相比, 无风险资产的利率不是常数, 而是随机率, 满足 Vasicek 模型.

§2. 模型设定

2.1 财富过程

考虑一个金融市场, 由两个金融资产组成, 其中一个是无风险资产 (如: 债券、银行存款等), 另一个为风险资产 (股票). 无风险资产时刻 t 的价格 $\{B(t), t \geqslant 0\}$ 满足方程 $\mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t$, 其中 $r(t)$ 是 t 时刻的瞬间利率, 满足 Vasicek 模型

$$\mathrm{d}r(t) = [\delta - \alpha r(t)]\mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}W_1(t),$$

其中 δ, α, β 是正常数, $\{W_1(t) \,|\, t \geqslant 0\}$ 是一标准布朗运动. 风险资产在时刻 t 的价格 $S(t)$ 满足的随机微分方程为

$$\mathrm{d}S(t) = S(t)[\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_2(t)],$$

其中 $\mu, \sigma > 0$ 为常数, 分别是风险资产的平均收益率和波动率, $\{W_2(t) \,|\, t \geqslant 0\}$ 是标准布朗运动, $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 的相关系数为 ρ, 即 $\langle W_1(t), W_2(t)\rangle = \rho t$.

本文研究 DC 型养老金的随机微分博弈问题, 养老金允许在上述金融市场上投资. 设 $\pi(t)$ 是投资到风险资产上的资金, 考虑投资后财富过程为 $X(t, \pi)$, 则在无风险资产上投资的资金为 $X(t, \pi) - \pi(t)$. 假设常数 c 为缴费率, 不失一般性假设养老金计划只有一人. 则退休前考虑投资后财富过程 $X(t, \pi)$ 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t, \pi) = [r(t)X(t, \pi) + \pi(t)(\mu - r(t)) + c]\mathrm{d}t + \sigma\pi(t)\mathrm{d}W_2(t). \tag{1}$$

2.2 随机微分博弈问题

设 F_t 是由布朗运动 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 生成的右连续、完备的自然流, 对应的完备概率空间为 $(\Omega, F_t, \mathsf{P})$, P 为一概率测度.

定义 1 一个策略 $\pi(\cdot)$ 称为可行的, 如果 $\pi(\cdot)$ 关于流 F_t 是可料的, 且对于每个 $t \geqslant 0$ 过程 $\pi(\cdot)$ 满足条件:

(i) 对所有的 $T < +\infty$ 有 $\int_0^T [\pi(t)]^2 \mathrm{d}t < +\infty$;

(ii) 随机微分方程 (1) 对于 $\{\pi(t), t \geqslant 0\}$ 有唯一的强解.

所有可行的策略记为 Π.

设 $\{\theta(t) \,|\, t \geqslant 0\}$ 是定义在 $(\Omega, F_t, \mathsf{P})$ 上实值的、满足下列条件的随机过程:

(i) $\{\theta(t) \,|\, t \geqslant 0\}$ 是 F_t 循序可测的;

(ii) 对几乎所有的 $(t, \omega) \in [0, +\infty] \times \Omega$ 有 $\theta(t) := \theta(t, \omega) < 1$;

(iii) $\mathsf{E}[\int_0^T [\pi(t)]^2 \mathrm{d}t] < +\infty$.

对满足上述条件的全体 θ 记为 Θ.

对每个 $\{\theta(t)\,|\,t\geqslant 0\}\in\Theta$, 定义$\{Z^\theta(t)\,|\,t\geqslant 0\}$ 如下

$$Z^\theta(t)=\exp\Big\{-\int_0^t\theta(s)\mathrm{d}W_1(s)-\int_0^t\theta(s)\mathrm{d}W_2(s)-\int_0^t\theta^2(s)\mathrm{d}W(s)\Big\},$$

则有

$$\mathrm{d}Z^\theta(t)=-Z^\theta(t)\theta(t)[W_1(t)+W_2(t)]. \tag{2}$$

因此 $Z^\theta(t)$ 是 $\{F_t,\mathsf{P}\}$ 上的局部鞅, 假设 $\{\theta(t)\,|\,t\geqslant 0\}$ 是P-几乎处处有界的, 所以 $Z^\theta(t)$ 是 $\{F_t,\mathsf{P}\}$ 上的鞅, 则$\mathsf{E}(Z^\theta(T))=\mathsf{E}(Z^\theta(0))=1$. 定义$(\mathrm{d}\mathsf{P}^\theta/\mathrm{d}\mathsf{P})|_{F(T)}=Z^\theta(T)$, 则对每个 $\theta\in\Theta$, 有了一个新的概率测度 P^θ.

设 u 为一效用函数, $u'>0$, $u''<0$, 即 u 是严格递增的凸函数. 对每个投资策略 $\pi(\cdot)$, 定义养老金计划投资者的终值财富在 P^θ 下的期望效用为

$$V^{\pi,\theta}(t,x)=\mathsf{E}_\theta[u(X(T,\pi))\,|\,X(t,\pi)=x,r(t)=r],$$

其中 E_θ 是在概率测度 P^θ 下的期望.

养老金计划投资者与市场之间的随机微分博弈, 假设养老金计划投资者是博弈的主导者. 目标是: 养老金计划投资者选择一个投资策略最大化终止时刻财富的期望效用; 而金融市场选择一个概率测度 P^θ 所代表的经济环境 θ 最小化养老金计划投资者终止时刻财富的期望效用. 即

$$V(t,x)=\sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\theta\in\Theta}V^{\pi,\theta}(t,x)=V^{\pi^*,\theta^*}(t,x), \tag{3}$$

其中 π^*,θ^* 为最优策略. 该问题是养老金计划投资者与市场之间的零和随机微分博弈问题, 解决该问题就要找到最优策略 π^*,θ^* 和相应值函数 $V(t,x)$. 我们将在下一节求解该问题.

§3. 最优策略与值函数

养老金投资是一项长期投资, 本文认为养老金管理者或计划持有人会更注重增长性最优投资组合. 关于财富增长, 在长期情况下, 幂效用函数优于其它的效用函数, 如文献[9]、[10] 等都研究了幂效用函数下的养老金最优投资问题. 幂效用函数为 $u(x)=x^p/p$ $(0<p<1)$, 下面在该效用函数下求解投资者和金融市场之间的零和微分博弈问题.

引理 2 $h(t),f(t)$ 分别满足下面的常微分方程

$$h'(t)-rh(t)+c=0,\qquad h(T)=0, \tag{4}$$

$$f_t+(\delta-\alpha r)f_r+\frac{1}{2}\beta^2f_{rr}+rpf+\Big(\frac{p-1}{2p}-\rho\Big)\beta^2\frac{f_r^2}{f}-\frac{\beta(\mu-r)}{\sigma}f_r=0,\qquad f(T,r)=1, \tag{5}$$

则

$$h(t)=\frac{c[1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}]}{r}, \tag{6}$$

$$f(t,r)=A(t)\mathrm{e}^{B(t)r}, \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}A(t)=&\ \exp\Big\{\Big[\frac{p(\delta\alpha-\mu\beta)}{\sigma\alpha-\sigma}+\frac{(2p\rho+2p-1)p\sigma^2\beta^2}{2(\sigma\alpha-\beta)^2}\Big](T-t)\\&+\frac{(2p\rho+2p-1)p\sigma^3\beta^2}{4(\sigma\alpha-\beta)^3}[1-\mathrm{e}^{-2(\alpha-\beta/\sigma)(T-t)}]\\&-\Big[\frac{p(\delta\sigma^2-\mu\beta\sigma)}{(\sigma\alpha-\beta)^2}+\frac{(2p\rho+2p-1)p\sigma^3\beta^2}{(\sigma\alpha-\beta)^3}\Big][1-\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta/\sigma)(T-t)}]\Big\},\end{aligned} \tag{8}$$

$$B(t)=\frac{p}{\alpha-\beta/\sigma}[1-\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta/\sigma)(T-t)}]. \tag{9}$$

证明: 解常微分方程 (4) 即可得到 (6), 求解过程略. 下面解方程 (5). 方程 (5) 是非线性偏微分方程, 求解起来比较困难, 我们受文献[1]、[2] 的启发, 设解的形式为 $f(t,r)=A(t)\cdot\mathrm{e}^{B(t)r}$, 把它代入方程 (5), 化简后得到

$$\begin{aligned}&rA(t)\Big[B'(t)+\Big(\frac{\beta}{\sigma}-\alpha\Big)B(t)+p\Big]+A'(t)\\&+A(t)\Big[\Big(\delta-\frac{\beta\mu}{\sigma}\Big)B(t)+\frac{(2p\rho+2p-1)\beta^2}{2p}B^2(t)\Big]=0.\end{aligned}$$

则从上面的微分方程易得到

$$B'(t)+\Big(\frac{\beta}{\sigma}-\alpha\Big)B(t)+p=0, \tag{10}$$

$$A'(t)+A(t)\Big[\Big(\delta-\frac{\beta\mu}{\sigma}\Big)B(t)+\frac{(2p\rho+2p-1)\beta^2}{2p}B^2(t)\Big]=0. \tag{11}$$

上述 (10) 式为常微分方程, 直接求解可得 (9) 式; (9) 式代入 (11) 式, 则 (11) 式变为常微分方程, 直接求解可得 (8) 式. 这样引理得证. □

定理 3　随机微分博弈问题 (3) 的最优投资策略为

$$\pi^*(t)=-\frac{\beta(x+h(t))}{\sigma\alpha-\beta}[1-\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta/\sigma)(T-t)}], \tag{12}$$

市场的最优策略为

$$\theta^*(t)=\frac{\mu-r}{\sigma}+\frac{\sigma p}{\sigma\alpha-\beta}\Big[p\beta-\frac{\beta(p-1)}{p}\Big][1-\mathrm{e}^{-(\alpha-\beta/\sigma)(T-t)}], \tag{13}$$

值函数为

$$V(t,x)=f(t,r)\frac{(x+h(t))^p}{p}, \tag{14}$$

$h(t)$, $f(t,r)$ 分别满足 (6)、(7).

证明: 令 $\pi(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略, $X(t,\pi)$ 满足 (1) 的控制过程, 对 $f(t,r)[(x+h(t))^p/p]z^\theta$ 应用 Itô 公式, 结合 (11) 式和 (12) 式有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Big[f(t,r)\frac{[X(t,\pi)+h(t)]^p}{p}Z^\theta(t)\Big]\\
=&\frac{Z^\theta(t)}{p}\Big\{[X(t,\pi)+h(t)]^p\Big[f_t+(\delta-\alpha r)f_r+\frac12\beta^2 f_{rr}\Big]+f\Big[ph'(t)(X(t,\pi)+h(t))^{p-1}\\
&+p(rX(t,\pi)+\pi(t)(\mu-r)+c)(X(t,\pi)+h(t))^{p-1}+\frac12 p(p-1)\sigma^2\pi^2(t)(X(t,\pi)\\
&+h(t))^{p-2}\Big]-\beta\theta(t)f_r(X(t,\pi)+h(t))^p-fp\sigma\theta(t)\pi(t)(X(t,\pi)+h(t))^{p-1}\\
&+\rho p\beta\sigma\pi(t)f_r(X(t,\pi)+h(t))^{p-1}\Big\}\mathrm{d}t+\{\cdots\}\mathrm{d}W_1(t)+\{\cdots\}\mathrm{d}W_2(t)\\
=&\frac{Z^\theta(t)}{p}\Big\{\Big[f_t+(\delta-\alpha r)f_r+\frac12\beta^2 f_{rr}+rpf+\Big(\frac{p-1}{2p}-\rho\Big)\beta^2\frac{f_r^2}{f}-\frac{\beta(\mu-r)}{\sigma}f_r\Big]\\
&\times[X(t,\pi)+h(t)]^p+[h'(t)-rh(t)+c]pf[X(t,\pi)+h(t)]^{p-1}\\
&+\frac12 p(p-1)\sigma^2[X(t,\pi)+h(t)]^{p-2}\Big[\pi(t)-\frac{X(t,\pi)+h(t)}{p-1}\Big(\frac{\theta}{\sigma}-\frac{\mu-r}{\sigma^2}-\frac{\rho\beta}{\sigma}\frac{f_r}{f}\Big)\Big]^2\\
&-\frac12\frac{pf}{p-1}[X(t,\pi)+h(t)]^p\Big[\theta(t)+\frac{\mu-r}{\sigma}-\Big(\rho\beta-\frac{\beta(p-1)}{p}\Big)\frac{f_r}{f}\Big]^2\Big\}\mathrm{d}t\\
&+\{\cdots\}\mathrm{d}W_1(t)+\{\cdots\}\mathrm{d}W_2(t)\\
=&\frac{Z^\theta(t)}{p}\Big\{\frac12 p(p-1)\sigma^2[X(t,\pi)+h(t)]^{p-2}[\pi(t)-\pi^*(t)]^2\\
&-\frac12\frac{pf}{p-1}[X(t,\pi)+h(t)]^p[\theta(t)-\theta^*(t)]^2\Big\}\mathrm{d}t+\{\cdots\}\mathrm{d}W_1(t)+\{\cdots\}\mathrm{d}W_2(t),
\end{aligned}
$$

其中 $\pi^*(t)$, $\theta^*(t)$ 分别满足 (12) 式和 (13) 式, 从 t 到 T 积分, 在 $Z^\theta(t)=z$, $X(t,\pi)=x$ 的条件下在概率测度 P^θ 下取条件期望, 应用 Beyes 准则, 得到

$$
\begin{aligned}
&V^{\pi,\theta}(t,x)\\
=&f(t,r)\frac{[x+h(t)]^p}{p}+\frac1z\mathsf{E}\int_t^T\Big\{\frac{Z^\theta(s)}{p}\Big\{\frac12 p(p-1)\sigma^2[X(t,\pi)+h(t)]^{p-2}[\pi(t)-\pi^*(t)]^2\\
&-\frac12\frac{pf}{p-1}[X(t,\pi)+h(t)]^p[\theta(t)-\theta^*(t)]^2\Big\}\Big\}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

所以问题得证. □

§4. 算例分析

上一节求出了最优投资策略、最优市场策略, 本节通过一些例子, 分析一些参数对最优投资策略、最优市场策略的影响; 并分析研究结果在经济上的一些意义及现实中的指导意义.

例 4　$\beta = 0.09$, $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.15$, $\rho = 0.3$, $x = 100$, $t = 0$, $T = 1, 3, 5, 7$, $r(0) = r = 0.05$, $c = 1$, $p = -1$, $\alpha \in [0.02, 0.06]$. 图 1 给出了 α 和 T 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响, 图 2 给出了 α 和 T 对最优市场策略 $\theta^*(t)$ 的影响.

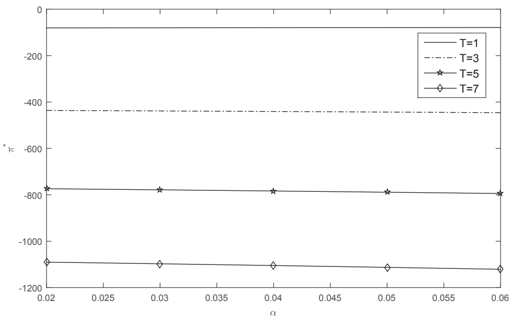

图 1　α 和 T 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响

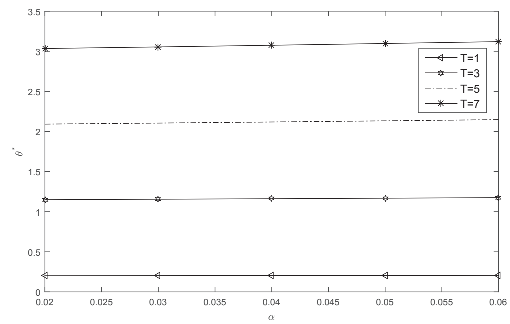

图 2　α 和 T 对最优投资策略 $\theta^*(t)$ 的影响

结果及经济意义分析:

1) 从图 1 可以看出最优投资策略 π^* 关于 α 递增, 关于 T 递减; 从图 2 可以看出最优市场策略 θ^* 关于 α 递减, 关于 T 递减.
2) 本文研究的是养老金计划投资者和金融市场之间的零和随机微分博弈, 所以 α 和 T 对投资策略和市场策略的影响相反.
3) 当参数 α 增加时, 利率期望值递减; 这时, 投资者为了增加收益而将更多资金投资于风险资产. 因此, 最优投资策略 π^* 关于 α 递增.
4) 当 T 增大时, 投资周期也随着增大, 投资者需逐步降低在风险资产上的投资数量.
5) 通过这个例子, 我们得出:
   (i) 在现实经济活动中, 利率期望值减少时要把更多的资金购买风险资产.
   (ii) 在现实经济活动中, 投资者在投资初期比较保守, 总是将较少的资金投资于风险资产, 然后逐步地比较愿意承担风险, 逐步增大风险资产上的投资数量, 越接近投资周期, 投资于风险资产上的资金数量就越多.

例 5　$\alpha = 0.02$, $\mu = 0.05$, $\sigma = 0.15$, $\rho = 0.3$, $x = 100$, $t = 0$, $T = 1$, $r(0) = r = 0.05$, $c = 1$, $p = -1$, $\beta \in [0.05, 0.09]$. 图 3 给出了 β 和 T 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响, 图 4 给出了 β 和 T 对最优市场策略$\theta^*(t)$的影响.

结果及经济意义分析:

1) 从图 3 可以看出最优投资策略 π^* 关于 β 递减; 从图 4 可以看出最优市场策略 θ 关于 β 递增.
2) 本文研究的是养老金计划投资者和金融市场之间的零和随机微分博弈, 所以 β 对投资策略和市场策略的影响相反.

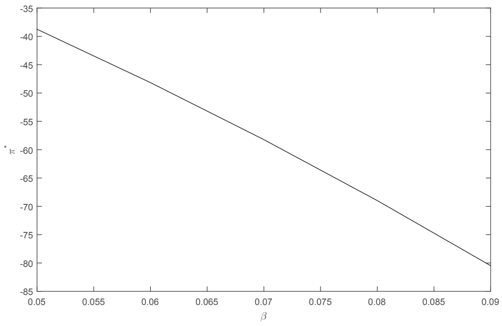

图 3 β 对最优投资策略 $\pi^*(t)$ 的影响

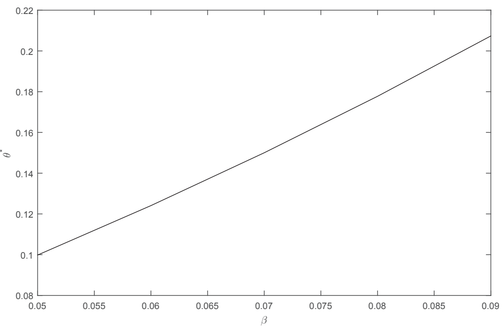

图 4 β 对最优市场策略 $\theta^*(t)$ 的影响

3) 当参数 β 增加时, 利率期望值增加; 这时, 投资者为了增加收益而将更多资金投资于无风险资产. 因此, 最优投资策略 π^* 关于 β 递减.

4) 通过这个例子, 我们得出: 在现实经济活动中, 利率期望值增加时要把更多的资金购无风险资产.

§5. 总 结

本文在利率满足 Vasicek 模型下, 研究了 DC 型养老金的最优投资. 文章考虑了投资者和金融市场之间基于效用的零和随机微分博弈, 即: 投资者选择一个策略最大化终止时刻财富的期望效用; 而金融市场作为博弈的 "虚拟手", 选择一个概率测度所代表的经济环境, 最小化投资者终止时刻财富的期望效用. 在幂效用函数下, 应用随机控制理论求得最优投资策略、最优市场策略和值函数的显式解. 并通过数值计算, 进一步解释了文章所得结果.

通过本文的研究, 在进行养老金投资时具有以下指导意义:

1. 在利率变化时, 利率期望值减少时要把更多的资金购买风险资产; 反之, 把更多的资金购买无风险资产.
2. 养老金投资者在投资初期将更多的资金投资到无风险资产; 接近投资周期时, 将更多的资金投资于风险资产.
3. 投资环境变的恶劣时, 把更多资金用来购买无风险资产.

参 考 文 献

[1] YANG H L, ZHANG L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process [J]. *Insurance Math Econom*, 2005, **37(3)**: 615–634.

[2] 罗琰, 杨招军. 基于随机微分博弈的保险公司最优决策模型 [J]. *保险研究*, 2010, **8**: 48–52.

[3] LIN X, ZHANG C H, SIU T K. Stochastic differential portfolio games for an insurer in a jump-diffusion risk process [J]. *Math Methods Oper Res*, 2012, **75(1)**: 83–100.

[4] YE J, LI T T. The optimal mean-variance investment strategy under value-at-risk constraints [J]. *Insurance Math Econom*, 2012, **51(2)**: 344–351.
[5] 常浩. Vasicek 利率模型下多种风险资产的动态资产分配 [J]. 系统工程, 2014, **32(12)**: 14–20.
[6] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. *J Financ Econ*, 1977, **5(2)**: 177–188.
[7] 谢赤, 吴雄伟. 基于 Vasicek 和 CIR 模型中的中国货币市场利率行为实证分析 [J]. 中国管理科学, 2002, **10(3)**: 22–25.
[8] 傅曼丽, 屠梅曾, 董荣杰. Vasicek 状态空间模型与上交所国债利率期限结构实证 [J]. 系统工程理论方法应用, 2005, **14(5)**: 458–461.
[9] GAO J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model [J]. *Insurance Math Econom*, 2009, **44(3)**: 479–490.
[10] 谷爱玲, 李仲飞, 曾燕. Ornstein-Uhlenbeck 模型下 DC 养老金计划的最优投资策略 [J]. 应用数学学报, 2013, **36(4)**: 715–726.
[11] 张初兵, 荣喜民. 均值–方差模型下 DC 型养老金的随机最优控制 [J]. 系统工程理论与实践, 2012, **32(6)**: 1314–1323.
[12] MATARAMVURA S, ØKSENDAL B. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games [J]. *Stochastics*, 2008, **80(4)**: 317–337.
[13] SIU T K. A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models [J]. *Insurance Math Econom*, 2008, **42(3)**: 1146–1158.
[14] BROWNE S. Stochastic differential portfolio games [J]. *J Appl Probab*, 2000, **37(1)**: 126–147.
[15] 杨鹏. 基于再保险和投资的随机微分博弈 [J]. 数学杂志, 2014, **34(4)**: 779–786.
[16] 杨鹏. 基于确定缴费型养老金最优投资的随机微分博弈 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2015, **38(2)**: 194–200.

Stochastic Differential Game for DC Pension under Stochastic Interest Rate

YANG Peng

(*School of Science, Xijing University, Xi'an, 710123, China*)

(*School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China*)

Abstract: This paper investigate a stochastic differential games for DC (defined contribution plans) pension under Vasicek stochastic interest rate. The finance market as the hypothetical counterpart, the investor as pension the leader of game. Our goal is through the game between pension plan investor and financial market, obtain optimal strategies to maximizes the expected utility of the terminal wealth. Under power utility function, by using stochastic control theory, we obtain closed-form solutions for the value function as well as the strategies. Finally, explain the research results in the economic sense, and though numerical calculation given the influence of some parameters on the optimal strategies.

Keywords: DC pension; Vasicek stochastic interest rate; stochastic differential games; power utility; linear-quadratic control

2010 Mathematics Subject Classification: 91B30