应用概率统计　第 35 卷
第 1 期　2019 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2019, Vol. 35, No. 1, pp. 39-50
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2019.01.003

广义负相依重尾随机变量和及其最大值尾概率的渐近性 *

张 婷　李 峰　杨 洋⋆　林金官

(南京审计大学统计与数学学院, 南京, 211815)

摘　要: 假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一列具有广义负相依结构的随机变量 (r.v.s.), 分别具有分布 $F_1, F_2, \ldots, F_n$. 假设 $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 本文分别在三类重尾分布族下得到了如下量之间的渐近关系: $\mathsf{P}(S_n > x)$, $\mathsf{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x)$, $\mathsf{P}(\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} > x)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k > x)$. 在此基础上, 本文还探讨了随机加权和最大值尾概率的渐近性质, 并运用蒙特卡洛 (CMC) 数值模拟验证了其有效性. 最后, 本文将得到的主要结果应用到了一个带有保险风险与金融风险的离散时间风险模型, 得到了有限时间破产概率的渐近性.

关键词: 广义负相依; 一致变换尾分布; 控制变换尾分布; 长尾分布; 蒙特卡洛模拟; 离散时间风险模型; 有限时间破产概率

中图分类号: O211.4

英文引用格式: ZHANG T, LI F, YANG Y, et al. Asymptotics for tail probabilities of the sum and its maximum of extended negatively dependent and heavy-tailed random variables [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2019, 35(1): 39–50. (in Chinese)

§1.　引言及预备知识

假设实值随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (r.v.s.) 分别具有分布 $F_1, F_2, \ldots, F_n$, 且对所有的 $x > 0$, $\overline{F_k}(x) := 1 - F_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 记 $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 重尾随机变量部分和及其最大值的尾渐近性质已经被大量学者研究过, 参见文献 [1–4] 等. 还有诸多学者将随机变量部分和拓展到了随机加权和的形式探讨了随机加权和及其最大值尾概率的渐近性, 从而使它们的应用更加广泛. 参见文献 [5–12] 等. 近来, Yang 等[13] 在随机变量具有负相依结构下研究了 $\mathsf{P}(S_n > x)$, $\mathsf{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x)$, $\mathsf{P}(\max\{S_1, S_1, \ldots, S_n\} > x)$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k > x)$ 之间的渐近关系. 受文献 [13] 启发, 本文考虑了由 Liu[14] 提出的广义负相依结构, 研究了上述四个量之间的渐近关系. 称 r.v.s. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是下广义负相依

*国家自然科学基金项目 (批准号: 71471090、71671166)、江苏省自然科学基金项目 (批准号: BK20161578)、江苏省高校自然科学研究重大项目 (批准号: 15KJA110001)、江苏高校优秀科技创新团队项目、江苏省金融工程重点实验室开放课题 (批准号: NSK2015-17)、江苏省 “六大人才高峰” 经费资助项目 (批准号: JY-039)、江苏省 “333 高层次人才培养工程” 科研项目资助经费、江苏省青蓝工程、江苏省重点建设学科 (数学)、江苏省重点序列学科 (PAPD) 和江苏省教育科学 “十二五” 规划课题 (批准号: B-a/2015/02/036) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: yangyangmath@163.com.

本文 2016 年 3 月 29 日收到, 2018 年 1 月 25 日收到修改稿.

(lower extended negatively dependent, LEND) 的, 若存在某个 $M>0$, 使得对所有的 x_i, $i=1,2,\ldots,n$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\leqslant x_i\}\Big)\leqslant M\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i\leqslant x_i). \tag{1}$$

称 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是上广义负相依 (upper extended negatively dependent, UEND) 的, 若存在某个 $M>0$, 使得对所有的 x_i, $i=1,2,\ldots,n$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>x_i\}\Big)\leqslant M\prod_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i>x_i). \tag{2}$$

称 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是广义负相依 (extended negatively dependent, END) 的, 若 (1) 和 (2) 均成立. 当 $M=1$ 时, 称 (1) 和 (2) 中的 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 分别为下负相依 (lower negative dependence, LND) 和上负相依 (upper negative dependence, UND) 的; 称 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是负相依的 (negative dependence, ND), 若 (1) 和 (2)中的 M 均为 1. 参见文献 [5,15–17]. 广义负相依结构不仅包含了负相协 (NA)、负相依 (ND) 等相依结构, 也包含了部分正相依结构, 被广泛研究和使用, 参见文献 [18,19].

称 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是两两广义负相依(pairwise extended negatively dependent, PEND) 的, 若存在某个 $M>0$, 使得对所有的 $x_i,x_j\in\mathbb{R}$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 有

$$\mathsf{P}(X_i\leqslant x_i,\,X_j\leqslant x_j)\leqslant M\mathsf{P}(X_i\leqslant x_i)\mathsf{P}(X_j\leqslant x_j), \tag{3}$$

且

$$\mathsf{P}(X_i>x_i,\,X_j>x_j)\leqslant M\mathsf{P}(X_i>x_i)\mathsf{P}(X_j>x_j). \tag{4}$$

其中, 分别称 (3) 和 (4) 中的 r.v.s. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是两两下广义负相依 (PLEND) 和两两上广义负相依 (PUEND) 的.

若无特殊说明, 本文中所有的极限关系均指 $x\to\infty$. 对两个正函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 记 $f(x)\sim g(x)$, 若 $\lim f(x)/g(x)=1$; 记 $f(x)\lesssim g(x)$, 若 $\limsup f(x)/g(x)\leqslant 1$; 记 $f(x)\gtrsim g(x)$, 若 $\liminf f(x)/g(x)\geqslant 1$; 记 $f(x)=o(g(x))$, 若 $\lim f(x)/g(x)=0$.

本文将分布 F_i, $i=1,2,\ldots,n$ 限制在重尾分布族下研究. 在给出本文的主要结果之前, 我们首先介绍一些重要的重尾分布族. 称 $\mathbb{R}$ 上的分布 F 是控制变换尾的, 记为 $F\in\mathscr{D}$, 若对任意的 $0<y<1$, 有 $\limsup\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)<\infty$, 其中 $\overline{F}(x)=1-F(x)$. 一个略小的重尾分布族是一致变换尾分布族. 称 $\mathbb{R}$ 上的分布 F 是一致变换尾的, 记为 $F\in\mathscr{C}$, 若 $\lim\limits_{y\searrow 1}\liminf\limits_{x\to\infty}\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)=1$. 比这两个重尾族更大的一个重尾族是长尾分布族. 称 $\mathbb{R}$ 上的分布 F 是长尾的, 记为 $F\in\mathscr{L}$, 若对任意的 $y>0$, 有 $\lim\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)=1$. 上述重尾分布族的包含关系为

$$\mathscr{C}\subset\mathscr{L}\cap\mathscr{D}\subset\mathscr{L}.$$

参见文献 [20]. 与重尾分布族密切相关的一个概念是 Matuszewska 指标. 对任意 $\mathbb{R}$ 上的分布 F, 定义其上 Matuszewska 指标 (upper Matuszewska index) 为

$$J_F^+ = -\lim_{y\to\infty}\frac{\ln \overline{F}_*(y)}{\ln y},\qquad 其中\ \overline{F}_*(y) := \liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\ 对任意的\ y>1.$$

进一步地, $L_F := \lim\limits_{y\searrow 1}\overline{F}_*(y)$. 显然, 下列三个命题是等价的: (1) $F\in\mathscr{D}$; (2) $L_F>0$; (3) $J_F^+<\infty$. 更多关于 Matuszewska 指标的内容可以参见文献 [21].

此外, 本文在一个更小的分布族 ($\mathscr{C}$ 族) 下探讨了随机加权和最大值尾概率的渐近性质, 并运用蒙特卡洛 (CMC) 方法对其进行了数值模拟, 从而验证了该结果的有效性. 最后, 受文献 [13] 启发, 本文在广义负相依 (extended negatively dependent, END) 结构下将本文的主要结果扩展到了随机加权和, 使其能够应用在带有保险风险与金融风险的模型中, 从而对破产概率的渐近性进行了估计. 具体而言, 假设 $X_k=\xi_k\theta_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, 其中, $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 是 n 个具有某种相依结构的实值随机变量, 分别具有分布 $F_{\xi_1},F_{\xi_2},\ldots,F_{\xi_n}$; $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ 是 n 个任意相依的非负随机变量, 且与 $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ 相互独立. ξ_k 表示保险公司在第 k 期的净损失, θ_k 表示从第 k 期至开始的折现因子, 并记 $x>0$ 为保险公司的初始准备金. 则 $\mathsf{P}(S_{(n)}>x)$ 就表示保险公司 n 期的有限时间破产概率, 记为 $\psi(x,n)$. 根据文献 [22], $\{\xi_k,\,k\geqslant 1\}$ 和 $\{\theta_k,\,k\geqslant 1\}$ 分别称为保险风险和金融风险.

本文剩下的部分分为三节: 第二节给出了本文的主要结果及其证明; 第三节给出了本文的一个推论, 并通过蒙特卡洛 (CMC) 数值模拟验证了该推论的有效性; 第四节是本文主要理论结果在带有保险风险和金融风险模型中的一类应用.

§2.　主要结果及证明

记 $\overline{G_n}(x)=1-G_n(x):=\mathsf{P}(\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}>x)$, $S_{(n)}:=\max\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$, $T_n:=X_1^++X_2^++\cdots+X_n^+$, 其中 $x^+:=\max\{x,0\}$.

定理 1　假设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是一列 PEND 的 r.v.s., 分别具有分布 $F_1,F_2,\ldots,F_n$, 若 $G_n\in\mathscr{D}$, 则

$$\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\leqslant \mathsf{P}(T_n>x)\lesssim L_{G_n}^{-1}\overline{G_n}(x). \tag{5}$$

若 $G_n\in\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, 则

$$\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\leqslant \mathsf{P}(T_n>x)\lesssim \overline{G_n}(x). \tag{6}$$

证明:　由 $G_n\in\mathscr{D}$ 知, 对所有的 x, $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)>0$. 此外, 根据 (4), 我们有

$$\overline{G_n}(x)=\mathsf{P}\Big(\bigcup_{K=1}^{n}\{X_k>x\}\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x), \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}\overline{G_n}(x) &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x) - M\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathsf{P}(X_i > x)\mathsf{P}(X_j > x)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)\Big[1 - M\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i > x)\Big].\end{aligned} \tag{8}$$

因此, 由 (7) 和 (8) 有,

$$\limsup\Big[\overline{G_n}(x)\Big/\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)\Big] \leqslant 1,$$

和

$$\begin{aligned}\liminf\Big[\overline{G_n}(x)\Big/\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)\Big] &\geqslant \liminf\Big\{\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)\Big[1 - M\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i > x)\Big]\Big/\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x)\Big\}\\ &= 1 - \limsup M\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i > x) = 1.\end{aligned}$$

从而,

$$\overline{G_n}(x) \sim \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x). \tag{9}$$

我们首先证明 (5). 对任意的 $0 < v < 1$ 和充分大的 x, 我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(T_n > x) &\leqslant \mathsf{P}\Big[\bigcup_{k=1}^{n}\{X_k^+ > (1-v)x\}\Big] + \mathsf{P}\Big[T_n > x,\ \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k^+ \leqslant (1-v)x\}\Big]\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}[X_k^+ > (1-v)x] + \mathsf{P}\Big[T_n > x,\ \bigcup_{i=1}^{n}\Big\{X_i^+ > \frac{x}{n}\Big\},\ \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k^+ \leqslant (1-v)x\}\Big]\\ &=: I_1(x) + I_2(x).\end{aligned} \tag{10}$$

由 (9) 和 $G_n \in \mathscr{D}$ 知, 对于充分大的 x, 我们有

$$I_1(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}((1-v)x) \sim \overline{G_n}((1-v)x) \lesssim L_{G_n}^{-1}\overline{G_n}(x). \tag{11}$$

对于 $I_2(x)$, 由 (4) 和 (9), 有

$$\begin{aligned}I_2(x) &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big[\bigcup_{j=1,j\neq i}^{n}\Big\{X_j^+ > \frac{vx}{n-1}\Big\},\ X_i^+ > \frac{x}{n}\Big] \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mathsf{P}\Big(X_j^+ > \frac{vx}{n-1},\ X_i^+ > \frac{x}{n}\Big)\\ &\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mathsf{P}\Big(X_j > \frac{vx}{n-1}\Big)\mathsf{P}\Big(X_i > \frac{x}{n}\Big) \lesssim M\overline{G_n}\Big(\frac{vx}{n-1}\Big)\overline{G_n}\Big(\frac{x}{n}\Big)\\ &= o\big(\overline{G_n}(x)\big).\end{aligned} \tag{12}$$

因此, 将 (11) 和 (12) 代入 (10), 即得

$$\mathsf{P}(T_n > x) \lesssim L_{G_n}^{-1}\overline{G_n}(x).$$

下面我们证明 (6). 引入一个正函数 $l(x)$, 满足 $l(x)\to\infty$, $l(x)=o(x)$, 和

$$\overline{G_n}(x\pm l(x))\sim\overline{G_n}(x). \tag{13}$$

参见文献 [23, 24].

类似于 (10), 我们将 $\mathsf{P}(T_n>x)$ 分为如下两个部分:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(T_n>x)&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}[X_k^+>x-l(x)]+\mathsf{P}\Big[T_n>x,\ \bigcup_{i=1}^{n}\Big\{X_i^+>\frac{x}{n}\Big\},\ \bigcap_{k=1}^{n}\{X_k^+\leqslant x-l(x)\}\Big]\\&=:K_1(x)+K_2(x).\end{aligned} \tag{14}$$

对于 $K_1(x)$, 由 (9), (13) 有

$$\limsup\frac{K_1(x)}{\overline{G_n}(x)}\leqslant\limsup\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{P}[X_k>x-l(x)]}{\overline{G_n}(x-l(x))}\limsup\frac{\overline{G_n}(x-l(x))}{\overline{G_n}(x)}=1.$$

$K_2(x)$ 的证明思路与 (12) 相同, 我们有 $K_2(x)=o\big(\overline{G_n}(x)\big)$. 综上所述, 可得 (6) 成立. $\square$

定理 2　假设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是一列 PEND 的 r.v.s., 分别具有分布 $F_1,F_2,\ldots,F_n$, 若 $G_n\in\mathscr{D}$, 且 $F_i(-x)=o\big(\overline{F_i}(x)\big)$, $i=1,2,\ldots,n$, 则

$$\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\geqslant\mathsf{P}(S_n>x)\gtrsim L_{G_n}\overline{G_n}(x). \tag{15}$$

进一步地, 若 $G_n\in\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, 且存在常数 $A\in\mathbb{R}$ 使得 $X_i\geqslant A$ 几乎处处成立, $i=1,2,\ldots,n$, 则

$$\mathsf{P}(S_{(n)}>x)\geqslant\mathsf{P}(S_n>x)\sim\overline{G_n}(x). \tag{16}$$

证明:　我们首先证明 (15). 对任意的 $v>0$, 由 Bonferroni 不等式有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(S_n>x)\geqslant&\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}[S_n>x,\ X_k>(1+v)x]\\&-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathsf{P}[S_n>x,\ X_i>(1+v)x,\ X_j>(1+v)x]\\=:&\,I_3(x)-I_4(x).\end{aligned} \tag{17}$$

首先处理 $I_4(x)$. 由 (4) 和 (9), 有

$$\begin{aligned}I_4(x)&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathsf{P}[X_i>(1+v)x,\ X_j>(1+v)x]\\&\leqslant M\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\mathsf{P}(X_i>x)\mathsf{P}(X_j>x)\leqslant M\Big[\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}(X_i>x)\Big]^2\\&\sim\big(\overline{G_n}(x)\big)^2=o\big(\overline{G_n}(x)\big).\end{aligned} \tag{18}$$

对于 $I_3(x)$, 将其分为如下两个部分:

$$\begin{aligned}
I_3(x) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[S_n - X_k > -vx,\, X_k > (1+v)x] \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \{\mathsf{P}(S_n - X_k > -vx) + \mathsf{P}[X_k > (1+v)x] - 1\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[X_k > (1+v)x] - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(S_n - X_k \leqslant -vx) \\
&=: I_{31}(x) - I_{32}(x).
\end{aligned} \tag{19}$$

其中, 由 (9) 和 $G_n \in \mathscr{D}$, 知

$$\lim_{v\downarrow 0} \liminf \frac{I_{31}(x)}{L_{G_n}\overline{G_n}(x)} \geqslant 1. \tag{20}$$

由 $G_n \in \mathscr{D}$, $F_i(-x) = o\big(\overline{F_i}(x)\big)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 和 (9), 有

$$\begin{aligned}
I_{32}(x) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1, i\neq k}^{n} \Big\{X_i \leqslant \frac{-vx}{n-1}\Big\}\Big) \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(X_i \leqslant \frac{-vx}{n-1}\Big) \\
&= o(1) \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\Big(X_i > \frac{vx}{n-1}\Big) = o(1)\overline{G_n}\Big(\frac{vx}{n-1}\Big) \\
&= o\big(\overline{G_n}(x)\big).
\end{aligned} \tag{21}$$

由 (17)–(21) 可得 (15) 成立.

接下来我们证明 (16). 类似于 (17), 我们有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n > x) \geqslant\ & \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[S_n > x,\, X_k > x + l(x)] \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathsf{P}[S_n > x,\, X_i > x + l(x),\, X_j > x + l(x)] \\
=:\ & K_3(x) - K_4(x).
\end{aligned} \tag{22}$$

其中, $l(x)$ 与 (13) 中相同. 类似于 (18),

$$K_4(x) \leqslant M\Big[\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(X_i > x)\Big]^2 = o\big(\overline{G_n}(x)\big). \tag{23}$$

对于 $K_3(x)$, 我们有

$$\begin{aligned}
K_3(x) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[X_k > x + l(x)] - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[S_n - X_k \leqslant -l(x)] \\
&=: K_{31}(x) - K_{32}(x).
\end{aligned} \tag{24}$$

由 (9) 和 (13), 知

$$\liminf \frac{K_{31}(x)}{\overline{G_n}(x)} \geqslant \liminf \frac{K_{31}(x)}{\overline{G_n}(x + l(x))} \liminf \frac{\overline{G_n}(x + l(x))}{\overline{G_n}(x)} = 1. \tag{25}$$

对于 $K_{32}(x)$, 由于 $X_i \geqslant A$ 几乎处处成立, $i=1,2,\ldots,n$, 我们有

$$K_{32}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\Big[\bigcup_{i=1,i\neq k}^{n}\Big\{X_i \leqslant -\frac{l(x)}{n-1}\Big\}\Big] \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\mathsf{P}\Big[X_i \leqslant -\frac{l(x)}{n-1}\Big] = 0. \tag{26}$$

将 (23)–(26) 代入 (22), 可得

$$\mathsf{P}(S_n > x) \gtrsim \overline{G_n}(x). \tag{27}$$

结合 (6) 和 (27) 可得 (16) 成立. □

推论 3　假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一列 PUEND 的 r.v.s., 分别具有分布 $F_1, F_2, \ldots, F_n$, 若 $G_n \in \mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, 且存在常数 $A\in\mathbb{R}$ 使得 $X_i \geqslant A$ 几乎处处成立, $i=1,2,\ldots,n$, 则有

$$\mathsf{P}(S_n > x) \sim \mathsf{P}(S_{(n)} > x) \sim \overline{G_n}(x) \sim \sum_{k=1}^{n}\overline{F_k}(x).$$

§3.　推论及其模拟

本节进一步将 X_k 具体化成 $X_k = \xi_k\theta_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, 其中, $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是同分布的实值 r.v.s., $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是独立但不一定同分布的非负 r.v.s., 并且与 $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 相互独立, 从而探讨了随机加权和最大值尾概率的渐近性. 与此同时, 本节对该结果通过蒙特卡洛 (CMC) 数值模拟验证了其有效性. 首先给出如下引理.

引理 4　假设 $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是 n 个 PUEND 的实值 r.v.s., 具有共同的分布 F_ξ, $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是 n 个独立但不一定同分布的非负 r.v.s., 并且与 $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 相互独立. 则 $\{\xi_k\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 仍是 PUEND 的.

证明:　对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 及任意的 $x_i, x_j\in\mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\xi_i\theta_i > x_i,\, \xi_j\theta_j > x_j) &= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\xi_i > \frac{x_i}{u},\, \xi_j > \frac{x_j}{v}\Big)\mathsf{P}(\theta_i\in \mathrm{d}u)\mathsf{P}(\theta_j\in\mathrm{d}v)\\ &\leqslant M\int_0^\infty\int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\xi_i > \frac{x_i}{u}\Big)\mathsf{P}\Big(\xi_j > \frac{x_j}{v}\Big)\mathsf{P}(\theta_i\in\mathrm{d}u)\mathsf{P}(\theta_j\in\mathrm{d}v)\\ &= M\mathsf{P}(\xi_i\theta_i > x_i)\mathsf{P}(\xi_j\theta_j > x_j).\end{aligned}$$

即, $\{\xi_k\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是 PUEND 的. □

推论 5　假设 $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是一列 PUEND 的实值 r.v.s., 具有共同的分布 $F_\xi\in\mathscr{C}$, $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是一列独立但不一定同分布的非负上有界 r.v.s., 并且 $F_\xi(-x) = o\big(\overline{F_\xi}(x)\big)$. $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 与 $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 相互独立. 则有

$$\mathsf{P}(S_{(n)} > x) = \mathsf{P}\Big(\max_{0\leqslant m\leqslant n}\sum_{k=1}^{m}\xi_k\theta_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_k\theta_k > x). \tag{28}$$

证明: 由 $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是非负上有界的知, 存在常数 $b>0$ 使得 $\theta_k\leqslant b,\, 1\leqslant k\leqslant n$. 对任意的 $y>1$ 有

$$\mathsf{P}(\xi\theta>xy)=\int_0^b\overline{F_\xi}\Big(\frac{xy}{u}\Big)\mathsf{P}(\theta\in \mathrm{d}u)\geqslant\inf_{z\geqslant x/b}\frac{\overline{F_\xi}(zy)}{\overline{F_\xi}(z)}\cdot\mathsf{P}(\xi\theta>x),$$

从而由 $F_\xi\in\mathscr{C}$ 有

$$\lim_{y\downarrow 1}\liminf\frac{\mathsf{P}(\xi\theta>xy)}{\mathsf{P}(\xi\theta>x)}=1,$$

即, $F\in\mathscr{C}$.

对任意的 $x>0$, $y>1$, 由 Bonferroni 不等式知,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{G_n}(xy)}{\overline{G_n}(x)}&\geqslant\Big[\sum_{k=1}^n\overline{F_k}(xy)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n\mathsf{P}(X_i>xy,\,X_j>xy)\Big]\Big/\sum_{k=1}^n\overline{F_k}(x)\\&\geqslant\min_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\{\frac{\overline{F_k}(xy)}{\overline{F_k}(x)}\Big\}-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n\frac{M\mathsf{P}(X_i>xy)\mathsf{P}(X_j>xy)}{\overline{F_i}(x)}\\&\gtrsim\min_{1\leqslant k\leqslant n}\overline{F_{k*}}(y)\to 1,\end{aligned}$$

最后一步令 $y\downarrow 1$. 从而, $G_n\in\mathscr{C}$.

最后, 结合引理 7 以及 $L_{G_n}=1$ 可得推论成立. □

在数值模拟中, 假设 r.v.s. $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 服从共同的 Pareto 分布:

$$F(x)=1-\Big[1+\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)^{1/\gamma}\Big]^{-\alpha},\tag{29}$$

其中, 参数满足 $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, $\gamma>0$, $\alpha>0$. 该分布属于分布族 $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$. 假设 r.v.s. $\{\theta_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 服从在区间 $(0,\beta)$ 上的均匀分布. 对于相依结构, 假设 $\{(\xi_{2i-1},\xi_{2i}),\, i\geqslant 1\}$ 是 (ξ_1,ξ_2) 的独立复制, 并具有如下联合分布函数:

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\max\big\{\big\{[F_{\xi_1}(x)]^{-\delta}+[F_{\xi_2}(y)]^{-\delta}-1\big\}^{-1/\delta},\,0\big\},\tag{30}$$

其中, 参数 $\delta\in[-1,\infty)\backslash\{0\}$. 上述联合分布函数是根据 Clayton Copula 函数构造的, 据此有对任意的 $\delta>0$, 有 $\mathsf{P}(\xi_1>x,\,\xi_2>y)\leqslant(1+\delta)\mathsf{P}(\xi_1>x)\mathsf{P}(\xi_2>y)$, 从而 (ξ_1,ξ_2) 是 PUEND r.v.s., 参见文献 [9] 中的第 3 节. 又由 $\{(\xi_{2i-1},\xi_{2i}),\, i\geqslant 1\}$ 的独立性知, $\{\xi_k,\, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 也是 PUEND 的. 更多关于 Copula 函数的内容参见文献 [25].

我们选取的 Pareto 参数为: $\mu=-20$, $\sigma=3.3$, $\gamma=0.5$, $\alpha=0.8$, Copula 参数为: $\delta=1$. 另外, 我们设定: $\beta=2$. 我们按照以下步骤进行了 CMC 数值模拟:

步骤 1: 设定 x 的初始值;

步骤 2: 设定变量 l 的初始值: $l=0$;

步骤 3: 依据 (29) 和 (30) 生成 PUEND r.v.s. $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 和服从 $(0,2)$ 上均匀分布的 i.i.d. r.v.s. $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$, 并计算 $\xi_1\theta_1,\xi_2\theta_2,\ldots,\xi_n\theta_n$;

步骤 4: 依次对向量 $\xi_1\theta_1, \xi_2\theta_2, \ldots, \xi_n\theta_n$ 进行累加得到向量 $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k\theta_k$, 并提取其最大值: $S_{(n)}$;

步骤 5: 比较 $S_{(n)}$ 和 x, 若 $S_{(n)} > x$, 则 $l = l + 1$;

步骤 6: 重复步骤 3 至步骤 5 N 次, 得到 l, 计算 l/N, 即为 $\mathsf{P}(S_{(n)} > x)$ 的矩估计值;

步骤 7: 令 $x = x + c$, 并重复步骤 2 至步骤 6, 直到达到 x 的最终值. 其中, c 是一个常数.

$\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_k\theta_k > x)$ 估计值的模拟方法与上述类似, 这里不再赘述.

我们设定 x 的取值范围是从 100 至 1 000, 从初始值 $x = 100$ 开始以步长 $c = 10$ 递增直到 1 000, $n = 10$, $N = 10^6$, 并记 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 分别是 $\mathsf{P}(S_{(n)} > x)$ 的矩估计值和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{P}(\xi_k\theta_k > x)$ 的估计值. 得到的结果见下图:

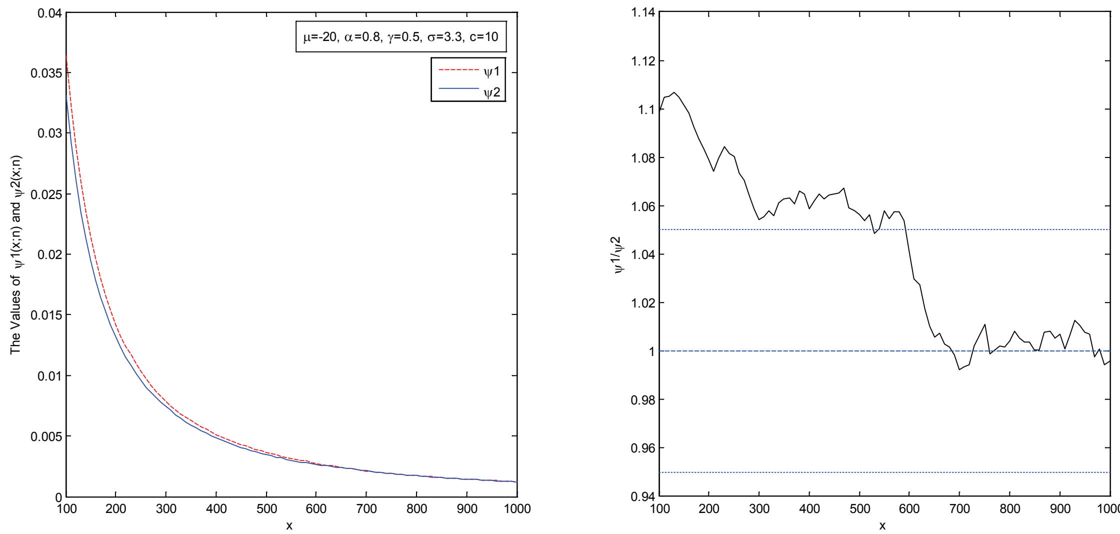

图1　相同 Pareto 分布下渐近估计的精度 ($N = 10^6$)

图 1 的左边是 ψ_1 和 ψ_2 的值随 x 不断增加而不断变化的趋势. 为了确定 ψ_1 和 ψ_2 是否确实是渐近的, 我们在图 1 的右边展示了 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 的比值. 从图中可以看出, $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 随着 x 不断增加, 迅速减小, 并趋于一致. 此外, ψ_1/ψ_2 也随着 x 的不断增加而减小, 并在 x 较大时, 落至区间 $[0.95, 1.05]$ 内并最终保持在比值 1 附近波动, 即 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 的差与 $\psi_1(x; n)$ 的比值控制在了 $\pm 5\%$ 以内. 因此, (28) 中的渐近关系是有效的.

§4.　在带有保险风险与金融风险离散时间模型中的应用

在这一节中, 本文讨论破产概率 $\psi(x, n)$ 的渐近性质. 其中, 如同第一节所述, 记

$X_k = \xi_k\theta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. ξ_k 表示保险公司在第 k 期的净损失, θ_k 表示从第 k 期至开始的折现因子, 且与 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ 相互独立. 在给出主要定理及其证明之前, 本文首先给出如下引理.

引理 6 假设 $\{\xi_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是 n 个独立的实值 r.v.s., $\{\theta_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是 n 个 PEND 非负 r.v.s., 并且与 $\{\xi_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 相互独立. 则 $\{\xi_k\theta_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 仍是 PEND 的.

证明: 证明方法与引理 4 相同. 我们只证明 r.v.s. $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ 是 PUEND 的情况, PLEND 情形的证明方法与之类似, 结合二者可以证得引理成立. 由条件知, 对任意的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 及任意的 $x_i, x_j \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\xi_i\theta_i > x_i, \xi_j\theta_j > x_j) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\theta_i > \frac{x_i}{u}, \theta_j > \frac{x_j}{v}\Big)\mathsf{P}(\xi_i \in \mathrm{d}u)\mathsf{P}(\xi_j \in \mathrm{d}v) \\
&\leqslant M \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\theta_i > \frac{x_i}{u}\Big)\mathsf{P}\Big(\theta_j > \frac{x_j}{v}\Big)\mathsf{P}(\xi_i \in \mathrm{d}u)\mathsf{P}(\xi_j \in \mathrm{d}v) \\
&= M\mathsf{P}(\xi_i\theta_i > x_i)\mathsf{P}(\xi_j\theta_j > x_j).
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\xi_i\theta_i \leqslant x_i, \xi_j\theta_j \leqslant x_j) &\leqslant M \int_0^\infty \int_0^\infty \mathsf{P}\Big(\theta_i \leqslant \frac{x_i}{u}\Big)\mathsf{P}\Big(\theta_j \leqslant \frac{x_j}{v}\Big)\mathsf{P}(\xi_i \in \mathrm{d}u)\mathsf{P}(\xi_j \in \mathrm{d}v) \\
&= M\mathsf{P}(\xi_i\theta_i \leqslant x_i)\mathsf{P}(\xi_j\theta_j \leqslant x_j).
\end{aligned}$$

从而, $\{\xi_k\theta_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 是 PEND 的. □

引理 7 假设 ξ 是一个实值 r.v., 具有分布 F_ξ, θ 是一个与 ξ 独立的非负上有界 r.v. 记乘积 $\xi\theta$ 的分布为 F. 若 $F_\xi(-x) = o\big(\overline{F_\xi}(x)\big)$, 则 $F(-x) = o\big(\overline{F}(x)\big)$.

证明: 由 θ 是上有界的知, 存在常数 $b > 0$ 使得, 对所有的 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有 $\theta \leqslant b$.

$$\begin{aligned}
F(-x) = \int_0^b F_\xi\Big(-\frac{x}{u}\Big)\mathsf{P}(\theta \in \mathrm{d}u) &\leqslant \sup_{0<u\leqslant b} \frac{F_\xi(-u^{-1}x)}{\overline{F_\xi}(u^{-1}x)} \cdot \int_0^b \overline{F_\xi}\Big(\frac{x}{u}\Big)\mathsf{P}(\theta \in \mathrm{d}u) \\
&= \sup_{z \geqslant x/b} \frac{F_\xi(-z)}{\overline{F_\xi}(z)} \cdot \overline{F}(x) = o\big(\overline{F}(x)\big).
\end{aligned}$$

证毕. □

定理 8 假设在一个带有保险风险和金融风险的离散时间风险模型中, 净损失 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ 是 n 个独立的实值 r.v.s., 分别具有分布 $F_{\xi_1} \in \mathscr{D}, F_{\xi_2} \in \mathscr{D}, \ldots, F_{\xi_n} \in \mathscr{D}$; 折现因子 $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ 是 n 个 PEND 非负 r.v.s., 满足 $\mathsf{P}(\theta_k \in [a, b]) = 1$, 其中, $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 < a \leqslant b < \infty$. 此外, $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ 与 $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ 相互独立. 则有 (5) 和 (15) 成立.

证明: 注意到若 $F_k \in \mathscr{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, 则 $G_n \in \mathscr{D}$. 参见文献 [13; Remark 1], 也可以参见文献 [26; Theorem 3.3 (i)]. 根据引理 6、引理 7 以及 (5) 和 (15) 分别在定理 1 和

定理 2 中的证明知, 我们只需证明 $F_k(x) = \mathsf{P}(\xi_k\theta_k \leqslant x) \in \mathscr{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 对任意的 $0 < y < 1$,

$$\limsup \frac{\mathsf{P}(\xi_k\theta_k > xy)}{\mathsf{P}(\xi_k\theta_k > x)} \leqslant \limsup \frac{\mathsf{P}(b\xi_k > xy)}{\mathsf{P}(a\xi_k > x)} = \limsup \frac{\mathsf{P}(\xi_k > axy/b)}{\mathsf{P}(\xi_k > x)} < \infty,$$

其中, 最后一步运用了 $F_{\xi_k} \in \mathscr{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.　　□

参 考 文 献

[1] GELUK J, NG K W. Tail behavior of negatively associated heavy-tailed sums [J]. *J Appl Probab*, 2006, **43(2)**: 587–593.

[2] CHEN Y Q, YUEN K C. Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation [J]. *Stoch Models*, 2009, **25(1)**: 76–89.

[3] LI J Z. On pairwise quasi-asymptotically independent random variables and their applications [J]. *Statist Probab Lett*, 2013, **83(9)**: 2081–2087.

[4] LI J Z, TANG Q H. A note on max-sum equivalence [J]. *Statist Probab Lett*, 2010, **80(23-24)**: 1720–1723.

[5] TANG Q H. Insensitivity to negative dependence of the asymptotic behavior of precise large deviations [J]. *Electron J Probab*, 2006, **11(Paper no. 4)**: 107–120.

[6] TANG Q H. Insensitivity to negative dependence of asymptotic tail probabilities of sums and maxima of sums [J]. *Stoch Anal Appl*, 2008, **26(3)**: 435–450.

[7] ZHANG Y, SHEN X M, WENG C G. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums and applications [J]. *Stochastic Process Appl*, 2009, **119(2)**: 655–675.

[8] GAO Q W, WANG Y B. Randomly weighted sums with dominated varying-tailed increments and application to risk theory [J]. *J Korean Statist Soc*, 2010, **39(3)**: 305–314.

[9] DINDIENĖ L, LEIPUS R. Weak max-sum equivalence for dependent heavy-tailed random variables [J]. *Lith Math J*, 2016, **56(1)**: 49–59.

[10] YANG Y, ZHANG T, YUEN K C. Approximations for finite-time ruin probability in a dependent discrete-time risk model with CMC simulations [J]. *J Comput Appl Math*, 2017, **321**: 143–159.

[11] YANG Y, SHI X X, HUANG X F. A note on the asymptotics for the randomly stopped weighted sums [J]. *Nonlinear Anal Model Control*, 2018, **23(2)**: 204–212.

[12] YANG Y, YUEN K C, LIU J F. Asymptotics for ruin probabilities in Lévy-driven risk models with heavy-tailed claims [J]. *J Ind Manag Optim*, 2018, **14(1)**: 231–247.

[13] YANG Y, LEIPUS R, DINDIENĖ L. On the max-sum equivalence in presence of negative dependence and heavy tails [J]. *Inf Technol Control*, 2015, **44(2)**: 215–220.

[14] LIU L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails [J]. *Statist Probab Lett*, 2009, **79(9)**: 1290–1298.

[15] EBRAHIMI N, GHOSH M. Multivariate negative dependence [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 1981, **10(4)**: 307–337.

[16] BLOCK H W, SAVITS T H, SHAKED M. Some concepts of negative dependence [J]. *Ann Probab*, 1982, **10(3)**: 765–772.

[17] CHEN Y Q, CHEN A Y, NG K W. The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables [J]. *J Appl Probab*, 2010, **47(4)**: 908–922.

[18] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications [J]. *Ann Statist*, 1983, **11(1)**: 286–295.

[19] SHEN A T. Probability inequalities for END sequence and their applications [J]. *J Inequal Appl*, 2011, **2011(Article ID 98)**: 12pp.

[20] EMBRECHTS P, KLÜPPELBERG C, MIKOSCH T. *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[21] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. *Regular Variation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[22] NORBERG R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type [J]. *Stochastic Process Appl*, 1999, **81(2)**: 255–269.

[23] GELUK J, TANG Q H. Asymptotic tail probabilities of sums of dependent subexponential random variables [J]. *J Theoret Probab*, 2009, **22(4)**: 871–882.

[24] FOSS S, KORSHUNOV D, ZACHARY S. Convolutions of long-tailed and subexponential distributions [J]. *J Appl Probab*, 2009, **46(3)**: 756–767.

[25] NELSEN R B. *An Introduction to Copulas* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2007.

[26] CLINE D B H, SAMORODNITSKY G. Subexponentiality of the product of independent random variables [J]. *Stochastic Process Appl*, 1994, **49(1)**: 75–98.

Asymptotics for Tail Probabilities of the Sum and Its Maximum of Extended Negatively Dependent and Heavy-Tailed Random Variables

ZHANG Ting   LI Feng   YANG Yang   LIN Jinguan

(*School of Statistics and Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing, 211815, China*)

Abstract: Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sequence of extended negatively dependent random variables with distributions $F_1, F_2, \ldots, F_n$, respectively. Denote by $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. This paper establishes the asymptotic relationship for the quantities $\mathsf{P}(S_n > x)$, $\mathsf{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x)$, $\mathsf{P}(\max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\} > x)$ and $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k > x)$ in the three heavy-tailed cases. Based on this, this paper also investigates the asymptotics for the tail probability of the maximum of randomly weighted sums, and checks its accuracy via Monte Carlo simulations. Finally, as an application to the discrete-time risk model with insurance and financial risks, the asymptotic estimate for the finite-time ruin probability is derived.

Keywords: extended negative dependence; consistently varying tailed distribution; dominatedly varying tailed distribution; long-tailed distribution; Monte Carlo simulation; discrete-time risk model; finite-time ruin probability

2010 Mathematics Subject Classification: 62P05; 62E20; 60F10