应用概率统计　第 36 卷
第 1 期　2020 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Feb., 2020, Vol. 36, No. 1, pp. 71-85
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.01.006

马尔科夫机制转换谱正 Lévy 风险模型中的最优分红策略 *

叶传秀
(曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜, 273165)

赵永霞*
(曲阜师范大学统计学院, 曲阜, 273165)

摘　要： 在马尔科夫机制转换谱正 Lévy 风险模型中, 研究最优分红问题. 通过构造辅助的最优化问题, 利用动态规划准则和 Lévy 过程的漂移理论, 证明了调节有界分红策略是最优策略, 通过迭代方法得到了值函数和最优分红水平.

关键词： 马尔科夫机制转换; Lévy 风险模型; 最优分红; HJB 方程; 漂移理论

中图分类号： O211.62

英文引用格式： YE C X, ZHAO Y X. Optimal dividend strategy in the spectrally postive Lévy risk model with regime switching [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(1): 71–85. (in Chinese)

§1. 引　　言

谱正 Lévy 风险模型又称为对偶风险模型, 该模型中的分红问题被许多学者研究. 文献 [1] 和 [2] 研究了对偶复合泊松模型中的分红问题; 文献 [3], [4], [5] 和 [6] 研究了谱正 Lévy 风险模型中的最优分红问题. 一般应用马尔科夫机制转换来描述金融市场状态的变化, 马尔科夫机制转换下的风险模型引起了许多学者关注. 文献 [7] 研究了两个状态的马尔科夫机制转换对偶风险模型中的有界分红问题. 文献 [8], [9], [10] 和 [11] 研究了马尔科夫转换机制下扩散模型中的最优分红问题; 文献 [12] 研究了马尔科夫转换机制下对偶复合泊松模型中的最优分红问题. 然而马尔科夫机制转换下一般谱正 Lévy 风险模型中的最优分红问题仍没有被研究, 于是这篇文章将探讨这个问题. 我们首先利用辅助的最优问题和动态规划准则, 证明了最优分红策略为调节的有界策略, 然后利用 Lévy 过程的漂移理论得到辅助最优问题的解, 最后利用迭代的方法得到破产前红利折现期望的最大值和最优分红障碍水平. 本文研究的谱正 Lévy 风险模型具有一般性, 并且创新地应用 Lévy 过程的漂研究移理论解决辅助的最优问题, 不同于以上有关马尔科夫转换机制下风险模型中文献的研究方法.

马尔科夫机制转换模型中的参数值随着一个马尔科夫链的状态变化而变化. 设 $\{J_t\}$是定义在有限集 $\mathbb{J}=\{1,2,\cdots,N\}$ 上齐次的, 不可约的连续时间马尔科夫链. 记它的强度矩

---

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11701319、11501321、11501319) 和中国博士后科学基金项目 (批准号: 2016M592157) 资助.

*通讯作者, E-mail: yongxiazhao@163.com.

本文 2018 年 10 月 17 日收到, 2018 年 12 月 4 日收到修改稿.

阵 (或称 Q 矩阵) 为 $Q=(q_{ij})_{N\times N}$, 其中 $-q_{ii}=q_i$. 公司的风险过程定义为

$$X_t=x+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}}\mathrm{d}X_s^i, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ 为示性函数. $\{X_t^i\}$ 为一个谱正Lévy风险模型, 且 $\{X^1,X^2,\cdots,X^N\}$ 相互独立. $\{X_t^i\}$ 的三元组为 (c_i,σ_i,ν_i), 其中 $c_i>0$, $\sigma_i\geqslant 0$, 而 ν_i 是 $(0,\infty)$ 上的 Lévy 测度, 并且满足 $\int_0^\infty(1\wedge x^2)\nu_i(\mathrm{d}x)<\infty$. 在给定 $(X_0^i=x,J_0=i)$ 条件下, 概率测度和条件期望分别记作 $\mathsf{P}^{x,i}$ 和 $\mathsf{E}^{x,i}$. Lévy 过程 $\{X_t^i\}$ 的拉普拉斯指数为

$$\psi_i(s)=\frac{1}{t}\ln\mathsf{E}^{0,i}[\mathrm{e}^{-sX_t^i}]=\frac{\sigma_i^2}{2}s^2+c_is+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-sx}-1+sx\mathbf{1}_{\{0<x\leqslant 1\}})\nu_i(\mathrm{d}x). \tag{2}$$

Lévy 过程 $\{X_t^i\}$ 是有界变差的充分必要条件为 $\sigma_i=0$ 并且 $\int_0^1 x\nu_i(\mathrm{d}x)<\infty$. 相应的, 拉普拉斯算子 (2) 可以写为

$$\psi_i(s)=c_i^0s+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-sx}-1)\nu_i(\mathrm{d}x), \tag{3}$$

其中 $c_i^0=c_i+\int_0^1 x\nu_i(\mathrm{d}x)$, 当 $\{X_t^i\}$ 是有界变差时, 为了排除过程有单调路径, 我们假设 $c_i^0>0$. 过程 $\{X_t^i\}$ 的单位漂移为

$$\mu_i=\mathsf{E}^{0,i}[X_1^i]=-\psi_i'(0+).$$

如果 $\int_1^\infty y\nu_i(\mathrm{d}y)<\infty$, 那么 $\mu_i=-c_i+\int_1^\infty y\nu_i(\mathrm{d}y)<\infty$. 本文中, 我们假设 $-\infty<\mu_i<\infty$ $(i=1,2,\cdots,N)$. 有关 Lévy 过程的理论可参考文献 [13].

假设一个完备带流的概率空间 $\{\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\},\mathsf{P}\}$, 其中 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是由 $\{X_t\}$ 和 $\{J_t\}$ 生成的 σ-流, 并且满足通常条件. 在分红策略 π 下, 控制的盈余过程为

$$X_t^\pi=x+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \mathbf{1}_{\{J_s=i\}}\mathrm{d}X_s^i-D_t^\pi, \tag{4}$$

其中 D_t^π 为到 t 时刻为止的累积分红量. 称一个控制策略 π 为容许的, 如果分红过程 $\{D_t^\pi\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应, 非负的以及右连左极的. 记容许策略的全体为 Π. 令 $\tau^\pi=\inf\{t\geqslant 0: X_t^\pi\leqslant 0\}$ 为公司的破产时刻. 给定初始盈余 $x\geqslant 0$ 和马尔科夫链状态为 $i\in\mathbb{J}$, 定义到破产为止累积分红的折扣期望为

$$V_\pi(x,i)=\mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi}\mathrm{e}^{-\Lambda_t}\mathrm{d}D_t^\pi\Big], \tag{5}$$

其中 $\Lambda_t=\sum\limits_{k=1}^{N}\int_0^t\mathbf{1}_{\{J_s=k\}}\delta_k\mathrm{d}s$, $\delta_i>0$ 为在状态 i 下的折扣因子. 值函数为

$$V(x,i)=\sup_{\pi\in\Pi}V_\pi(x,i),\qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{6}$$

容易知道, 对所有 $i\in\mathbb{J}$, 有 $V(0,i)=0$. 我们的目标是要找到一个容许策略 $\pi^*\in\Pi$, 使得对所有 $i\in\mathbb{J}$, 有 $V(x,i)=V_{\pi*}(x,i)$.

§2.　动态规划方程

这里应用文献 [9] 中的方法, 通过构造一个收敛到值函数的函数序列, 来证明动态规划方程. 下面用粗体字母表示如下形式的向量函数:

$$\boldsymbol{v}(x) = (v(x,1), v(x,2), \cdots, v(x,N)).$$

两个向量或向量函数之间用符号 "$\leqslant$" 或 "$\geqslant$", 表示对应的分量之间 "$\leqslant$" 或 "$\geqslant$" 成立. 另外, 记 $\mathbf{0}$ 为元素个数为 N 的横的零向量.

令 $\zeta_0 = 0$ 和 $\zeta_n = \inf\{t \geqslant \zeta_{n-1} : J_{t-} \neq J_t\}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 ζ_n 是马尔科夫链 $\{J_t\}$ 第 n 次跳的时刻. 给定一个函数 $\boldsymbol{v}(x)$, 定义泛函算子

$$\mathscr{M}\boldsymbol{v}(x) = (\mathscr{M}v(x,1), \mathscr{M}v(x,2), \cdots, \mathscr{M}v(x,N)),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{M}v(x,i) &= \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi\wedge\zeta_1} \mathrm{e}^{-\Lambda_t}\mathrm{d}D_t^\pi + \mathrm{e}^{-\Lambda_{\tau^\pi\wedge\zeta_1}} v(X^\pi_{\tau^\pi\wedge\zeta_1}, J_{\tau^\pi\wedge\zeta_1})\Big] \\ &= \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi\wedge\zeta_1} \mathrm{e}^{-\delta_i t}\mathrm{d}D_t^\pi + \mathrm{e}^{-\delta_i(\tau^\pi\wedge\zeta_1)} v(X^\pi_{\tau^\pi\wedge\zeta_1}, J_{\tau^\pi\wedge\zeta_1})\Big]. \end{aligned}\tag{7}$$

由 $\mathscr{M}$ 的定义, 我们有下面的引理.

引理 1　如果 $\boldsymbol{v}_1 \geqslant \boldsymbol{v}_2$, 则对所有 $x \geqslant 0$, 有 $\mathscr{M}\boldsymbol{v}_1(x) \geqslant \mathscr{M}\boldsymbol{v}_2(x)$.

引理 2　对所有 $x \geqslant 0$, 令 $\boldsymbol{U}_0(x) = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{U}_n(x) = \mathscr{M}\boldsymbol{U}_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, 则对每个 $i \in \mathbb{J}$, $\{U_n(\cdot, i)\}$ 是一个递增的函数列.

对 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 设 $\Pi_n = \{\pi \in \Pi : D_s^\pi = 0, \forall\, s \geqslant \zeta_n\}$ 为一容许策略的子集合, 即是这个集合中的任意一个策略, 在马尔科夫链 $\{J_t\}$ 发生 n 次跳之后没有红利派发. 令

$$V_n(x,i) = \sup_{\pi\in\Pi_n} V_\pi(x,i).$$

类似于文献 [9] 的引理 3.3, 我们有下面的引理.

引理 3　对所有 $x \geqslant 0$, 有 $\boldsymbol{V}_n(x) = \boldsymbol{U}_n(x)$ 成立, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

引理 4　对所有 $x \geqslant 0$ 和 $i \in \mathbb{J}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x,i) = V(x,i)$ 成立.

证明:　由引理 2 知, 对固定的 $x \geqslant 0$ 和 $i \in \mathbb{J}$, 有 $U(x,i) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x,i)$ 存在. 因为 $\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{V}_n \leqslant \boldsymbol{V}$, 所以 $\boldsymbol{U} \leqslant \boldsymbol{V}$. 下面证明相反的不等号也成立. 令 $\pi \in \Pi$ 是一个容许策略, 定义 $\pi_n \in \Pi_n$ 为: 在 ζ_n 之前的策略为 π, 而之后没有红利派发. 注意到 $\tau^{\pi_n} \leqslant \tau^\pi$ a.s., 可知

$$V_\pi(x,i) - V_{\pi_{n+1}}(x,i) \leqslant \mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi} \mathrm{e}^{-\Lambda_t}\mathrm{d}D_t^\pi - \int_0^{\tau^\pi} \mathrm{e}^{-\Lambda_t}\mathrm{d}D_t^{\pi_n}\Big]$$

$$= \mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_{\tau^\pi\wedge\zeta_n}^{\tau^\pi} \mathrm{e}^{-\Lambda_t}\mathrm{d}D_t^\pi\Big] \to 0, \qquad \text{当 } n\to\infty.$$

因此, 对任意 $\varepsilon>0$ 存在充分大的 n, 使得

$$U_n(x,i) = V_n(x,i) \geqslant V_{\pi_n}(x,i) \geqslant V_\pi(x,i) - \varepsilon.$$

由 π 和 ε 任意性, 可知 $U(x,i)\geqslant V(x,i)$. □

定理 5 值函数 $\boldsymbol{V}$ 满足动态规划方程 $\boldsymbol{V}=\mathscr{M}\boldsymbol{V}$, 即对所有 $x\geqslant 0$, $i\in\mathbb{J}$, 有

$$V(x,i) = \sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi\wedge\zeta_1}\mathrm{e}^{-\delta_i t}\mathrm{d}D_t^\pi + \mathrm{e}^{-\delta_i(\tau^\pi\wedge\zeta_1)}V(X^\pi_{\tau^\pi\wedge\zeta_1}, J_{\tau^\pi\wedge\zeta_1})\Big], \tag{8}$$

且 $\boldsymbol{V}$ 是所有满足条件 $\boldsymbol{V}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的最小的解.

证明: 由引理 2、引理 3 和引理 4 以及单调收敛定理知, 方程 (8) 成立. 假设 $\boldsymbol{V}'$ 也满足此动态规划方程, 且 $\boldsymbol{V}'\geqslant 0=\boldsymbol{V}_0$. 由引理 1 可知 $\boldsymbol{V}'=\mathscr{M}\boldsymbol{V}'\geqslant\mathscr{M}\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_1$, 重复应用算子 $\mathscr{M}$, 可以得出对所有的 n 有 $\boldsymbol{V}'\geqslant\boldsymbol{V}_n$ 成立. 结论得证. □

§3. 一个辅助的最优化问题

从上一节知道值函数可以通过迭代得到. 因此我们只要在给定 $\boldsymbol{U}_n$ 的条件下, 求出 $\boldsymbol{U}_{n+1}$ 即可. 为了解决这个问题, 考虑一个辅助的最优化问题.

称函数 $f(x,i)$ 在 $\mathscr{D}$ 上充分光滑, 若: 当 $\{X_t^i\}$ 为有界变差时, $f(x,i)\in\mathscr{C}^1(\mathscr{D})$; 当 $\{X_t^i\}$ 为无界变差时, $f(x,i)\in\mathscr{C}^2(\mathscr{D})$. 设 $\mathbb{D}$ 为一个向量函数类, 有如下的定义

定义 6 称向量函数 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{D}$, 如果对 $\forall i\in\mathbb{J}$, 满足下列条件

(i) $u(x,i)$ 在 $[0,\infty)$ 上是非负的增的凹的并且 $u(0,i)=0$;

(ii) 当 $u(x,i)$ 在 $(0,\infty)$ 上充分光滑.

取一个函数 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{D}$, 考虑如下的辅助最优化问题

$$M(x,i) = \sup_{\pi\in\Pi} M_\pi(x,i), \tag{9}$$

其中

$$M_\pi(x,i) = \mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi\wedge\zeta_1}\mathrm{e}^{-\delta_i t}\mathrm{d}D_t^\pi + \mathrm{e}^{-\delta_i(\tau^\pi\wedge\zeta_1)}u(X^\pi_{\tau^\pi\wedge\zeta_1}, J_{\tau^\pi\wedge\zeta_1})\Big]. \tag{10}$$

对任意策略 $\pi\in\Pi$, 分红策略 $D_s^i=\mathbf{1}_{\{J_s=i\}}D_s^\pi$, 令

$$Y_t^i = x + X_t^i - D_t^i, \tag{11}$$

设 τ^i 为 $\{Y_t^i\}$ 的破产时刻. 记 $\eta(q_i)$ 为一个独立的参数为 q_i 的指数随机变量, 可知 $\{Y_t^i,\ t<\tau^i\wedge\eta(q_i)\}$ 与 $\{X_t^\pi,\ J_0=i,\ t<\tau^\pi\wedge\zeta_1\}$ 同分布. 因此式子 (10) 可以写成

$$\begin{aligned}M_\pi(x,i)&=\mathsf{E}^{x,i}\Big[\int_0^{\tau^\pi\wedge\zeta_1}\mathrm{e}^{-\delta_i t}\mathrm{d}D_t^\pi+\mathrm{e}^{-\delta_i(\tau^\pi\wedge\zeta_1)}u(X^\pi_{\tau^i\wedge\zeta_1},J_{\tau^\pi\wedge\zeta_1})\Big]\\&=\mathsf{E}^{x}\Big[\int_0^{\tau^i}\mathbf{1}_{\{t<\eta(q_i)\}}\mathrm{e}^{-\delta_i t}\mathrm{d}D_t^i+\mathbf{1}_{\{\tau^i>\eta(q_i)\}}\mathrm{e}^{-\delta_i\eta(q_i)}\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}u(Y^i_{\eta(q_i)},j)\Big]\\&=\mathsf{E}^{x}\Big[\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathrm{d}D_t^i+\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\sum_{j\neq i}q_{ij}u(Y_t^i,j)\mathrm{d}t\Big],\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\mathsf{E}^x[\cdot]=\mathsf{E}[\cdot\,|\,Y_0^i=x]$ 和 $\theta_i=\delta_i+q_i$.

注记 7　在 (9) 中, 考虑的是所有的容许策略 $\pi\in\Pi$. 然而, 值函数 $M(x,i)$ 仅与 $D_s^i=\mathbf{1}_{\{J_s=i\}}D_s^\pi$ 有关. 因此, 如果 $\pi\in\Pi$ 是 (9) 最优化问题的一个最优策略, 则所有满足 $\mathbf{1}_{\{J_s=i\}}D_s^{\pi'}=\mathbf{1}_{\{J_s=i\}}D_s^\pi$ 的策略 $\pi'\in\Pi$ 都是 (9) 的最优策略.

由一般随机控制理论, 对问题 (9), 考虑如下的拟变分不等式

$$\max\Big\{(\mathscr{A}-\theta_i)m(x,i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(x,j),\ 1-m'(x,i)\Big\}=0,\qquad x>0,\tag{13}$$

其中算子 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}m(x,i)=\frac{\sigma_i^2}{2}m''(x,i)-c_im'(x,i)+\int_0^\infty[m(x+y,i)-m(x,i)-m'(x,i)y\mathbf{1}_{\{0<y\leqslant1\}}]\nu_i(\mathrm{d}y).\tag{14}$$

定理 8　设 $\boldsymbol{m}\in\mathbb{D}$, 并且对 $\forall i\in\mathbb{J}$, $m(x,i)$ 满足拟变分不等式 (13), 则

(i) 对 $x\geqslant0$, 有 $m(x,i)\geqslant M(x,i)$ 对 $\forall i\in\mathbb{J}$ 成立.

(ii) 如果存在某个容许策略 $\pi^*\in\Pi$, 使得 $M_{\pi^*}(x,i)=m(x,i)$, 那么 π^* 是 (9) 的最优策略, 且 $M(x,i)=m(x,i)$.

证明:　考虑容许策略 π, 分红策略 $D_s^i=\mathbf{1}_{\{J_s=i\}}D_s^\pi$. 设停时 $T_n=\inf\{t\geqslant0:Y_t^i\geqslant n$ 或 $Y_t^i\leqslant1/n\}$. 将过程 $\{Y_t^i\}$ 的不连续点分为如下集合,

$\Gamma_t=\{s\leqslant t:\Delta D_s^i=0,\ \Delta X_s^i\neq0\}$,　只有过程 $\{X_s^i\}$ 的正跳;
$\Gamma_t'=\{s\leqslant t:\Delta D_s^i\neq0,\ \Delta X_s^i\neq0\}$,　分红过程有跳, $\{X_s^i\}$ 的可能有正跳也可能没有正跳.

对 $\mathrm{e}^{-\theta_i(t\wedge T_n)}m(Y^i_{t\wedge T_n},i)$ 用 Itô's 公式, 可得

$$\mathrm{e}^{-\theta_i(t\wedge T_n)}m(Y^i_{t\wedge T_n},i)=m(x,i)+\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-\theta_i s}\Big[\frac{\sigma_i^2}{2}m''(Y^i_{s-},i)-\theta_i m'(Y^i_{s-},i)\Big]\mathrm{d}s+I_{t\wedge T_n},$$

其中

$$I_t=\int_0^t \mathrm{e}^{-\theta_i s}m'(Y_{s-}^i,i)\mathrm{d}Y_s^i+\sum_{s\in\Gamma_t\cup\Gamma_t'}\mathrm{e}^{-\theta_i s}[m(Y_s^i,i)-m(Y_{s-}^i,i)-m'(Y_{s-}^i,i)\Delta Y_s^i].$$

由 $\{Y_t^i\}$ 的表达式, 知

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\theta_i(t\wedge T_n)}m(Y_{t\wedge T_n}^i,i)=m(x,i)&+\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-\theta_i s}(\mathscr{A}-\theta_i)m(Y_s^i,i)\mathrm{d}s\\&-\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-\theta_i s}m'(Y_{s-}^i,i)\mathrm{d}D_s^i+A_{t\wedge T_n}+B_{t\wedge T_n}+D_{t\wedge T_n},\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}A_t&=\sum_{s\in\Gamma_t'}\mathrm{e}^{-\theta_i s}[m(Y_{s-}^i+\Delta X_s^i-\Delta D_s^i,i)-m(Y_{s-}^i+\Delta X_s^i,i)+m'(Y_{s-}^i+\Delta X_s^i,i)\Delta D_s^i],\\B_t&=\int_0^t\mathrm{e}^{-\theta_i s}m'(Y_{s-}^i,i)\mathrm{d}\Big(X_s^i+c_is-\sum_{0<u\leqslant s}\Delta X_u^i\mathbf{1}_{\{|\Delta X_u^i|>1\}}\Big),\\D_t&=\sum_{s\in\Gamma_t}\mathrm{e}^{-\theta_i s}[m(Y_{s-}^i+\Delta X_s^i,i)-m(Y_{s-}^i,i)-m'(Y_{s-}^i,i)\Delta X_s^i\mathbf{1}_{\{|\Delta X_s^i|\leqslant1\}}]\\&\quad-\int_0^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\theta_i s}[m(Y_{s-}^i+y,i)-m(Y_{s-}^i,i)-m'(Y_{s-}^i,i)y\mathbf{1}_{\{|y|\leqslant1\}}\nu_i(\mathrm{d}y)]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 Lévy-Itô 分解, 知 $\{B_{t\wedge T_n}\}$ 是一个零均值的鞅; 由 Lévy 过程的补偿测度公式知, $\{D_t\wedge T_n\}$ 也是一个零均值的鞅. 注意到 $m(x,i)$ 是非负的增的凹的并且满足 (13), 我们有

$$\begin{aligned}&(\mathscr{A}-\theta_i)m(Y_{s-}^i,i)\leqslant-\sum_{j\neq i}q_{ij}u(Y_s^i,j);\qquad -m'(Y_{s-}^i,i)\leqslant-1;\\&m(y,i)-m(x,i)-m'(x,i)(y-x)\leqslant0,\quad\forall\,x,y\geqslant0;\qquad m(Y_{t\wedge T_n}^i,i)\geqslant0.\end{aligned}$$

对 (15) 式两边取条件数学期望, 可得

$$m(x,i)\geqslant\mathsf{E}^x\Big[\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-\theta_i s}\mathrm{d}D_s^i+\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-\theta_i s}\sum_{j\neq i}q_{ij}u(Y_s^i,j)\mathrm{d}s\Big].$$

令 $n\to\infty$, 则 $T_n\to\tau_i$. 于是当 $n\to\infty$ 时, 由控制收敛定理以及控制策略 π 的任意性, 得到 (i) 的结论.

由 (i) 的结论和 $M(x,i)$ 的定义, (ii) 的结果可以直接得到. □

§4. 调节的有界分红策略

这一节, 我们考虑调节的有界分红策略. 具体地说, 在一个潜在的分红时刻, 如果马尔科夫链的状态为 i 且盈余水平在 $b_i\geqslant0$ 之上, 则超过的部分全部作为红利支付; 如果马尔科夫链的状态为 i 且盈余水平低于 $b_i\geqslant0$, 则不发放分红. 下面给出调节的有界分红策略的定义.

定义 9　给定一个水平 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_N)$, 称 $\pi_{\boldsymbol{b}}$ 是一个水平为 $\boldsymbol{b}$ 的调节有界分红策略, 如果 $\pi_{\boldsymbol{b}}$ 满足

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t^{\pi_{\boldsymbol{b}}}<b_{J_t}\}}\mathrm{d}D_t^{\pi_{\boldsymbol{b}}}=0,\qquad X_t^{\pi_{\boldsymbol{b}}}\leqslant b_{J_t}.$$

设 $D_t^{\pi^{b_i}}$ 是一个水平为 b_i 的有界分红策略, 则 $\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^{\pi^{b_i}}=\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^{\pi_{\boldsymbol{b}}}$. 为了记号方便, 分红过程仍然记作 $\{D_t^i\}$, 相应的过程 $\{Y_t^i\}$ 是 (11) 中定义, 其对应的破产时刻仍为 τ^i. 在策略 $\pi_{\boldsymbol{b}}$ 下, 简记 $M_{\pi_{\boldsymbol{b}}}(x,i)$ 和 $\tau^{\pi_{\boldsymbol{b}}}$ 分别为 $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$ 和 $\tau_{\boldsymbol{b}}$. 由 (12) 可知

$$M_{\boldsymbol{b}}(x,i)=\mathsf{E}^x\Big[\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathrm{d}D_t^i+\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\sum_{j\neq i}q_{ij}u(Y_t^i,j)\mathrm{d}t\Big],\tag{16}$$

其中 $\theta_i=\delta_i+q_i$. 由 Itô's 公式和马氏性, 有下面的命题成立.

引理 10　对分红界为 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_N)>\mathbf{0}$ 的调节有界分红策略, $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$ 满足下面的积分–微分方程组

$$\begin{cases}\mathscr{A}M_{\boldsymbol{b}}(x,i)+\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(x,j)=0, & 0<x<b_i;\\ M_{\boldsymbol{b}}(x,i)=x-b_i+M_{\boldsymbol{b}}(b_i,i), & x>b_i.\end{cases}\tag{17}$$

下面给出尺度函数的定义, 对 $\theta>0$, 定义 θ-尺度函数 $W^{(\theta)}(x)$ 如下:

$$\begin{aligned}&\text{当 } x<0 \text{ 时},\ W^{(\theta)}(x)=0;\\ &\text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\ \widehat{W}^{(\theta)}(s)=\frac{1}{\psi_i(s)-\theta},\ \ s>\inf\{s\geqslant 0:\psi_i(s)=\theta\}.\end{aligned}$$

另外, 与尺度函数 $W^{(\theta)}(x)$ 相关的两个函数 $Z^{(\theta)}(x)$ 和 $\overline{Z}^{(\theta)}(x)$ 为

$$Z^{(\theta)}(x)=1+\theta\int_0^x W^{(\theta)}(y)\mathrm{d}y,\qquad \overline{Z}^{(\theta)}(x)=\theta\int_0^x Z^{(\theta)}(y)\mathrm{d}y.$$

由 (16) 式知, 要解出 $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$, 只需求得

$$z_1(x,i)=\mathsf{E}^x\Big[\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathrm{d}D_t^i\Big],\qquad z_2(x,i)=\mathsf{E}^x\Big[\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\sum_{j\neq i}q_{ij}u(Y_t^i,j)\mathrm{d}t\Big].\tag{18}$$

有关 Lévy 过程尺度函数的知识, 可参考文献 [13]. 由文献 [3] 中的引理 2.1 或者文献 [4] 中的引理 3.1, 我们得下面的引理.

引理 11　对 $b_i\geqslant 0$, $\theta_i>0$ 和 $0\leqslant x\leqslant b_i$, 有

$$\mathsf{E}^x\Big[\int_0^{\tau^i}\mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathrm{d}D_t^i\Big]=\frac{1}{Z^{(\theta_i)}(b_i)}\Big[\overline{Z}^{(\theta_i)}(b_i)-\frac{\mu_i}{\theta_i}\Big]Z^{(\theta_i)}(b_i-x)-\overline{Z}^{(\theta_i)}(b_i-x)+\frac{\mu_i}{\theta_i}.\tag{19}$$

引理 12 对 $b_i \geqslant 0$, $\theta_i > 0$ 和 $0 < x \leqslant b_i$, 有

$$\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathbf{1}_{\{Y_t^i\in \mathrm{d}y,\ t<\tau^i\}}\mathrm{d}t\Big] = -\Big[\frac{Z^{(\theta_i)}(b_i-x)}{Z^{(\theta_i)}(b_i)}W^{(\theta_i)}(y) - \mathbf{1}_{\{y\geqslant x\}}W^{(\theta_i)}(y-x)\Big]\mathrm{d}y.$$

证明: 设 $\widetilde{X}_t^i = b_i - X_t^i$, 则 $\widetilde{X}_t^i$ 为谱负的 Lévy 过程, 并且 $\widetilde{X}_0^i = b_i - x \in [0, b_i)$. 记 $\underline{Y}_t^i = \widetilde{X}_t^i - \inf\limits_{s\leqslant t}[\widetilde{X}_t^i \wedge 0]$, 则

$$\begin{aligned} Y_t^i &= X_t^i - D_t^i = X_t^i - \sup_{s\leqslant t}[(X_s^i - b_i)\vee 0] \\ &= b_i - (b_i - X_t^i) - \sup_{s\leqslant t}[-(b_i - X_s^i)\vee 0] \\ &= b_i - \widetilde{X}_t^i + \inf_{s\leqslant t}[\widetilde{X}_t^i \wedge 0] \\ &= b_i - \underline{Y}_t^i. \end{aligned}$$

于是有 $\tau_i = \inf\{t : Y_t^i \leqslant 0\} = \inf\{t : \underline{Y}_t^i \geqslant b_i\}$ 和

$$\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathbf{1}_{\{Y_t^i\in \mathrm{d}y,\ t<\tau^i\}}\mathrm{d}t\Big] = \mathsf{E}^{b_i-x}\Big[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathbf{1}_{\{\underline{Y}_t^i\in \mathrm{d}(b_i-y),\ t<\tau^i\}}\mathrm{d}t\Big].$$

根据文献 [13] 的定理 2.8 中的 (ii), 结论得证. □

定理 13 对 $u \in \mathbb{D}$ 和 $x \in [0, b_i]$, 则函数 $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$ 有如下的表达式

$$M_{\boldsymbol{b}}(x,i) = K(b_i)Z^{(\theta_i)}(b_i-x) - \overline{Z}^{(\theta_i)}(b_i-x) + \frac{\mu_i}{\theta_i} + \sum_{j\neq i} q_{ij}\int_0^{b_i-x} u(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y, \tag{20}$$

其中

$$K(b_i) = \frac{1}{Z^{(\theta_i)}(b_i)}\Big[\overline{Z}^{(\theta_i)}(b_i) - \frac{\mu_i}{\theta_i} - \sum_{j\neq i} q_{ij}\int_0^{b_i} u(y,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y\Big]. \tag{21}$$

证明: 首先讨论 $0 < x \leqslant b_i$. 由引理 12, 在 (18) 中的 $z_2(x,i)$ 有下面的表达式

$$\begin{aligned} z_2(x,i) &= \sum_{j\neq i} q_{ij}\int_0^{b_i} u(y,i)\mathsf{E}^x\Big[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta_i t}\mathbf{1}_{\{Y_t^i\in \mathrm{d}y,\ t<\tau^i\}}\Big]\mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{j\neq i} q_{ij}\Big[\frac{Z^{(\theta_i)}(b_i-x)}{Z^{(\theta_i)}(b_i)}\int_0^{b_i} u(y,i)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y - \int_0^{b_i-x} u(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y\Big]. \end{aligned} \tag{22}$$

将 (19) 和 (22) 带入 (16), 得出结论.

当 $x = 0$ 时, (20) 式的右端为 0, 左端为 $M_{\boldsymbol{b}}(0,i) = 0$, 因此 (20) 在 $x = 0$ 时仍然成立.
□

§5. 最优的调节有界分红策略

现在我们考虑最优的调节有界分红策略, 即要找到 b_i, 使得 (20) 中的 $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$ 值达到最大. 当 $0<x<b_i$ 时, 有

$$\begin{aligned}M_{\boldsymbol{b}}'(x,i)=&-\Big[\theta_iK(b_i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)\Big]W^{(\theta_i)}(b_i-x)+Z^{(\theta_i)}(b_i-x)\\&+\sum_{j\neq i}q_{ij}\int_0^{b_i-x}u'(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

进而 $M_{\boldsymbol{b}}'(b_i-,i)=-\big[\theta_iK(b_i)+\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)\big]W^{(\theta_i)}(0)+1$. 因此, 当 X_t^i 是有界变差时, 有

$$M_{\boldsymbol{b}}'(b_i-,i)=M_{\boldsymbol{b}}'(b_i+,i)=1\Leftrightarrow\theta_iK(b_i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)=0.\tag{23}$$

当 X_t^i 是无界变差时, 有

$$\begin{aligned}M_{\boldsymbol{b}}''(x,i)=&\Big[\theta_iK(b_i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)\Big]W^{(\theta_i)\prime}(b_i-x)-\Big[\theta_i+\sum_{j\neq i}q_{ij}u'(b_i,j)\Big]W^{(\theta_i)}(b_i-x)\\&+\sum_{j\neq i}q_{ij}\int_0^{b_i-x}u''(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

进而有 $M_{\boldsymbol{b}}''(b_i-,i)=\big[\theta_iK(b_i)+\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)\big]W^{(\theta_i)\prime}(0+)$. 于是

$$M_{\boldsymbol{b}}''(b_i-,i)=M_{\boldsymbol{b}}''(b_i+,i)=0\Leftrightarrow\theta_iK(b_i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)=0.\tag{24}$$

由 (23) 和 (24) 知, $M_{\boldsymbol{b}}(x,i)$ 是充分光滑函数的充分必要条件为

$$\theta_iK(b_i)+\sum_{j\neq i}q_{ij}u(b_i,j)=0.\tag{25}$$

引理 14　方程 (25) 有一正解 b_i^* 的充分必要条件是 $\mu_i>0$.

证明:　对 $x\geqslant 0$, 设

$$f_i(x)=\theta_i\overline{Z}^{(\theta_i)}(x)-\mu_i-\theta_i\sum_{j\neq i}q_{ij}\int_0^x u(y,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y+Z^{(\theta_i)}(x)\sum_{j\neq i}q_{ij}u(x,j).\tag{26}$$

由函数 $u(x,j)$ 关于 x 是增的, 则

$$f_i(0)=-\mu_i,\qquad f_i'(x)=Z^{(\theta_i)}(x)\Big[1+\sum_{j\neq i}q_{ij}u'(x,j)\Big]>0,$$

并且

$$\begin{aligned}f_i(x)&\geqslant\theta_i\overline{Z}^{(\theta_i)}(x)-\mu_i-\theta_i\int_0^x W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y\sum_{j\neq i}q_{ij}u(x,j)+Z^{(\theta_i)}(x)\sum_{j\neq i}q_{ij}u(x,j)\\&\geqslant\theta_i\overline{Z}^{(\theta_i)}(x)-\mu_i,\end{aligned}$$

于是当 $x\to\infty$ 时, $f_i(x)\to\infty$, 结论得证.　　□

定理 15 对 $i=1,2,\cdots,N$, 设 $b_i^*\geqslant 0$ 是方程 (25) 的根, 则当 $0\leqslant x\leqslant b_i^*$ 时, 有

$$M_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)=\begin{cases}-\overline{Z}^{(\theta_i)}(b_i^*-x)+\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\displaystyle\int_0^{b_i^*-x}[u(y+x,j)-u(b_i^*,j)]W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{\theta_i}\Big[\mu_i-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(b_i^*,j)\Big], & 0\leqslant x<b_i^*; \\ x-b_i^*+M_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*,i), & x\geqslant b_i^*,\end{cases}\tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{b}^*=(b_1^*,b_2^*,\cdots,b_N^*)$ 和 $M_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*,i)=\theta_i^{-1}\big[\mu_i-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(b_i^*,j)\big]$ 在 $[0,\infty)$, 并且 $M_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)$ 是非负的增的凹函数.

证明: 将 $K(b_i^*)=-\theta_i^{-1}\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u(b_i^*,j)$ 代入到 (20), 简化计算后得到 (27). 由 (26) 和 $u(x,j)\in\mathbb{D}$, 我们有

$$\begin{aligned}&M_{\boldsymbol{b}^*}(0,i)=-\frac{1}{\theta_i}f(b_i^*)=0,\\&M'_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)=Z^{(\theta_i)}(b_i^*-x)+\sum_{j\neq i}q_{ij}\int_0^{b_i^*-x}u'(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y>0,\end{aligned}$$

和

$$M''_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)=-\Big[\theta_i+\sum_{j\neq i}q_{ij}u'(b_i^*,j)\Big]W^{(\theta_i)}(b_i^*-x)+\sum_{j\neq i}q_{ij}\int_0^{b_i^*-x}u''(y+x,j)W^{(\theta_i)}(y)\mathrm{d}y<0.$$

综上结论得证. $\square$

定理 16 对 $i=1,2,\cdots,N$, 设 $b_i^*\geqslant 0$ 是方程 (25) 的根, 则最优问题 (9) 的值函数 $M(x,i)=M_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)$, 任意一个满足 $\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^\pi=\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^{\pi_{\boldsymbol{b}^*}}$ 的分红策略 π 都是 (9) 的最优策略, 其中 $M_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)$ 由 (27) 给出.

证明: 由定理 15 的证明, 可知

$$\begin{aligned}&M'_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*-,i)=M'_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*+,i)=1,\\&M''_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*-,i)=-\theta_iW^{(\theta_i)}(0).\end{aligned}$$

因此, $M''_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*-,i)=M''_{\boldsymbol{b}^*}(b_i^*+,i)=0$ 的充要条件是 X_t^i 为无界变差的 Lévy 过程, 并且

$$M'_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)\begin{cases}>1, & 0\leqslant x<b_i^*;\\=1, & x\geqslant b_i^*.\end{cases}$$

结合引理 10, 可知 $M_{\boldsymbol{b}^*}(x,i)$ 满足拟变分不等式 (13). 由定理 8, 结论得证. $\square$

§6.　回到最初的最优控制问题

现在, 我们来回答 §3 节中提出的问题, 即给定 $\boldsymbol{U}_n(x)$, 如何求出 $\boldsymbol{U}_{n+1}(x)$? 由定理 15 和定理 16 知, 给定函数 $\boldsymbol{u}(x)\in\mathbb{D}$, 则 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{b}^*}(x)\in\mathbb{D}$, 其中

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{b}^*}(x)=(M_{\boldsymbol{b}^*}(x,1),M_{\boldsymbol{b}^*}(x,2),\cdots,M_{\boldsymbol{b}^*}(x,N)),$$

$\boldsymbol{b}^*=(b_1^*,b_2^*,\cdots,b_N^*)$. 显然 $\mathbf{0}\in\mathbb{D}$. 将方程 (25) 和 (27) 中的 $\boldsymbol{u}$ 替换成 $\mathbf{0}$, 我们得到了 $\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{U}_1(x)=(U_1(x,1),U_1(x,2),\cdots,U_1(x,N))$. 然后对给定 $\boldsymbol{U}_n(x)$, 将方程 (25) 和 (27) 中的 $u(x,i)$ 替换成 $U_n(x,i)$, 可以得到 $\boldsymbol{b}_{n+1}$ 和 $\boldsymbol{U}_{n+1}(x)$.

对最初的最优问题 (6), 由引理 4 知, 值函数 $\boldsymbol{V}(x)$ 是 $\boldsymbol{U}_n(x)$ 的极限 (逐点 Piont-wise), 因此 $\boldsymbol{V}(x)\in\mathbb{D}$. 前面的结论告诉我们, 如果对每个 $i\in\mathbb{J}$ 独立的考虑问题 (9) (即, 对每个 $i\in\mathbb{J}$, 找到一个最优的策略), 则任意一个满足 $\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^{\pi}=\mathbf{1}_{\{J_t=i\}}D_t^{\pi_{\boldsymbol{b}^*}}$ 的策略 $\pi\in\Pi$ 都是最优的. 然而, 我们最初的问题是要找到一个策略, 使得对所有的 $i\in\mathbb{J}$ 均为最优. 因此, 一个水平为 $\boldsymbol{b}^*=(b_1^*,b_2^*,\cdots,b_N^*)$ 的调节有界分红策略为最优策略. 这种通过迭代的方法得到值函数和最优策略的步骤如下:

步骤 1: 首先令 $\boldsymbol{U}_0(x)=\mathbf{0}$;

步骤 2: 通过 (25) 找到 $\boldsymbol{b}_{n+1}$; 通过 (27) 找到 $\boldsymbol{U}_{n+1}(x)$;

步骤 3: 当 $\sup\limits_{x\geqslant0,\ i\in\mathbb{J}}|U_{n+1}(x,i)-U_n(x,i)|\leqslant\varepsilon$ 时, 停止迭代; 否则, 回到步骤 2. 这里 $\varepsilon>0$ 为想要的精确度.

还有另外一种方法可以得到值函数和最优策略: 解积分 – 微分方程组. 由强马尔科夫性和 Itô 公式以及一般的控制理论, 可知值函数和调节有界分红的最优水平满足

$$\begin{cases}\mathscr{A}V(x,i)+\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}V(x,j)=0, & 0\leqslant x<b_i^*;\\ V(x,i)=x-b_i^*+V(b_i^*,i), & x\geqslant b_i^*,\end{cases}\tag{28}$$

其中算子 $\mathscr{A}$ 由 (14) 给出, 对所有 $i,j\in\mathbb{J}$, 边界值条件和平滑性条件为

$$\begin{aligned}&V(0,i)=0; && V(b_i^*-,j)=V(b_i^*+,j);\\ &V'(b_i^*-,i)=1; && V'(b_i^*-,j)=V'(b_i^*+,j);\\ &V''(b_i^*-,i)=0, && \text{如果 } \sigma_i>0.\end{aligned}$$

接下来, 我们研究 $N=2$, $\sigma_i=0$, 正跳服从复合泊松分布的情形, 其中泊松参数为 λ_i 和正跳分布密度为 $f_i(x)=\gamma_i\mathrm{e}^{-\gamma_i x}$ ($\gamma_i>0$, $i=1,2$) 的情形. 在这种情形下, 迭代的方法不如解方程组有效率. 为了简化记号, 有 b_i 代替 b_i^*.

下面来解积分–微分方程组 (28). 不失一般性, 假设 $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2$. 我们考虑下面三种情形: $x \in [0, b_1)$, $x \in [b_1, b_2)$ 和 $x \in [b_2, \infty)$.

如果 $x \in [0, b_1)$, 由方程组 (28) 可以得到

$$\begin{cases} c_1 V'(x,1) + (\lambda_1 + \delta_1 + q_1)V(x,1) - \lambda_1 \displaystyle\int_0^\infty V(y+x,1)\gamma_1 \mathrm{e}^{-\gamma_1 y}\mathrm{d}y - q_1 V(x,2) = 0; \\ c_2 V'(x,2) + (\lambda_2 + \delta_2 + q_2)V(x,2) - \lambda_2 \displaystyle\int_0^\infty V(y+x,2)\gamma_2 \mathrm{e}^{-\gamma_2 y}\mathrm{d}y - q_2 V(x,1) = 0. \end{cases}$$

类似于文献 [1] 中的 (3.2) 式, 对上面方程组的两个方程分别应用算 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x - \gamma_1)$ 和 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x - \gamma_2)$, 则有

$$\begin{cases} c_1 V''(x,1) + R_1 V'(x,1) - \gamma_1(\delta_1 + q_1)V(x,1) - q_1 V'(x,2) + q_1\gamma_1 V(x,2) = 0; \\ c_2 V''(x,2) + R_2 V'(x,2) - \gamma_2(\delta_2 + q_2)V(x,2) - q_2 V'(x,1) + q_2\gamma_2 V(x,1) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

这里 $R_i = \lambda_i + \delta_i + q_i - c_i\gamma_i$, $i = 1, 2$. 我们猜想上面方程组的解为

$$\begin{cases} V(x,1) = A_{11}\mathrm{e}^{\alpha_1(x-b_1)} + A_{12}\mathrm{e}^{\alpha_2(x-b_1)} + A_{13}\mathrm{e}^{\alpha_3(x-b_1)} + A_{14}\mathrm{e}^{\alpha_4(x-b_1)}; \\ V(x,2) = A_{21}\mathrm{e}^{\alpha_1(x-b_1)} + A_{22}\mathrm{e}^{\alpha_2(x-b_1)} + A_{23}\mathrm{e}^{\alpha_3(x-b_1)} + A_{24}\mathrm{e}^{\alpha_4(x-b_1)}. \end{cases} \tag{30}$$

将 (30) 代入 (29) 并比较系数, 得出如下相关的方程组

$$\begin{cases} (\alpha - \gamma_1)(c_1\alpha + \lambda_1 + \delta_1 + q_1) + \lambda_1\gamma_1 - q_1(\alpha - \gamma_1)\beta = 0; \\ (\alpha - \gamma_2)(c_2\alpha + \lambda_2 + \delta_2 + q_2) + \lambda_2\gamma_2 - q_2(\alpha - \gamma_2)/\beta = 0, \end{cases} \tag{31}$$

如果上面的方程组有四个解 (α, β), 那么就可以确定 $(\alpha_j, A_{2j}/A_{1j})$, $j = 1, 2, \cdots, N$.

引理 17 方程组 (31) 有四个实根 (α_j, β_j), $j = 1, 2, \cdots, N$, 并且

$$\alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < \alpha_4.$$

证明: 令

$$g_i(\alpha) = (\alpha - \gamma_i)(c_i\alpha + \lambda_i + \delta_i + q_i) + \lambda_i\gamma_i, \qquad i = 1, 2,$$

和

$$G(\alpha) = g_1(\alpha)g_2(\alpha) - q_1q_2(\alpha - \gamma_1)(\alpha - \gamma_2).$$

将方程 $G(\alpha) = 0$ 的根 α 代入方程组 (31) 可以确定 β, 即方程组 (31) 的解得到. 反过来, 若 (α, β) 是方程组 (31) 的解, 则 α 满足 $G(\alpha) = 0$. 因此, 我们只需要证明 $G(\alpha) = 0$ 有四个根即可.

首先, 对 $i=1,2$, $g_i(\alpha)=0$ 有两个根 $r_{1i}<0<r_{2i}<\gamma_i$. 其次由于 $G(\infty)=G(-\infty)=\infty$, 并且 $G(0)=\gamma_1\gamma_1(\delta_1+q_1)(\delta_2+q_2)-q_1q_2\gamma_1\gamma_2>0$. 设 $r=\min\{r_{21},r_{22}\}$, 则 $r<\min\{\gamma_1,\gamma_2\}$, 并且 $G(r)<0$. 又由于 $G(r_{11})<0$, 所以, 方程 $G(\alpha)=0$ 有四个根: $\alpha_1<\alpha_2<0<\alpha_3<\alpha_4$. 结论得证. □

由上面的讨论知, 若 $(\alpha_j, A_{2j}/A_{1j})$, $j=1,2,3,4$ 是方程组 (31) 的解, 则有

$$A_{2j}=\frac{g_1(\alpha_j)}{q_1(\alpha_j-\gamma_1)}A_{1j}=\frac{q_2(\alpha_j-\gamma_2)}{g_2(\alpha_j)}A_{1j}. \tag{32}$$

如果 $x\in[b_1,b_2)$, 由方程组 (28) 得到

$$\begin{cases}V(x,1)=x-b_1+V(b_1,1);\\ c_2V'(x,2)+(\lambda_2+\delta_2+q_2)V(x,2)-\lambda_2\displaystyle\int_0^\infty V(y+x,2)\gamma_2\mathrm{e}^{-\gamma_2 y}\mathrm{d}y-q_2V(x,1)=0.\end{cases} \tag{33}$$

从 (30) 可以得到 $V(b_1,1)$, 并且类似地有

$$c_2V''(x,2)+(\lambda_2+\delta_2+q_2-c_2\gamma_2)V'(x,2)-\gamma_2(\delta_2+q_2)V(x,2)-q_2+q_2\gamma_2[x-b_1+V(b_1,)]=0. \tag{34}$$

猜想上述方程的解为

$$V(x,2)=B_1\mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_1(x-b_2)}+B_2\mathrm{e}^{\widetilde{\alpha}_2(x-b_2)}+\eta_1x+\eta_2. \tag{35}$$

将 (35) 代入 (34), 比较系数可知 $\widetilde{\alpha}_i$, $i=1,2$ 是方程

$$(\widetilde{\alpha}-\gamma_2)(c_2\widetilde{\alpha}+\lambda_2+\delta_2+q_2)+\lambda_2\gamma_2=0$$

的根, 并且

$$\begin{cases}(\delta_2+q_2)\eta_1-q_2=0;\\ (\lambda_2+\delta_2+q_2-c_2\gamma_2)\eta_1-q_2\gamma_2(\delta_2+q_2)\eta_2-q_2+q_2[-b_1+V(b_1,1)=0],\end{cases}$$

即是

$$\begin{cases}\eta_1=\dfrac{q_2}{\delta_2+q_2};\\ \eta_2=\dfrac{q_2}{\delta_2+q_2}\Big[\dfrac{\lambda_2}{\gamma_2(\delta_2+q_2)}-\dfrac{c_2}{\delta_2+q_2}-b_1+V(b_1,1)\Big].\end{cases}$$

将 (35) 和 $V(x,2)=x-b_2+V(b_2,2)$ $(x\geqslant b_2)$ 代入 (33), 结合 $V(b_2,2)=B_1+B_2+\eta_1b_2+\eta_2$, 比较系数得

$$\frac{B_1\widetilde{\alpha}_1}{\widetilde{\alpha}_1-\gamma_2}+\frac{B_2\widetilde{\alpha}_2}{\widetilde{\alpha}_2-\gamma_2}+\frac{\delta_1}{\gamma_1(\delta_2+q_2)}=0. \tag{36}$$

最后, 如果 $x \in [b_2, \infty)$, 由方程组 (28) 得到

$$\begin{cases} V(x,1) = x - b_1 + V(b_1, 1); \\ V(x,2) = x - b_2 + V(b_2, 2). \end{cases} \tag{37}$$

我们知道在最优的调节有界分红策略下, 值函数 $V(x,i)$ 在 $(0,\infty)$ 上是一阶连续可微的, 并且在 $(0,\infty)/b_i$ 是二阶连续可微的. 因此我们有平滑性条件

$$\begin{cases} V(0,1) = V(0,2) = 0; \\ V(b_1-, 2) = V(b_1+, 2); \\ V'(b_1-, 1) = V'(b_2-, 2) = 1; \\ V'(b_1-, 2) = V'(b_1+, 2); \\ V''(b_1-, 2) = V''(b_1+, 2). \end{cases}$$

上面的方程组结合 (32) 和 (36), 共有 12 个方程, 可以解出 12 个待定系数 A_{ij}, b_i 和 B_i, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$.

参 考 文 献

[1] AVANZI B, GERBER H U, SHIU E S W. Optimal dividends in the dual model [J]. *Insurance Math Econom*, 2007, **41(1)**: 111–123.

[2] AVANZI B, SHEN J, WONG B. Optimal dividends and capital injections in the dual model with diffusion [J]. *Astin Bull*, 2011, **41(2)**: 611–644.

[3] BAYRAKTAR E, KYPRIANOU A E, YAMAZAKI K. On optimal dividends in the dual model [J]. *Astin Bull*, 2013, **43(3)**: 359–372.

[4] YIN C C, WEN Y Z. Optimal dividend problem with a terminal value for spectrally positive Lévy processes [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **53(3)**: 769–773.

[5] ZHAO Y X, CHEN P, YANG H L. Optimal periodic dividend and capital injection problem for spectrally positive Lévy processes [J]. *Insurance Math Econom*, 2017, **74**: 135–146.

[6] ZHAO Y X, WANG R M, YAO D J, et al. Optimal dividends and capital injections in the dual model with a random time horizon [J]. *J Optim Theory Appl*, 2015, **167(1)**: 272–295.

[7] MA X M, LUO K, WANG G M, et al. Constant barrier strategies in a two-state Markov-modulated dual risk model [J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2011, **27(4)**: 679–690.

[8] JIANG Z J, PISTORIUS M. Optimal dividend distribution under Markov regime switching [J]. *Finance Stoch*, 2012, **16(3)**: 449–476.

[9] WEI J Q, WANG R M, YANG H L. On the optimal dividend strategy in a regime-switching diffusion model [J]. *Adv Appl Probab*, 2012, **44(3)**: 886–906.

[10] ZHU J X, CHEN F. Dividend optimization for regime-switching general diffusions [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **53(2)**: 439–456.

[11] ZHU J X, YANG H L. Optimal financing and dividend distribution in a general diffusion model with regime switching [J]. *Adv Appl Probab*, 2016, **48(2)**: 406–422.

[12] ZHU H M, DENG C, DENG Y C, et al. Optimal financing and dividend policy with Markovian switching regimes [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2017, **46(5)**: 2161–2180.

[13] KUZNETSOV A, KYPRIANOU A E, RIVERO V. The theory of scale functions for spectrally negative Lévy processes [M] // COHEN S, KUZNETSOV A, KYPRIANOU A E, et al. *Lévy Matters II – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2061.* Berlin: Springer, 2012: 97–186.

Optimal Dividend Strategy in the Spectrally Postive Lévy Risk Model with Regime Switching

YE Chuanxiu

(*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu, 273165, China*)

ZHAO Yongxia

(*School of Statistics, Qufu Normal University, Qufu, 273165, China*)

Abstract: In this paper, we consider the optimal dividend problem in the spectrally positive Lévy model with regime switching. By an auxiliary optimal problem, the principle of dynamic programming and the fluctuation theory of Lévy processes, we show that optimal strategy is a modulated barrier strategy. The value function and the optimal dividend barrier are obtained by iteration.

Keywords: Markov regime switching; Lévy risk model; optimal dividend; HJB equation; fluctuation theory

2010 Mathematics Subject Classification: 93E20; 91B30; 60H30