

马氏调节风险模型下的有限时间破产问题 *

李婧超* 苏必豪

(深圳大学数学与统计学院, 深圳, 518000)

摘要: 本文主要研究马氏调节模型中有限时间内的破产变量的分布, 给出了有限时间内索赔次数的分布律、总索赔金额的分布函数, 且采用了离散近似的方法, 显示近似方法的结果与精确的概率密度函数非常接近. 此外, 使用分解概率密度函数的方法, 求出破产时间和破产时赤字的联合分布的具体表达式.

关键词: 马氏调节风险模型; 索赔数分布; 总索赔额分布; 联合分布

中图分类号: O211.9

英文引用格式: LI J C, SU B H. Some finite time ruin problems in Markov-Modulated risk model [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(2): 197–209. (in Chinese)

§1. 介绍及定义

有许多学者已经对马氏调节风险模型做出了研究, 例如 Reinhard^[1]、Asmussen^[2]、Bäuerle^[3]、Schmidli^[4]、Snoussi^[5]、Lu 和 Li^[6]、Lu^[7]、Ng 和 Yang^[8]、Zhu 和 Yang^[9]、Li 和 Lu^[10]、张敏和张志民^[11]、Li 等人^[12] 进一步研究了在马氏调节模型下破产变量细分后的分布问题. Li 等人^[13] 对带扰动项的经典风险模型中有限时间的期望贴现惩罚函数求出了显示解. 马氏调节模型假设索赔到达和索赔金额受外部环境过程的影响. 例如, 通过一个随机过程来模拟天气状况, 在良好的天气下赔付率更低. 外部环境过程可以用 $\{J(t); t \geq 0\}$ 来表示, 它具有有限的状态空间 $\mathbf{E} = \{1, 2, \dots, m\}$, 是一个齐次不可约递归马尔科夫过程. 我们定义 $\{J(t); t \geq 0\}$ 的强度矩阵为 $\mathbf{A} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^m$, 对任意的 $i \in \mathbf{E}$ 有 $\alpha_{i,i} := -\alpha_i$, 定义 $\{J(t); t \geq 0\}$ 的稳态分布为 $\vec{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$.

令 $N(t)$ 表示发生在 $(0, t]$ 区间内的索赔次数, 若对于时间间隔 $(t, t+h]$ 内的所有 s , 满足 $J(s) = i$, 则在该时间间隔内发生的索赔次数为参数是 $\lambda_i h (> 0)$ 的泊松分布. 此外, 我们假设过程 $\{N(t); t \geq 0\}$ 具有独立增量. 给定 $\{J(t); t \geq 0\}$, 则有

$$\mathbb{P}[N(t+h) = n+1 | N(t) = n, J(s) = i, t < s \leq t+h] = \lambda_i h + o(h).$$

我们称过程 $\{N(t); t \geq 0\}$ 为一个马氏调节泊松过程.

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11601344) 资助.

*通讯作者, E-mail: jingchaoli@szu.edu.cn.

本文 2019 年 3 月 9 日收到, 2019 年 4 月 11 日收到修改稿.

接下来我们考虑索赔金额和保险费. 若系统正处于状态 i , 即 $J(t) = i$, 索赔额的分布则为 F_i , 密度函数为 f_i , 且索赔具有有限均值 μ_i ($i \in \mathbf{E}$). 此外我们假设保险公司以恒定的速率 c 连续收取保费. 盈余过程 $\{U(t); t \geq 0\}$ 可表示为

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

其中, $u \geq 0$ 为初始盈余, X_i 为第 i 次索赔的索赔额. 我们始终假定正负载条件成立, 即 $\sum_{i=1}^m \pi_i(c - \lambda_i \mu_i) > 0$. 我们定义破产时间为 $T_u = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$, 对于任意的 $t \geq 0$, 若满足 $U(t) \geq 0$, 则 $T_u = \infty$. 对于任意的 $\delta \geq 0$, $u \geq 0$ 且 $i, j \in \mathbf{E}$.

定义 1

$$\phi_{i,j}(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty, J(T_u) = j) | J(0) = i]$$

为盈余过程在状态 j 时, 由索赔引起的破产时间的拉普拉斯变换, 给定其初始盈余为 u , 初始状态为 $i \in \mathbf{E}$. 则 $\phi_i(u) = \sum_{j=1}^m \phi_{i,j}(u)$ 为破产时间的拉普拉斯变换, 给定初始盈余为 u , 初始状态为 $i \in \mathbf{E}$.

特别地, 当 $\delta = 0$ 时, $\phi_{i,j}(u)$ 表示 $\psi_{i,j}(u)$,

$$\psi_{i,j}(u) = \mathbb{P}[T_u < \infty, J(T_u) = j | J(0) = i], \quad i, j \in \mathbf{E},$$

$\psi_{i,j}(u)$ 为破产时盈余过程处于状态 j 的最终破产概率, 其初始盈余为 u , 初始状态为 i . 因此 $\psi_i(u) = \sum_{j=1}^m \psi_{i,j}(u)$ 为给定初始盈余 u , 初始状态 i 的最终破产概率, 且 $\chi_i(u) = 1 - \psi_i(u)$ 表示存活概率.

接着定义

$$\psi_{i,j}(u, t) = \mathbb{P}[T_u < t, J(T_u) = j | J(0) = i], \quad i, j \in \mathbf{E}$$

为给定初始盈余 u , 初始状态和最终状态分别为 i 和 j 的有限时间破产概率.

Li 和 Lu^[10] 对马氏调节模型下的 Gerber-Shiu 函数进行了详细的研究. He 等人^[14] 对利率为马氏链的离散时间风险模型的破产概率的递推算法做出了研究. 本文则主要对有限时间内的索赔次数、索赔金额和破产时间与破产时赤字的联合分布进行了研究. 首先, 我们得出有限时间内索赔次数的分布律, 特别的, 当状态空间为两状态时, 则有有限时间内分别在每一个状态下的索赔次数的分布律. 接着, 分别求出总索赔额分布函数的一般结果与数值近似方法的结果, 且数值例子显示近似方法与精确的概率密度函数非常接近. 最后, 对破产时间和破产时赤字的联合分布采用分解索赔金额的概率密度函数的方法, 得出具体的表达式.

§2. $(0, t]$ 时间内的索赔次数分布

在本节中, 我们将讨论 $(0, t]$ 区间内的索赔次数. 从一个一般的方法开始, 随后考虑当环境状态的数目 $m = 2$ 时的特殊情况, 在这种情况下, 我们可以利用两状态下的马尔科夫链的已知结果得到详细表达式.

定义 2

$$q_{i,j}^{(n)}(t) = \mathbb{P}[N(t) = n, J(t) = j | J(0) = i], \quad i \in \mathbf{E}, n \in N$$

为时间 t 之前发生 n 次索赔的概率, 其初始状态为 i , t 时刻的状态为 j . 进而有

$$q_i^{(n)}(t) = \mathbb{P}[N(t) = n | J(0) = i], \quad i \in \mathbf{E}, n \in N$$

为时间 t 之前发生 n 次索赔的概率, 已知初始状态为 i .

采用文献 [10] 中提出的方法, 通过对无穷小的区间 $(0, h]$ 内可能发生的事件进行分析, 可以得到以下的微分方程. 对于 $i \in \mathbf{E}$, 有

$$\begin{cases} q_{i,j}^{(0)'}(t) = -\lambda_i q_{i,j}^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^m \alpha_{i,k} q_{k,j}^{(0)}(t), \\ q_{i,j}^{(n)'}(t) = -\lambda_i q_{i,j}^{(n)}(t) + \lambda_i q_{i,j}^{(n-1)}(t) + \sum_{k=1}^m \alpha_{i,k} q_{k,j}^{(n)}(t), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

公式 (2) 可以写成以下的矩阵形式:

$$\begin{cases} \mathbf{q}'_0(t) = -(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})\mathbf{q}_0(t), \\ \mathbf{q}'_n(t) = -(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})\mathbf{q}_n(t) + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{q}_{n-1}(t), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

其中 $\mathbf{q}_n(t) = (q_{i,j}^n(t))_{m \times m}$. 解 (3) 得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_0(t) = e^{-(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})t}, \\ \mathbf{q}_n(t) = \int_0^t e^{-(\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})(t-x)} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{q}_{n-1}(x) dx, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

公式 (4) 为 $\mathbf{q}_n(t)$ 的递推公式. 公式 (3) 可以通过拉普拉斯变换求得.

令 $\tilde{\mathbf{q}}_n(t) = \int_0^t e^{-st} \mathbf{q}_n(t) dt$ 为 $\mathbf{q}_n(t)$ 的拉普拉斯变换. 对 (3) 做拉普拉斯变换, 并且重新整理, 对于 $n = 1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_n(s) &= [\mathbf{sI} + (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})]^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}}_{n-1}(s) \\ &= \{[\mathbf{sI} + (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}\}^n \tilde{\mathbf{q}}_0(s) \\ &= \{[\mathbf{sI} + (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}\}^n [\mathbf{sI} + (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})]^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

令 $\mathbf{H}(s) = s\mathbf{I} - (\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{A})$, $\mathbf{H}^*(s)$ 为 $\mathbf{H}(s)$ 的伴随矩阵. 则公式 (5) 可以写成

$$\tilde{\mathbf{q}}_n(s) = \frac{[\mathbf{H}^*(s)\boldsymbol{\Lambda}]^n \mathbf{H}^*(s)}{[\det \mathbf{H}(s)]^{n+1}}. \quad (6)$$

分母 $[\det \mathbf{H}(s)]^{n+1}$ 是一个 $m(n+1)$ 阶的多项式, 分子是每一个元素均为 $(n+1)(m-1)$ 阶的多项式矩阵. 因此 $\tilde{\mathbf{q}}_n(s)$ 是一个矩阵, 它的每一个元素都是可以由部分分式倒置的有理函数.

假设状态空间只有两个状态, $m = 2$, 强度矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix},$$

泊松参数分别为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2/3$, 可以求得

$$\tilde{\mathbf{q}}_0(s) = \begin{pmatrix} \frac{17+12s}{19+32s+12s^2} & \frac{3}{19+32s+12s^2} \\ \frac{9}{19+32s+12s^2} & \frac{15+12s}{19+32s+12s^2} \end{pmatrix},$$

对其可以通过逆变换求得, 如

$$q_{1,2}^{(0)}(t) = \frac{3}{4\sqrt{7}}(e^{-(4/3-\sqrt{7}/6)t} - e^{-(4/3+\sqrt{7}/6)t}). \quad (7)$$

虽然这种方法可以求出 $(0, t]$ 内索赔次数的概率函数, 但不能求得分别在每一个状态下的概率函数. 现在我们用 $m = 2$ 这一种特殊情况来展示如何求得分别在每一个状态下的索赔次数的概率函数.

我们利用文献 [15] 中的结果. 假设环境过程的初始状态为 1, 即 $J(0) = 1$, 下面的论据也可用于 $J(0) = 2$ 的情况. 在给定 $J(0) = 1$ 的条件下, 令 $S_1(t)$ 表示在区间 $(0, t]$ 内处于状态 1 的时间. Pedler^[15] 给出了 $S_1(t)$ 的概率密度函数

$$h(s, t) = e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s)} \left[\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2 s}{t-s}} I_1(\sqrt{4\alpha_1 \alpha_2(t-s)}) + \alpha_1 I_0(\sqrt{4\alpha_1 \alpha_2(t-s)}) \right],$$

其中 $I_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t/2)^{2n+v} / [n!(n+v)!]$ 为 v 阶的修正 Bessel 函数 (如文献 [16] 中所示),

$$\mathbb{P}[S_1(t) = t] = e^{-\alpha_1 t}.$$

现在我们令 $M_i(t)$ 表示在区间 $(0, t]$ 内第 i 个状态下发生索赔的次数, $i = 1, 2$. 可以得到以下式子:

$$\mathbb{P}[M_1(t) = j, M_2(t) = k | J(0) = 1]$$

$$= I(k=0) e^{(-\lambda_1 + \alpha_1)t} \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} + \int_0^t h(s, t) e^{-\lambda_1 s} \frac{(\lambda_1 s)^j}{j!} e^{-\lambda_2(t-s)} \frac{[\lambda_2(t-s)]^k}{k!} ds, \quad (8)$$

其中 I 为示性函数. 可以看出, 如果在状态 1 中一共花费的时间是 s , 则状态 1 (在 $(0, t]$ 内) 中的索赔次数的分布是参数为 $\lambda_1 s$ 的泊松分布, 在状态 2 中索赔次数的分布是参数为 $\lambda_2(t-s)$ 的泊松分布.

进而, Pedler^[15] 给出了在 $(0, t]$ 内状态转换次数的分布, 并且利用表达式 $h(s, t)$ 表示它的概率函数. 假设该过程在状态 1 开始, 如果 $(0, t]$ 中的状态转换次数为 0 或者偶数, 则该过程在 t 时刻时处于状态 1; 如果转换发生的次数为奇数, 则该过程在 t 时刻时处于状态 2. 对 $h(s, t)$ 直接运用文献 [15] 的最后一个公式, 得

$$h(s, t) = h_1(s, t) + h_2(s, t),$$

其中

$$h_1(s, t) = \alpha_1 \alpha_2 s e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s)} {}_0F_1(2; \alpha_1 \alpha_2 s(t-s))$$

是在 $(0, t]$ 中与状态 1 的持续时间 s 相关的密度, 且在 t 时刻的状态为 1,

$$h_2(s, t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 s - \alpha_2(t-s)} {}_0F_1(1; \alpha_1 \alpha_2 s(t-s))$$

是与状态 1 的持续时间 s 相关的密度, 且在 t 时刻时处于状态 2, ${}_0F_1$ 为以下的超几何函数 (在文献 [16] 中给出了介绍):

$${}_0F_1(a; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+j)} \frac{x^j}{j!},$$

则对于 $j, k = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[M_1(t) = j, M_2(t) = k, J(t) = i | J(0) = 1] \\ &= I(k=0) I(i=1) e^{(-\lambda_1 + \alpha_1)t} \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} + \int_0^t h_i(s, t) e^{-\lambda_1 s} \frac{(\lambda_1 s)^j}{j!} e^{-\lambda_2(t-s)} \frac{[\lambda_2(t-s)]^k}{k!} ds, \end{aligned} \quad (9)$$

给定 $h(s, t)$ 和 $h_i(s, t)$, $i = 1, 2$ 的形式, 可以同时对公式 (8) 和 (9) 进行积分. 对前面所提到的符号进行一些拓展, 可以写成

$$q_{i,j}^{(m,n)}(t) = \mathbb{P}[M_1(t) = m, M_2(t) = n, J(t) = j | J(0) = i],$$

对于 $m, n = 0, 1, 2, \dots; i, j = 1, 2$ 上式均成立.

表 1 给出了当 $j = 1, 2$ 时, $q_{1,j}^{(m,n)}(5)$ 和 $q_{1,j}^{(m)}(5)$ 的值, 其参数与本节前面定义的参数相同. $q_{1,j}^{(m,n)}(5)$ 的值可由下式计算得到,

$$q_{1,j}^{(m,n)}(5) = \sum_{k=0}^n q_{1,j}^{(k,n-k)}(5).$$

表 1 $q_{1,j}^{(m,n)}(5)$ 和 $q_{1,j}^{(m)}(5)$ 的值

m	n	$q_{1,1}^{(m,n)}(5)$	$q_{1,2}^{(m,n)}(5)$	$q_{1,1}^{(m)}(5)$	$q_{1,2}^{(m)}(5)$
0	0	0.0069	0.0032	0.0069	0.0032
0	1	0.0052	0.0048		
1	0	0.0267	0.0090	0.0320	0.0138
0	2	0.0040	0.0047		
1	1	0.0140	0.0099		
2	0	0.0563	0.0150	0.0744	0.0296
0	3	0.0025	0.0035		
1	2	0.0089	0.0077		
2	1	0.0217	0.0132		
3	0	0.0830	0.0184	0.1162	0.0428

$q_{1,2}^{(0)}(5)$ 的值可以由公式 (7) 求得. 上表中我们设定初始状态为 1, 从右边两列可看出在每一种情况下, $q_{1,1}^{(m)}(5)$ 的值均比 $q_{1,2}^{(m)}(5)$ 的值要大, 即在初始状态与终时状态相同的情况下, 索赔次数的分布律均大于初始状态与终时状态不同的索赔次数分布律, 这是由于状态1至状态2的转移强度设置的较小. 此外, 从上表的左边两列可看出绝大部分取值有类似的规律. 再者表 1 的结果显示, 当 $m = 0$ 时, $q_{1,1}^{(m)}(5)$ 和 $q_{1,2}^{(m)}(5)$ 的值最小, 随着 m 值得增大, $q_{1,1}^{(m)}(5)$ 和 $q_{1,2}^{(m)}(5)$ 的值也随之增大, 这表明在盈余过程中, 不发生索赔的概率非常低, 随着索赔次数的增加其概率也不断增大, 当 m 达到某一个数值时会逐渐降低, 由于篇幅原因表 1 只给出了 $m \leq 3$ 时的值.

§3. $(0, t]$ 内的总索赔分布

本节主要讨论总索赔的分布.

定义 3

$$G_{i,j}(x, t) = \mathbb{P}[S(t) \leq x, J(t) = j | J(0) = i], \quad i, j \in E; x, t \geq 0$$

为到 t 时刻时总索赔小于等于 x 的概率, 且 $J(t) = j, J(0) = i$.

$$G_i(x, t) = \sum_{j=1}^m G_{i,j}(x, t)$$

为当 $J(0) = i$ 的条件下, 到 t 时刻时总索赔不超过 x 的概率.

从这个定义来看, 很显然,

$$G_{i,j}(0, t) = q_{i,j}^{(0)}(t), \quad G_i(0, t) = q_i^{(0)}(t), \quad G_{i,j}(x, 0) = I(i = j), \quad G_i(x, 0) = 1.$$

接着, 对于 $x > 0$, 令 $g_{i,j}(x, t) = \partial G_{i,j}(x, t)/\partial x$ 且 $g_i(x, t) = \partial G_i(x, t)/\partial x$, 因此在 $J(0) = i$ 的条件下, 后者是在 t 时刻的总索赔的密度.

3.1 一般结果

定理 4 令 $\tilde{\mathbf{G}}(s, t) = \int_0^x e^{-sx} \mathbf{G}(x, t) dx$ 和 $\tilde{\mathbf{f}}(s) = \int_0^x e^{-sx} \mathbf{f}(x) dx$ 分别为 $\mathbf{G}(x, t)$ 和 $\mathbf{f}(x)$ 关于 x 的拉普拉斯变换. 则有

$$\tilde{\mathbf{G}}(s, t) = \frac{1}{s} e^{[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{f}}(s)]t}.$$

证明: 通过分析无穷小区间 $[t, t+h]$ 内可能发生的事件, 得

$$\begin{aligned} G_{i,j}(x, t+h) &= [1 - (\lambda_j + \alpha_j)h]G_{i,j}(x, t) + \lambda_j h \int_0^x G_{i,j}(x-y, t)f_j(y)dy \\ &\quad + \sum_{k \neq j} G_{i,k}(x, t)\alpha_{k,j}h + o(h), \end{aligned} \tag{10}$$

从公式 (10) 中可以求出积分-微分方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(x, t)}{\partial t} = \mathbf{G}(x, t)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \int_0^x \mathbf{G}(x-y, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(y)dy, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{G}(x, t) = (G_{i,j}(x, t))_{m \times m}$ 且 $\mathbf{f}(x) = \text{diag}(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$. 对 (11) 求 x 的偏导数, 有

$$\frac{\partial \mathbf{g}(x, t)}{\partial t} = \mathbf{g}(x, t)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \int_0^x \mathbf{g}(x-y, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(y)dy + \mathbf{G}(0, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(x), \tag{12}$$

其中 $\mathbf{G}(0, t) = \mathbf{q}_0(t)$ 且 $\mathbf{g}(x, t) = (g_{i,j}(x, t))_{m \times m}$. 接着对公式 (11) 做拉普拉斯变换:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{G}}(s, t) = \tilde{\mathbf{G}}(s, t)[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{f}}(s)], \tag{13}$$

且 $\tilde{\mathbf{G}}(s, 0) = \mathbf{I}/s$, 解 (13) 得

$$\tilde{\mathbf{G}}(s, t) = \frac{1}{s} e^{[(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{f}}(s)]t}. \quad \square$$

可以看到, 当 $m = 1$ 时, 马氏调节模型就简化成了复合泊松风险模型, 其中 $\mathbf{A} = 0$, $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda$, $\mathbf{G}(x, t)$ 简化成了 $G(x, t)$. 公式 (11) 可以转化成

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = -\lambda G(x, t) + \lambda \int_0^x G(x-y, t)f(y)dy.$$

上式有如下解:

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x),$$

其中 F^{n*} 为 F 的 n 重卷积, 当 $x \geq 0$ 时, 定义 $F^{0*} = 1$.

3.2 $m = 2$ 的情况

当 $m = 2$ 时, 我们可以根据 $(0, t]$ 中每一个状态下发生的索赔次数采取更常规的方法.

$$G_{i,j}(x, t) = q_i^{(0)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{i,j}^{(m,n)}(t) F_1^{m*} F_2^{n*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_{i,j}^{(0,n)}(t) F_2^{n*}(x), \quad (14)$$

对于 $x, t \geq 0$ 上式成立, 其中 $F_1^{m*} * F_2^{0*} = F_1^{m*}$, 且当 $x > 0$ 时, 有

$$g_{i,j}(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_{i,j}^{(m,n)}(t) f_1^{m*} f_2^{n*}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_{i,j}^{(0,n)}(t) f_2^{n*}(x), \quad (15)$$

其中 $f_1^{m*} * f_2^{0*} = f_1^{m*}$. 虽然也可以将该方法拓展到 $m > 2$ 的情况, 但所需分析更为复杂, 而在 $m = 2$ 这一特殊的情形下, 可以运用本文第 2 节的结果来计算概率 $q_{i,j}^{(m,n)}(t)$. 因此, 对于某些形式的个体索赔分布, 我们可以通过计算卷积 $f_1^{m*} * f_2^{0*}(x)$ 来求得 $g_{i,j}(x, t)$.

3.3 数值方法

本文提出了一种计算 $G(x, t)$ 和 $g(x, t)$ 近似值的数值方法. 根据 (11) 和 (12), 我们可以知道, 对于很小的 h 值, 有

$$\mathbf{G}(x, t+h) = \left[\mathbf{G}(x, t)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \int_0^x \mathbf{G}(x-y, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(y)dy \right] h + \mathbf{G}(x, t),$$

且

$$\mathbf{g}(x, t+h) = \left[\mathbf{g}(x, t)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \int_0^x \mathbf{g}(x-y, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(y)dy + \mathbf{G}(0, t)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(x) \right] h + \mathbf{g}(x, t).$$

通过梯形法则来计算积分, 假设 G 的参数是 h 的整数倍. 则对于 $m = 1, 2, 3, \dots$, 可以得到

$$\mathbf{G}(0, mh) = \mathbf{G}(0, (m-1)h)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda})h + \mathbf{G}(0, (m-1)h).$$

假定 $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(nh, mh) \approx & \left[\mathbf{G}(nh, (m-1)h)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \frac{h}{2} \mathbf{G}(nh, (m-1)h)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(0) \right. \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} h \mathbf{G}((n-k)h, (m-1)h)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(kh) \\ & \left. + \frac{h}{2} \mathbf{G}(0, (m-1)h)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(nh) \right] h + \mathbf{G}(nh, (m-1)h). \end{aligned}$$

$\mathbf{G}(nh, mh)$ 的递推公式要求: 当 $n = 0, 1, 2, \dots$ 时, $\mathbf{G}(nh, 0)$ 的第 (i, j) 个元素为 $I(i = j)$. 类似的,

$$\mathbf{g}(0, mh) = [\mathbf{g}(0, (m-1)h)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{G}(0, mh)\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{f}(0)]h + \mathbf{g}(0, (m-1)h),$$

且有

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(nh, mh) \approx & \left[\mathbf{g}(nh, (m-1)h)(\mathbf{A} - \boldsymbol{\Lambda}) + \frac{h}{2} \mathbf{g}(nh, (m-1)h) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{f}(0) \right. \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} h \mathbf{g}((n-k)h, (m-1)h) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{f}(kh) \\ & \left. + \frac{h}{2} \mathbf{g}(0, (m-1)h) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{f}(nh) + \mathbf{G}(0, mh) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{f}(nh) \right] h \\ & + \mathbf{g}(nh, (m-1)h).\end{aligned}$$

若 $x > 0$, $\mathbf{g}(x, 0) = 0$ 并且 $\mathbf{g}(0, 0) = 0$. 首先假设 $x = h$ 来计算 $t = h, 2h, \dots$ 的值, 接着设 $x = 2h$ 继续重复这一步骤, 以此类推.

表 2 $g_{1,1}(x, 5)$ 和 $g_{1,2}(x, 5)$ 的具体数值

x	Exact		Approximate	
	$g_{1,1}(x, 5)$	$g_{1,2}(x, 5)$	$g_{1,1}(x, 5)$	$g_{1,2}(x, 5)$
0	0.0267	0.0009	0.0266	0.0089
5	0.0906	0.0295	0.0902	0.0294
10	0.0203	0.0055	0.0202	0.0054
15	0.0022	0.0005	0.0022	0.0005
20	0.0002	0.0000	0.0002	0.0000

表 2 给出了当 $j = 1, 2$ 时, $g_{1,j}(x, 5)$ 的精确值和近似值, 参数 A 和 Λ 与本文第 2 节中所取值一样, 并且 $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = 4xe^{-2x}$. 在这种情况下, 可以计算出 (15) 中的卷积

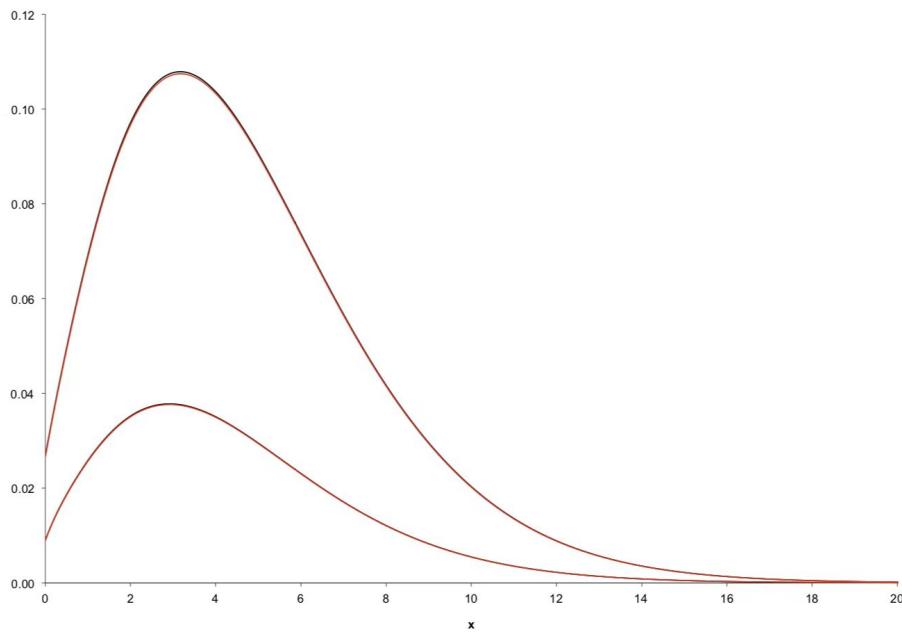
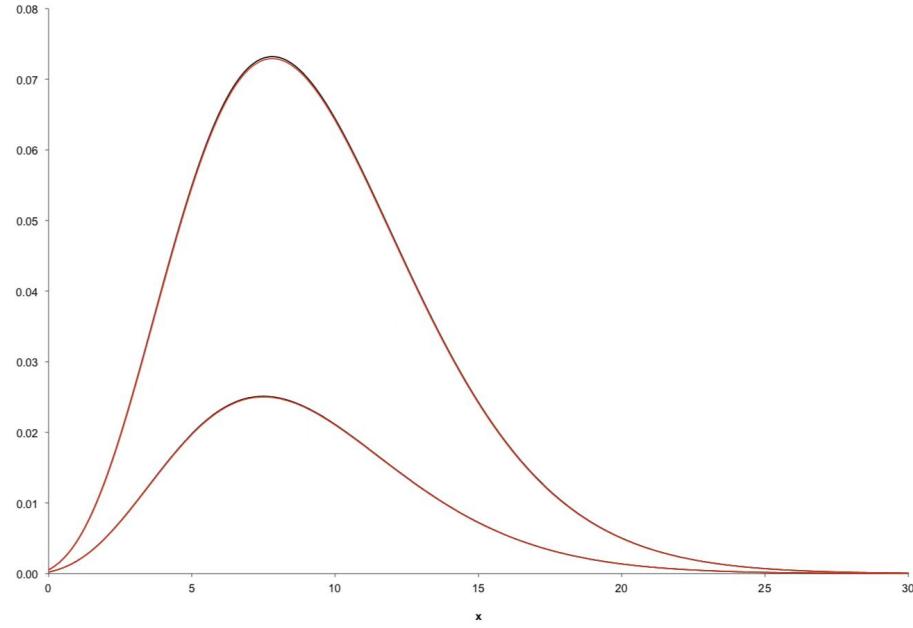
$$f_1^{m*} * f_2^{n*}(x) = \frac{2^{2m} x^{2m+n-1} e^{-x}}{\Gamma(2m+n)} {}_1F_1(2m, 2m+n, -x),$$

其中 ${}_1F_1$ 为超几何函数 (在文献 [16] 中给出了介绍), 精确值可通过截断公式 (15) 中的无穷和来计算的, 令 $h = 0.005$ 计算出近似值. 表中的结果可看出, 此方法的近似值与精确值已十分接近, 且随着 x 值的增大, 近似值与精确值将无限逼近. 此外, 选取的 h 值越小, 精确程度越高, 但所需的计算时间会更长. 图 1 和图 2 分别为 $t = 5$ 和 $t = 10$ 时的概率密度函数图. 在每一种情况下, 较高的曲线表示精确值, 较低的曲线表示近似的计算数值.

我们注意到, 近似计算的优点是不需要计算卷积, 计算这些函数很方便. 缺点是需要在数组中存储数值, 特别是对于后续程序需要用到的数值.

§4. 破产时间与破产时赤字的联合分布

令 $w_i(u, t, y)$ 表示破产时间 T_u 与破产时赤字 $|U(T_u)|$ 的联合概率密度函数, 给定初始

图 1 $g_{1,1}(x, 5)$ 和 $g_{1,2}(x, 5)$ 图 2 $g_{1,1}(x, 10)$ 和 $g_{1,2}(x, 10)$

的环境状态 $i \in \mathbf{E}$. Li 等人^[12] 的文章中给出了以下的联合密度公式:

$$w_i(u, t, y) = \sum_{j=1}^m q_{i,j}^{(0)}(t) \lambda_j f_j(u + ct + y)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \int_0^{u+ct} g_{i,j}(x, t) \lambda_j f_j(u + ct - x + y) dx \\
& - c \sum_{j=1}^m \int_0^t g_{i,j}(u + cs, s) w_j(0, t - s, y) ds,
\end{aligned} \tag{16}$$

公式 (16) 可以写成以下矩阵的形式:

$$\begin{aligned}
\vec{w}(u, t, y) = & \mathbf{G}(0, t) \boldsymbol{\Lambda} \vec{f}(u + ct + y) + \int_0^{u+ct} \mathbf{g}(x, t) \boldsymbol{\Lambda} \vec{f}(u + ct - x + y) dx \\
& - c \int_0^t \mathbf{g}(u + cs, s) \vec{w}(0, t - s, y) ds,
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $w_i(u, t, y)$ 是列向量 $\vec{w}(u, t, y)$ 的第 i 个元素, $f_i(x)$ 是列向量 $\vec{f}(x)$ 的第 i 个元素.

许多著名的密度函数都可被分解成:

$$f_i(x + y) = \sum_{k=1}^r \eta_{i,k}(x) \tau_k(y), \tag{18}$$

其中 $\{\eta_{i,k}(x)\}_{k=1}^r$ 是已知的函数, $\{\tau\}_{k=1}^r$ 是密度函数. 这个公式分解在文献 [17] 这篇文章中给出了介绍. 当这个公式分解应用于 Gerber-Shiu 方程的逆变换时 (我们可以在文献 [10] 中找到, 其中惩罚函数为 $w(x, y) = e^{-sy}$), 可以得到

$$w_i(0, t, y) = \sum_{k=1}^r h_{i,k}(0, t) \tau_k(y), \tag{19}$$

把公式 (18) 和 (19) 写成矩阵的形式:

$$\begin{aligned}
\vec{f}(x + y) = & \boldsymbol{\eta}(x) \vec{\tau}(y), \\
\vec{w}(0, t, y) = & \mathbf{h}(0, t) \vec{\tau}(y),
\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\vec{\tau}(x) = \{\eta_{i,k}(x)\}_{m \times r}$, $\vec{\tau}(y) = (\tau_1(y), \tau_2(y), \dots, \tau_r(y))^\top$, $\mathbf{h}(0, t) = (h_{i,k}(0, t))_{m \times r}$. 将 (20) 代入 (17), 可得

$$\vec{w}(u, t, y) = \mathbf{h}(u, t) \vec{\tau}(y), \tag{21}$$

其中 $m \times r$ 矩阵 $\mathbf{h}(u, t)$ 满足:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(u, t) = & \mathbf{G}(0, t) \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}(u + ct) + \int_0^{u+ct} \mathbf{g}(x, t) \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta}(u + ct - x) dx \\
& - c \int_0^t \mathbf{g}(u + cs, s) \mathbf{h}(0, t - s) ds,
\end{aligned} \tag{22}$$

若 $f_i(x) = \beta_i e^{-\beta_i x}$, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $\vec{f}(x + y) = \boldsymbol{\eta}(x) \vec{\tau}(y)$, 其中

$$\vec{\tau}(y) = (\beta_1 e^{-\beta_1 y}, \beta_2 e^{-\beta_2 y}, \dots, \beta_m e^{-\beta_m y})^\top,$$

$$\vec{\eta}(x) = \text{diag}(\text{e}^{-\beta_1 x}, \text{e}^{-\beta_2 x}, \dots, \text{e}^{-\beta_m x}).$$

致谢 感谢审稿人给出的宝贵意见, 使本文在有限时间破产变量的数值计算做出了一些工作.

参 考 文 献

- [1] REINHARD J M. On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment [J]. *Astin Bull*, 1984, **14**(1): 23–43.
- [2] ASMUSSEN S. Risk theory in a Markovian environment [J]. *Scand Actuar J*, 1989, **1989**(2): 69–100.
- [3] BÄUERLE N. Some results about the expected ruin time in Markov-modulated risk models [J]. *Insurance Math Econom*, 1996, **18**(2): 119–127.
- [4] SCHMIDLI H. Estimation of the Lundberg coefficient for a Markov modulated risk model [J]. *Scand Actuar J*, 1997, **1997**(1): 48–57.
- [5] SNOUSSI M. The severity of ruin in Markov-modulated risk models [J]. *Bull Swiss Assoc Actuaries*, 2002, **2002**(1): 31–43.
- [6] LU Y, LI S M. On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model [J]. *Insurance Math Econom*, 2005, **37**(3): 522–532.
- [7] LU Y. On the severity of ruin in a Markov-modulated risk model [J]. *Scand Actuar J*, 2006, **2006**(4): 183–202.
- [8] NG A C Y, YANG H L. On the joint distribution of surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model [J]. *Stochastic Process Appl*, 2006, **116**(2): 244–266.
- [9] ZHU J X, YANG H L. Ruin theory for a Markov regime-switching model under a threshold dividend strategy [J]. *Insurance Math Econom*, 2008, **42**(1): 311–318.
- [10] LI S M, LU Y. The decompositions of the discounted penalty functions and dividends-penalty identity in a Markov-modulated risk model [J]. *Astin Bull*, 2008, **38**(1): 53–71.
- [11] 张敏, 张志民. 马氏调节风险模型下的破产前盈余分布 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2016, **40**(6): 608–612.
- [12] LI J C, DICKSON D C M, LI S M. Analysis of some ruin-related quantities in a Markov-modulated risk model [J]. *Stoch Models*, 2016, **32**(3): 351–365.
- [13] LI S M, LU Y, SENDOVA K P. The expected discounted penalty function: from infinite time to finite time [J]. *Scand Actuar J*, 2019, **2019**(4): 336–354.
- [14] HE X X, YAO C, HU Y J. Ruin probabilities for the discrete risk models with Markov chain interest [J]. *Chinese J Appl Probab Statist*, 2012, **28**(3): 270–276.
- [15] PEDLER P J. Occupation times for two state Markov chains [J]. *J Appl Probab*, 1971, **8**(2): 381–390.
- [16] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [M]. New York: Dover Publications, 1965.
- [17] WILLMOT G E. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times [J]. *Insurance Math Econom*, 2007, **41**(1): 17–31.

Some Finite Time Ruin Problems in Markov-Modulated Risk Model

LI Jingchao SU Bihao

(College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Guangdong, 518000, China)

Abstract: This paper studies the distribution of finite-time ruin quantities. It gives the probability mass function of finite time number of claims, and find the distribution function of aggregate claims by using discretise method and compared with exact distribution function, which shows that the approximation works very well. In addition, by applying decomposition for density function, it gives the explicit expression for joint density of ruin time and deficit at ruin.

Keywords: Markov-Modulated risk model; distribution of number of claims; distribution of aggregate claim amount; joint density

2010 Mathematics Subject Classification: 62P05